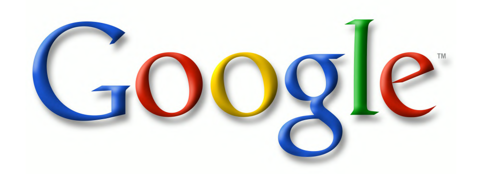
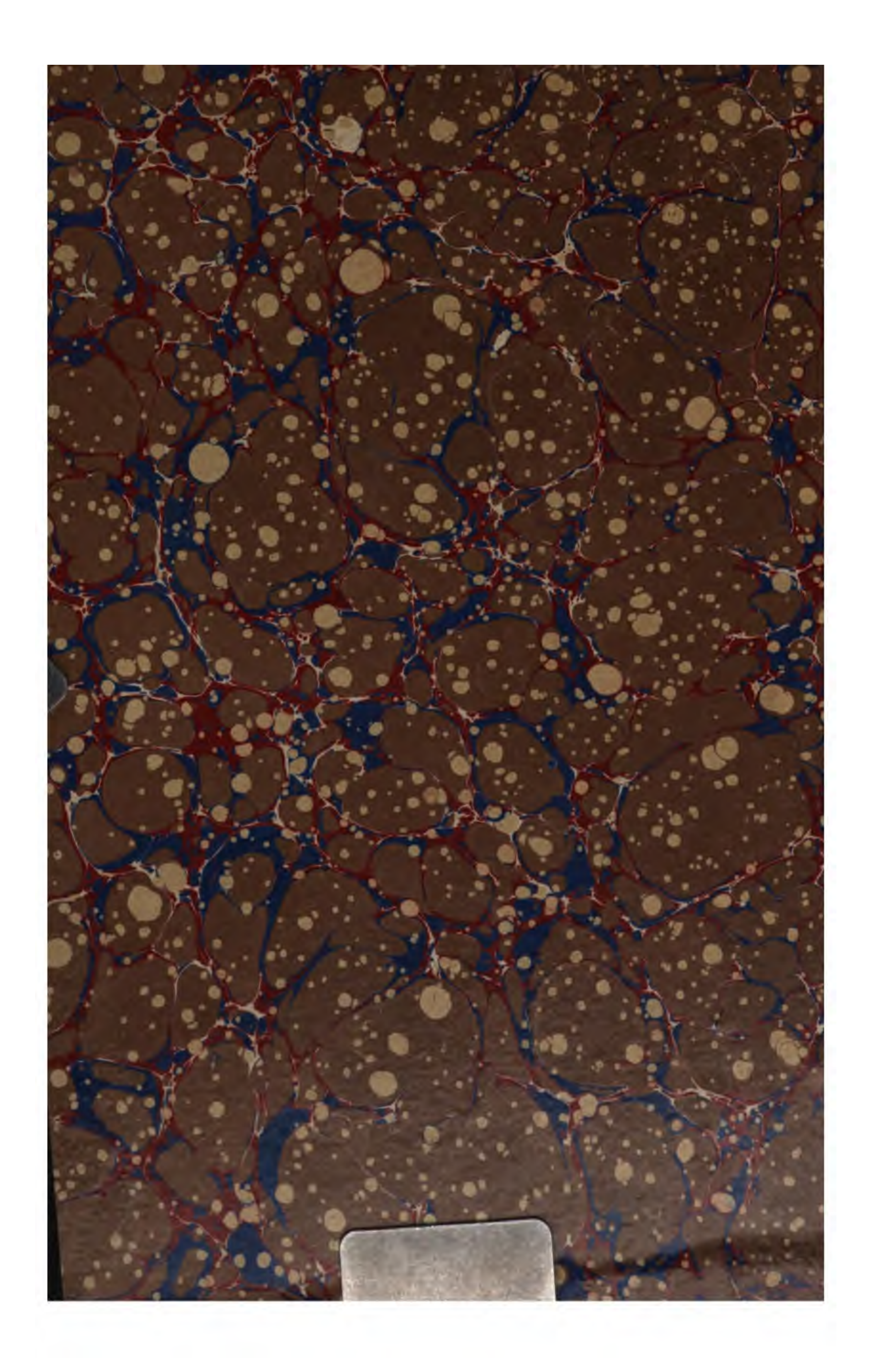
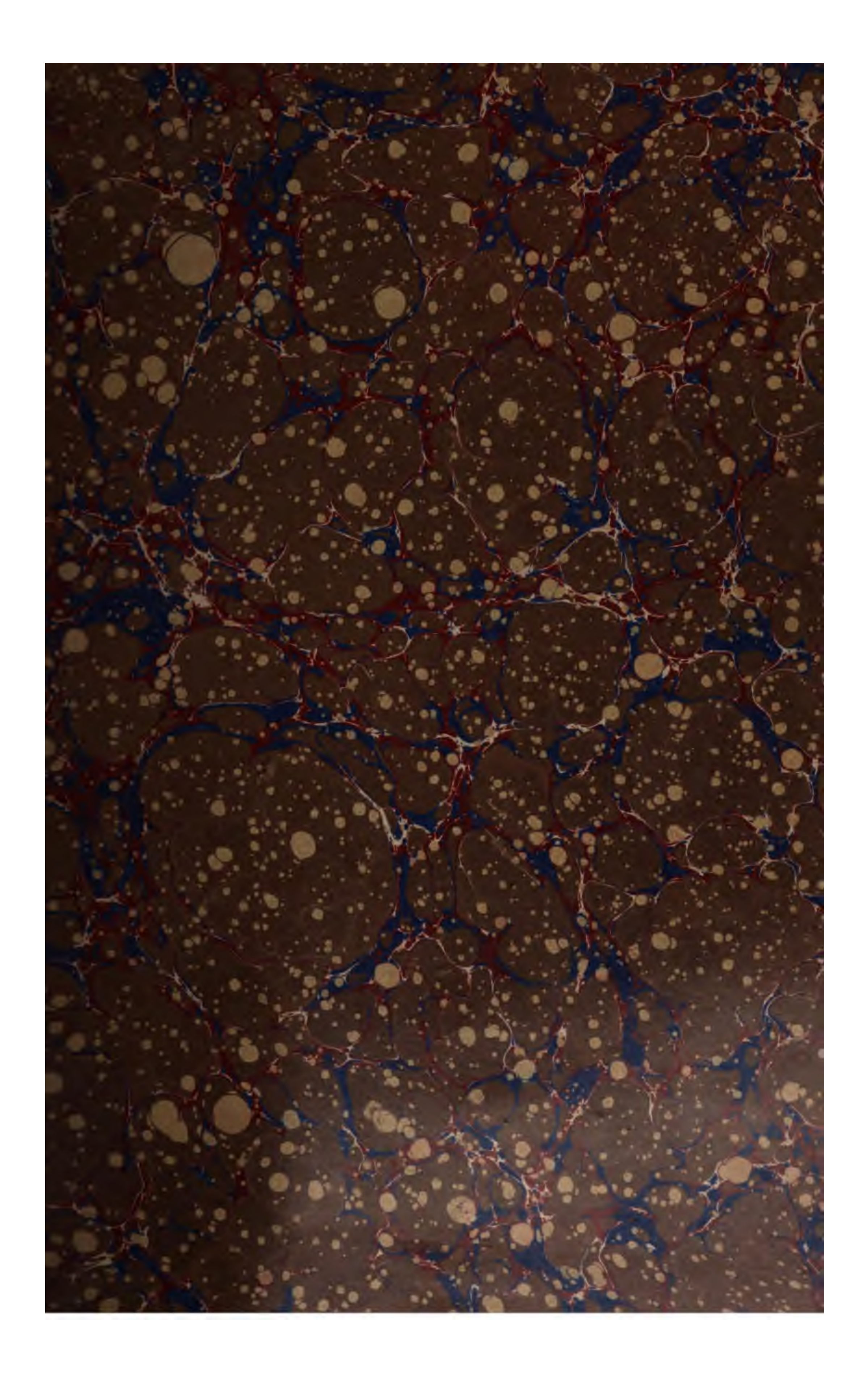
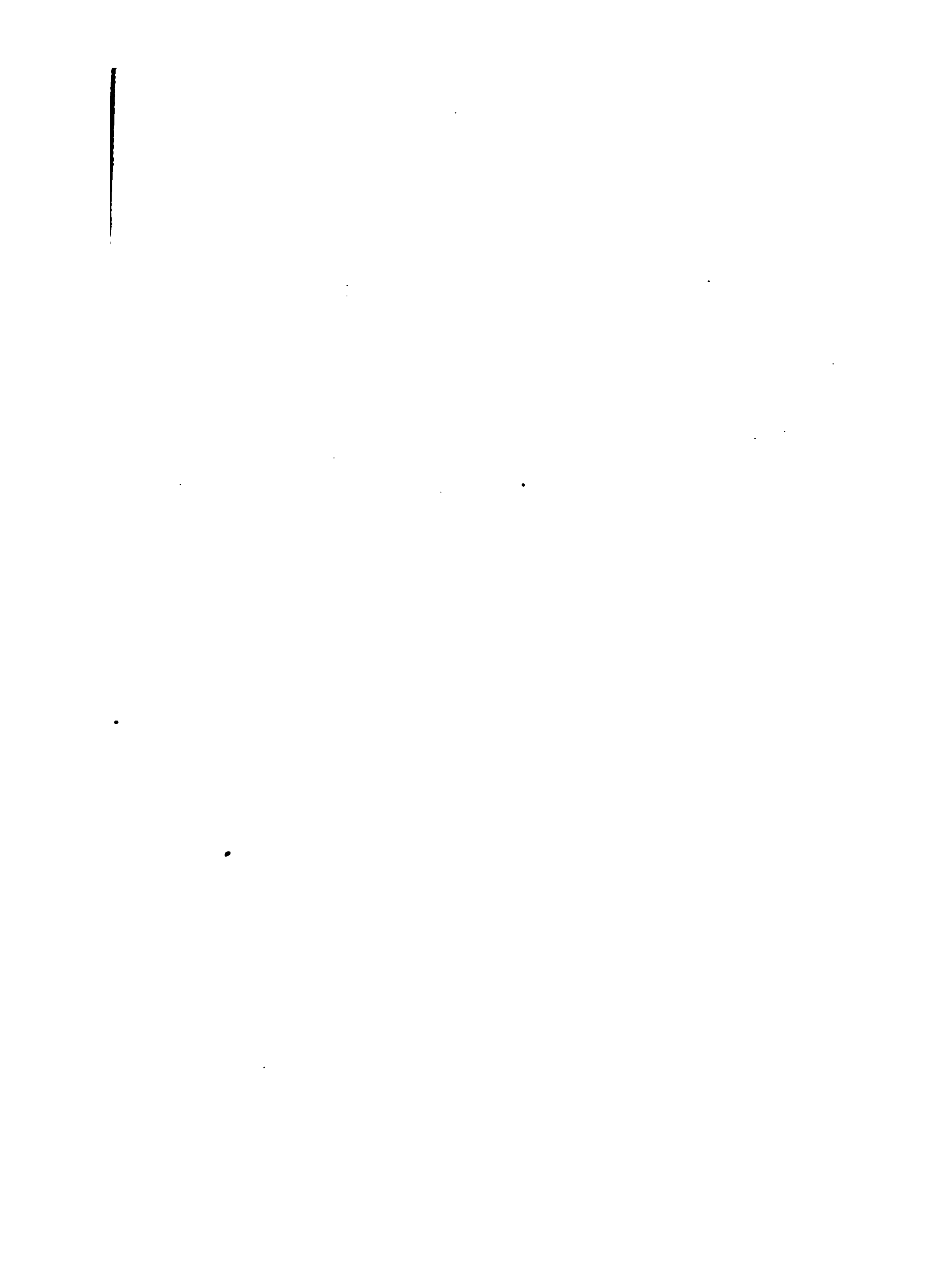



Stanford University Libraries
3 6105 025 498 325







ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

---

9. BAND. 1. HEFT.

MIT 8 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 16. MAI 1905.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigkirchstraße 6 I

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

ARCHIV
ER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

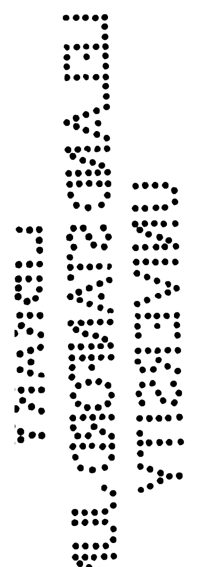
HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE IN BERLIN.
W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.
E. JAHNKE IN BERLIN.

NEUNTER BAND.

MIT 41 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.



Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität.

Von Eduard Riecke in Göttingen.

(Abdruck aus den Sitzungsberichten der Münchener Akademie 1903, S. 257.)

(Fortsetzung.)

4. *Die Diffusion der Ionen.* — Um zu verstehen, um was es sich dabei handelt, betrachten wir den folgenden Versuch. Zwischen zwei einander in kleinem Abstande gegenüberstehenden Platten lassen wir einen Strom ionisierter Luft durchstreichen; die Platten seien beide mit der Erde in leitender Verbindung; in ihrem Zwischenraum finde keine Neubildung von Ionen statt. Aus den Beobachtungen folgt, daß die Zahl der Ionen in dem Luftstrome um so kleiner wird, je weiter er in dem Zwischenraume der Platten vorrückt. Dabei wirken im allgemeinen drei verschiedene Ursachen zusammen. Einmal werden fortdauernd entgegengesetzt elektrische Ionen zu neutralen Molekülen sich verbinden. Zweitens können Ionen durch elektrische Kräfte gegen die Metallplatten getrieben werden; wenn sie mit ihnen zur Berührung kommen, verlieren sie ihre elektrische Ladung und verschwinden als Ionen. Die dritte und hauptsächlichste Ursache besteht in dem, was wir als Diffusion der Ionen bezeichnen. Zunächst werden Ionen, die sich in unmittelbarer Nähe der Platten befinden, einfach infolge ihrer molekularen Bewegung gegen die Platte stoßen und verschwinden, ein Vorgang, den man als Adsorption[1]) der Ionen bezeichnet. Es bildet sich so eine Ungleichförmigkeit der Ionendichte in dem Zwischenraum der Platten aus; die Dichte wird an der Oberfläche der Platten sehr klein im Vergleich mit der Dichte, wie sie in der Mitte zwischen den Platten vorhanden ist. Diese Unterschiede suchen sich auszugleichen; die Ionen wandern von der Mitte nach den Platten, wo sie bei der Berührung mit den Metallflächen verschwinden. Der Vorgang ist ganz ähnlich der Diffusion eines gelösten Stoffes in reinem Wasser. Wir bezeichnen

1) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen, S. 378.

daher auch die durch die Konzentrationsunterschiede bedingte Bewegung der Ionen als Diffusion. Ihr Gesetz ist dasselbe wie das der Diffusion in einer Lösung. Es wird dadurch die Menge der Ionen bestimmt, die in einer Sekunde durch eine Fläche von einem qcm hindurchgehen, wenn diese senkrecht zu der Richtung des Diffusionsstromes gestellt wird. Jene Menge ist nun nach dem Diffusionsgesetze gleich der Abnahme der Konzentration auf der Länge von 1 cm, multipliziert mit einer konstanten Zahl, die man als den Diffusionskoeffizenten bezeichnet. Will man diesen Koeffizienten durch Beobachtungen an dem zwischen den Platten durchgehenden Luftstrome bestimmen, so muß man dafür sorgen, daß der Ionenverlust durch Wiedervereinigung und durch elektrische Feldwirkung verschwindet. Dies ist in der Tat der Fall, wenn man den Zwischenraum zwischen den Platten sehr eng macht. Man kann nun das elektrische Leitvermögen der durch den Zwischenraum der Platten streichenden Luft bestimmen, ehe sie in den Raum eintritt und nachdem sie ihn verlassen hat. Die Abnahme des Leitvermögens gibt Aufschluß über die Abnahme des Ionengehaltes. Diese aber ist eine Folge der Diffusion, und man übersieht daher die Möglichkeit, den Diffusionskoeffizienten der Ionen aus den Beobachtungen zu berechnen. Auf diesem Wege ergibt sich, daß der Diffusionskoeffizient der positiven Ionen in trockener Luft 0,028, der der negativen 0,043 beträgt. Man kann dieses Ergebnis der Beobachtungen in folgender Weise ausdrücken: Wäre das Konzentrationsgefälle, die Abnahme der Ionendichte auf der Strecke von 1 cm gleich 1000, so würden in einer Sekunde 28 positive und 43 negative Ionen durch eine Fläche von 1 qcm in der Richtung des Gefälles hindurchgehen. Diese Beträge sind millionenmal größer als die bei der Diffusion von Salzlösungen beobachteten, dagegen kleiner als die bei der gewöhnlichen Gasdiffusion vorkommenden.

5. *Die Ladung der Gasionen.* — Von dieser nicht zu vermeidenden Zwischenbetrachtung kehren wir nun zu der ursprünglichen Aufgabe, der Berechnung der Ionenladung, zurück. Die Möglichkeit ihrer Lösung beruht auf einem Zusammenhange, der zwischen den Beweglichkeiten der Ionen und zwischen ihren Diffusionskoeffizienten besteht. Man kann nämlich die Gleichungen für die Bewegung der Ionen in einem elektrischen Felde und für ihre Diffusion auf eine gemeinsame Form bringen. Bei beiden Vorgängen handelt es sich schließlich um Geschwindigkeiten, die den Ionen durch auf sie wirkende Kräfte erteilt werden. Diese Kräfte sind das eine Mal elektrischer Natur, das andere Mal entspringen sie der Ungleichförmigkeit der Ionendichte. In beiden Fällen kann man die Gleichungen so schreiben, daß sie die Geschwindigkeit an-

geben, welche durch die Krafteinheit erzeugt wird. Der hierfür geltende Ausdruck hängt dann das eine Mal von den Beweglichkeiten, das andere Mal von den Diffusionskoeffizienten der Ionen ab. Setzt man die gefundenen Werte einander gleich, so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen jenen Größen. Man findet, daß die elektrische Ladung eines ccm, das bei normalen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur von Ionen der einen oder der anderen Art erfüllt ist, aus dem Verhältnisse der Beweglichkeiten zu den Diffusionskoeffizienten sehr einfach zu berechnen ist. Man hat dieses Verhältnis nur mit der Lichtgeschwindigkeit und dem Atmosphärendrucke zu multiplizieren, um jene Ladung zu erhalten. Man findet dieselbe Zahl von 13 Milliarden elektrostatischer Einheiten wie früher bei den elektrolytischen Ionen. Man kann aus dieser Übereinstimmung den Schluß ziehen, daß auch die Ladung der einzelnen Gasionen dieselbe ist wie die der einzelnen elektrolytischen Ionen; denn die Zahl der in einem ccm enthaltenen Ionen muß unter den von uns gemachten Voraussetzungen in allen Fällen die gleiche sein. Jene Ladung würde also eine allen Ionen gemeinsame Naturkonstante darstellen, die wir als das elektrische Elementarquantum bezeichnen.

6. *Das elektrische Elementarquantum.* — Es liegt nahe noch einen Schritt weiter zu gehen und die einem einzelnen Ion zukommende Ladung, das elektrische Elementarquantum, wirklich zu berechnen. Zu diesem Zwecke muß man die Zahl der Ionen kennen, die bei normalen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur in einem ccm enthalten sein würden. Wir setzen voraus, daß sich die Ionen so verhalten, wie die Moleküle eines neutralen Gases. Nach dem Gesetze von Avogadro ist aber die Zahl der Moleküle, die bei gegebenen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur in einem ccm enthalten sind, bei allen Gasen die gleiche. Nach unserer Voraussetzung gibt dieselbe Zahl auch an, wieviel Ionen unter den gegebenen Umständen in einem ccm enthalten sind. Die fragliche Zahl wurde zuerst von Loschmidt aus Betrachtungen abgeleitet, deren nicht allzu sichere Grundlagen der kinetischen Gastheorie angehören. Ein besserer Weg zur Bestimmung der Loschmidtschen Zahl wurde neuerdings von Planck aufgefunden. Er geht aus von dem Gesetze, durch welches die Strahlung eines schwarzen Körpers in ihrer Abhängigkeit von Temperatur und Wellenlänge dargestellt wird. Einer der konstanten Koeffizienten dieses Gesetzes ist mit der Zahl der Gasmoleküle oder der Ionen in einem ccm proportional. Der Wert des Koeffizienten kann aus den Strahlungsmessungen auf experimentellem Wege bestimmt werden; aus ihm folgt dann die Loschmidtsche Zahl. Wir können

darnach annehmen, daß in einem ccm unter normalen Verhältnissen 28 Trillionen Gasmoleküle oder Ionen enthalten sind. Wir haben früher gefunden, daß die elektrische Ladung eines ccm, das mit Ionen der einen oder der anderen Art bei normalen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur gefüllt ist, 13 Milliarden elektrischer Einheiten beträgt; für die Ladung eines einzelnen Ions, das elektrische Elementarquantum, ergibt sich hiernach ein Wert von 470 Billionstel elektrostatischer Einheiten.

7. *Bestimmung des elektrischen Elementarquantums durch J. J. Thomson.* Das gefundene Resultat wurde auf eine sehr merkwürdige Art von J. J. Thomson bestätigt. Er benützte dabei eine Eigenschaft der Ionen, die bei den meteorologischen Prozessen der Atmosphäre eine wichtige Rolle spielt. Wenn Ionen in Luft sich befinden, die in gewissem Grade mit Wasserdampf übersättigt ist, so bilden sie Kerne, um welche der Wasserdampf in Tröpfchen sich niederschlägt. Gelingt es also die unter diesen Umständen in einem gegebenen Luftraume gebildete Zahl von Wassertröpfchen zu bestimmen, so hat man damit zugleich die Zahl der Ionen. Die Zahl der Tröpfchen ergibt sich aus dem Gesamtgewichte des kondensierten Wasserdampfes einerseits, dem Gewichte des einzelnen Tröpfchens andererseits. Die mit Wasserdampf übersättigte Luft war in einem Glaskolben eingeschlossen; sie wurde durch Röntgenstrahlen ionisiert. Die Kondensation des Wasserdampfes erzeugt einen Nebel in dem Gefäße, der sich langsam zu Boden senkt. Die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, hängt von dem Gewicht der einzelnen Tröpfchen ab, und es ist möglich aus der beobachteten Geschwindigkeit jenes Gewicht zu berechnen. Dividiert man das Gesamtgewicht des kondensierten Dampfes durch das Gewicht eines Tröpfchens, so erhält man die Zahl der Tröpfchen und damit auch die Zahl der gebildeten Ionen. Bestimmt man noch ihre ganze Ladung, so ergibt sich auch die des einzelnen Ions. Thomson fand hierfür einen Wert von 720 Billionstel elektrostatischer Einheiten. Bedenkt man die Schwierigkeiten der Messung, so muß man die Übereinstimmung mit dem vorher angegebenen Werte als eine befriedigende bezeichnen.

8. *Die mechanische Masse der Gasionen und ihre molekulare Geschwindigkeit.* Durch die bisher geschilderten Untersuchungen sind unsere Anschauungen von der Natur der Gasionen zu einem gewissen Abschluß gelangt; sie sind aber nicht so bestimmt wie unsere Kenntnisse von der Natur der elektrolytischen Ionen. Bei den letzteren kennen wir die chemische Konstitution; wir wissen, wie die neutralen Moleküle in Ionen sich spalten; wir kennen die Masse der elektrolytischen Ionen. Die chemische Natur der Gasionen ist der direkten Untersuchung bis-

her ebenso unzugänglich geblieben wie ihre Masse. Dagegen gewährt die kinetische Theorie der Gase die Möglichkeit, auf einem allerdings unsicheren und umständlichen Wege eine gewisse Vorstellung von der Masse der Gasionen zu gewinnen. Ein erster wohlbegründeter Satz jener Theorie sagt aus, daß die lebendige Kraft der Gasmoleküle der absoluten Temperatur des Gases proportional sei. Haben verschiedene Gase gleiche Temperatur, so erhalten sich darnach die Quadrate der Geschwindigkeiten, mit denen sich die Gasmoleküle in ihren molekularen Bahnen bewegen, umgekehrt wie ihre Massen. Nun haben wir angenommen, daß auch die Ionen in gasförmigem Zustande sich befinden. Kennen wir ihre molekulare Geschwindigkeit, so kann das Verhältnis ihrer Masse zu der Masse der neutralen Gasmoleküle leicht berechnet werden. Es tritt damit ein neues Element in den Kreis unserer Interessen, die von der Beweglichkeit wohl zu trennende molekulare Geschwindigkeit der Ionen. Diese Geschwindigkeit hängt nun in verhältnismäßig einfacher Weise mit dem Koëffizienten der Diffusion zusammen. Man wird es von vornherein wahrscheinlich finden, daß die Diffusion um so schneller vor sich geht, je größer jene Geschwindigkeit ist. Es kommt aber noch ein anderer Umstand in Betracht. Bei ihrer Bewegung zwischen den Molekülen der Luft stoßen die Ionen immer aufs neue mit Luftmolekülen zusammen; zwischen zwei Zusammenstößen bewegen sie sich in geraden Linien; jeder Zusammenstoß bewirkt eine Ablenkung aus der früheren Bewegungsrichtung, und so besteht die Bahn des Ions ebenso wie die eines Gasmoleküls aus einzelnen geraden Stücken, die sich zickzackförmig aneinanderreihen. Die mittlere Länge dieser geraden Stücke nennen wir molekulare Weglänge der Ionen. Die Diffusion hängt auch von dieser Weglänge ab und zwar so, daß sie um so rascher fortschreitet, je größer die Weglänge ist. In der Tat zeigt eine genaue Untersuchung, daß der Koëffizient der Diffusion gleich $\frac{2}{9}$ des Produktes aus molekularer Geschwindigkeit und Weglänge ist. Die Aufgabe, die Geschwindigkeit zu ermitteln, ist damit auf die Bestimmung der Weglänge reduziert.

Wir wissen aus der kinetischen Theorie der Gase, wie groß die mittlere Weglänge der Luftmoleküle ist. In unserem Falle aber handelt es sich um die Weglänge der Ionen, die der Luft oder einem anderen neutralen Gase in verhältnismäßig kleiner Zahl beigemischt sind. Mit Hilfe einer von Maxwell aufgestellten Formel ist es möglich die Weglänge der Ionen mit der der Luftmoleküle zu vergleichen. Der Faktor aber, mit dem die letztere zu multiplizieren ist, um die Weglänge der Ionen zu erhalten, hängt nicht bloß selber wieder von der Molekulargeschwindigkeit der Ionen ab, sondern enthält überdies noch

eine neue unbekannte Größe, den Molekulardurchmesser der Ionen, genauer gesagt das Verhältnis dieses Durchmessers zu dem Durchmesser der Luftmoleküle. Es bleibt also nichts übrig, als für dieses Verhältnis willkürlich eine Reihe verschiedener Annahmen zu machen und für jede derselben die Rechnung durchzuführen. Aus dem Ergebnisse der Berechnung kann man mit ziemlicher Sicherheit die folgenden qualitativen Schlüsse ziehen: Die Weglänge der Ionen ist kleiner als die Weglänge der Luftmoleküle, ebenso ihre molekulare Geschwindigkeit; die Masse der Ionen aber ist größer als die Masse der Luftmoleküle.

Aus dem letzteren sehr überraschenden Ergebnisse folgt, daß mit der Spaltung neutraler Luftmoleküle in positive und negative Ionen eine Bildung komplexer Moleküle Hand in Hand gehen muß. Vergleichen wir die Eigenschaften der positiven und negativen Ionen, so ergeben sich die folgenden Sätze: Die Weglänge der negativen Ionen ist größer als die der positiven, ebenso ihre molekulare Geschwindigkeit; die Masse der negativen Ionen ist kleiner als die der positiven. Über diese qualitativen Resultate kann man nur hinauskommen, wenn man noch eine weitere hypothetische Annahme hinzufügt. Man kann z. B. annehmen, daß das Verhältnis zwischen Masse und Volumen bei den Ionen dasselbe sei wie bei den Molekülen der Luft; dann findet man, daß die Masse der positiven Ionen dreimal, die der negativen zweimal so groß ist als die der Luftmoleküle. Gleichzeitig ergibt sich für die molekulare Geschwindigkeit der positiven Ionen ein Wert von 280 Metern in der Sekunde, für die der negativen ein Wert von 340 Metern.

(Schluß folgt.)

The groups generated by two operators which have a common square.

By G. A. Miller in Stanford.

Let s_1, s_2 be two operators such that $s_1^2 = s_2^2$. If each of these operators is of odd order, they are powers of each other and the group generated by them, $\{s_1, s_2\}$, is the cyclic group generated by each of them separately. If the order of one is odd while that of the other is even, $\{s_1, s_2\}$ is the cyclic group generated by the operator of even order. Finally, if s_1, s_2 are commutative, $\{s_1, s_2\}$ is either the cyclic group generated by one of them, or it is the direct product of this cyclic group and an operator of order two. Hence it is only necessary to consider the case when s_1, s_2 are non-commutative and when each of them is of the same even order (n). In what follows we shall assume that both of these conditions are satisfied.

The order of $s_1 s_2^{-1}$ can have any value greater than 2, since we

may regard each of the factors as the direct product of an operator of order n and any operator of order 2.[1]) That $s_1 s_2^{-1}$ cannot be of order 2 results from the following equations:

From $s_1 s_2^{-1} s_1 s_2^{-1} = 1$ it follows that $s_1 s_2^{-1} = s_2 s_1^{-1}$; and from $s_1^2 s_2^{-2} = 1$ it follows that

$$s_1 s_2^{-1} = s_1^{-1} s_2 = (s_2 s_1^{-1})^{-1} = s_1^{-1}(s_2 s_1^{-1}) s_1 .$$

Combining these two sets of equations we have $s_2 s_1^{-1} = s_1^{-1} s_2$: that is, s_1, s_2 would be commutative, which is contrary to the hypothesis. The last set of equations shows further that $s_2 s_1^{-1}$ is transformed into its inverse by s_1. Hence the order of $\{s_1, s_2\}$ is the product of the order of $s_1 s_2^{-1}$ and the index of the lowest power of s_1 which is generated by $s_2 s_1^{-1}$. Since s_1 transforms into its inverse each operator of the cyclic group generated by $s_2 s_1^{-1}$[2]), this index is either n or $n/2$; and it can be the latter only when $n/2$ is even.

If s_1 and s_2 are represented as substitutions having a common cycle of order n while the remaining cycles are of order 2, it is clear that the index mentioned at the end of the preceding paragraph can always be n. Moreover, it can be $n/2$ whenever $n/2$ is even. Hence $\{s_1, s_2\}$ is completely defined by giving the order of $s_1 s_2^{-1}$ and (when this order > 2 and $n/2$ are both even) by stating whether $s_1 s_2^{-1}$ generates $s_1^{\frac{n}{2}}$. When $n = 2$, $\{s_1, s_2\}$ gives each of the possible dihedral rotation groups.[3]) In general, $\{s_1, s_2\}$ includes the direct product of the cyclic group generated by $s_1 s_2^{-1}$ and the cyclic group generated by $s_1^{\frac{n}{2}}$. The remaining half of the operators of $\{s_1, s_2\}$ transform each of the operators of the former cyclic group into its inverse while they are commutative with each of the operators of the latter cyclic group.

From the preceding paragraph it follows that for every given value of n there is one and only one group of order nk ($k > 2$ being the order of $s_1 s_2^{-1}$) which is generated by s_1, s_2. In this infinite system k can have any value from 3 to ∞. When both $\frac{n}{2}$ and k are even, s_1, s_2 generate also a group of order $nk/2$. In this system k can have any even value from 4 to ∞. Each of these groups contains either $n/2$ or n invariant operators and the corresponding quotient group is a dihedral rotation group. This quotient group is also the group of cogredient isomorphisms. These systems of groups are of especial interest on account of their simple abstract definitions and since they furnish such a direct generalization of the dihedral rotation groups.

1) American Journal of Mathematics, vol. 22, 1900, p. 185.

2) Jordan, Traité des Substitutions, 1870, p. 24.

3) Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 7, 1901, p. 424.

Distanzrelationen zwischen Punkten und Geraden der Ebene, sowie Punkten und Ebenen im Raume.

Von Kasimir Cwojdziński in Zürich.

(Zweiter Teil.)

Wir haben in (3) **5**, 118—122 dieses Archivs Relationen entwickelt, welche zwischen den sechzehn von vier Punkten auf vier Geraden der Ebene gefällten Loten bestehen, bezw. zwischen den 25 Loten, die sich von fünf Punkten des Raumes auf fünf beliebige Ebenen fällen lassen.

Im folgenden beginnen wir mit einer Erweiterung jener Relationen indem wir sieben Punkte und sieben Geraden der Ebene zugrunde legen. Dieselbe führt uns zu einer Verallgemeinerung der Distanzrelation auf $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$ Punkte und ebensoviele Geraden der Ebene. Das räumliche Analogon bezieht sich auf $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}+1$ Punkte und Ebenen. Zugleich ergibt sich ein interessanter Zusammenhang dieser Relationen einmal mit den algebraischen Kurven $n$ter Ordnung bezw. $n$ter Klasse, das andere mal mit den Oberflächen $n$ter Ordnung bezw. $n$ter Klasse.

1. *Eine Distanzrelation zwischen sieben Punkten und sieben Geraden der Ebene.* — Es seien sieben Punkte P_i durch ihre baryzentrischen Koordinaten x_i, y_i, z_i und sieben Gerade durch ihre Gleichungen gegeben

$$G_j \equiv xu_j + yv_j + zw_j = 0, \qquad (j=1,2,\ldots,7)$$

wo die u, v, w die senkrechten Abstände der Geraden von den Ecken des Fundamentaldreiecks bedeuten. Wenn ferner $\varDelta$ den Inhalt des Fundamentaldreiecks bezeichnet, so läßt sich der Abstand α_{ij} eines Punktes P_i von einer Geraden G_j folgendermaßen ausdrücken:

$$(1) \qquad \varDelta \cdot \alpha_{ij} = x_i u_j + y_i v_j + z_i w_j.$$

Multiplizieren wir nun die folgenden, identisch verschwindenden Determinanten, indem wir entsprechende Vertikalreihen miteinander multiplizieren:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_7^2 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_7^2 \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_7^2 \\ 2y_1z_1 & 2y_2z_2 & \dots & 2y_7z_7 \\ 2z_1x_1 & 2z_2x_2 & \dots & 2z_7x_7 \\ 2x_1y_1 & 2x_2y_2 & \dots & 2x_7y_7 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_7^2 \\ v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_7^2 \\ w_1^2 & w_2^2 & \dots & w_7^2 \\ v_1w_1 & v_2w_2 & \dots & v_7w_7 \\ w_1u_1 & w_2u_2 & \dots & w_7u_7 \\ u_1v_1 & u_2v_2 & \dots & u_7v_7 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

so entsteht eine Determinante, wo ein Element der $i$ten Horizontal- und der $j$ten Vertikalreihe heißt:

$$x_i^2u_j^2 + y_i^2v_j^2 + z_i^2w_j^2 + 2y_iz_iv_jw_j + 2z_ix_iw_ju_j + 2x_iy_iu_jv_j.$$

Dieser Ausdruck ist aber im Hinblick auf (1) gleich

$$(x_iu_j + y_iv_j + z_iw_j)^2 = \Delta^2 \,.\, \alpha_{ij}^2.$$

Wir haben somit, wenn für α_{ij}^2 kürzer $\overline{ij}^2$ geschrieben wird, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \overline{11}^2 & \overline{12}^2 & \dots & \overline{17}^2 \\ \overline{21}^2 & \overline{22}^2 & \dots & \overline{27}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{71}^2 & \overline{72}^2 & \dots & \overline{77}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

sie liefert:

Theorem III. Die Determinante aus den 7^2 Quadraten der Lote, die von sieben Punkten auf sieben Geraden der Ebene gefällt werden, beträgt Null.

2. *Zusammenhang mit der Theorie der Kegelschnitte.* — Streichen wir in der ersten Determinante des Produktes (2) die letzte Horizontal- und Vertikalreihe, ebenso in der zweiten, und setzen voraus, daß für $i = 1, 2, \dots 6$ die Relation besteht:

$$ax_i^2 + by_i^2 + cz_i^2 + 2dy_iz_i + 2ez_ix_i + 2fx_iy_i = 0,$$

wo $a, b, \dots f$ beliebige Konstanten sind, so wird die erste Determinante verschwinden; mithin auch die Produktderminante (2). Analog können wir sagen, falls für $j = 1, 2, \dots 6$

$$Au_j^2 + Bv_j^2 + Cw_j^2 + 2Dv_jw_j + 2Ew_ju_j + 2Fu_jv_j = 0$$

gilt, es wird die zweite Determinante zu Null und somit auch die Produktdeterminante. Diese Überlegung liefert:

Theorem IV. Die Determinante aus den 6^2 Quadraten der Lote von sechs Punkten auf 6 Geraden der Ebene beträgt Null, falls entweder die sechs Punkte auf einer Kurve zweiter Ordnung liegen, oder die Geraden Tangenten einer Kurve zweiter Klasse sind.

Wegen der Umkehrbarkeit des zum Beweise verwandten Determinantensatzes gilt die *Umkehrung von Theorem IV, daß nämlich das Verschwinden der genannten Determinante die erwähnte Lage der Punkte oder der Geraden nach sich zieht.*

3. *Verallgemeinerung auf den Fall von* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$ *Punkten und ebensoviel Geraden der Ebene.* — Die $n$te Potenz der Gleichung (1) lautet:

$$\varDelta^n \alpha_{ij}^n = (x_i u_j + y_i v_j + z_i w_j)^n;$$

sie liefert auf der rechten Seite entwickelt $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Glieder. Analog dem Produkt (2) können wir zwei Determinanten aufstellen von je $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$ Horizontal- und Vertikalreihen, welche mit lauter Nullen gerändert sind. Dann ergibt sich:

Theorem V. Die Determinante aus den nten Potenzen der Lote, die sich von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$ *Punkten auf ebensoviele Geraden der Ebene fällen lassen, beträgt Null.*

Für $n=1$ erhalten wir das in (3) **5**, 119 dieser Zeitschrift gegebene Theorem.

Von hier führt uns eine Behandlung, die analog derjenigen ist, wie wir sie in Nr. **2** angestellt haben, zu

Theorem VI. Die Determinante aus den nten Potenzen der Lote von $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ *Punkten auf ebensoviele Geraden der Ebene beträgt dann und nur dann Null, falls entweder die Punkte auf einer Kurve nter Ordnung liegen oder die Geraden eine Kurve nter Klasse berühren.*

Der Fall $n=1$ dieses Theorems liefert den bekannten Satz: Die Determinante aus den Loten von drei Punkten auf drei Geraden der Ebene verschwindet dann und nur dann, wenn die Punkte auf einer Geraden liegen oder die Geraden durch einen Punkt gehen.

4. *Erweiterung für den Raum.* — Aus der Analogie, welche zwischen der Gleichung der Ebene im Raum und der Gleichung der Geraden in der Ebene besteht, folgt ohne weiteres die Gültigkeit der Sätze:

Theorem VII. Die Determinante aus den nten Potenzen der Lote von $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}+1$ *Punkten auf ebensoviele Ebenen beträgt Null.*

Theorem VIII. Die Determinante aus den nten Potenzen der Lote von $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}$ *Punkten auf ebensoviele Ebenen beträgt dann und nur dann Null, falls die Punkte auf einer Oberfläche nter Ordnung liegen oder die Ebenen eine Oberfläche nter Klasse berühren.*

Zürich, den 12. Juni 1903.

Über die Algorithmen von der Form $\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = k a_\lambda$. $(\lambda = 1, 2, \ldots)$

Von J. Kraus in Darmstadt.

In zwei früheren Aufsätzen (Zeitschr. f. Math. und Phys., Bd. 37 S. 321 ff., Bd. 39 S. 11 ff.) wurde der Algorithmus

$$\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1} = k a_\lambda, \quad (0 \leq r_\lambda < k,\ 0 \leq a_\lambda < \alpha;\ \lambda = 1, 2, \ldots)$$

in welchem die Größen a_λ, wie bekannt, die Ziffern und die r_λ die Reste des im Zahlensystem α (d. h. mit der Grundzahl α) dargestellten (echten) Bruches r_1/k bedeuten, von uns zum Ausgangspunkt arithmetischer Untersuchungen gewählt. Wie daselbst gezeigt wurde, gelangt man zu tieferer Einsicht in das Wesen der Zahlen a_λ, r_λ, wenn man Doppelserien dieser Größen in Betracht zieht. Wir legten demgemäß die Algorithmen

$$\alpha r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+1,\mu} = k a_{\lambda\mu}, \quad (0 \leq r_{\lambda\mu} < k,\ 0 \leq a_{\lambda\mu} < \alpha;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots)$$
$$\alpha' r'_{\mu\lambda} - r'_{\mu+1,\lambda} = k a'_{\mu\lambda}, \quad (0 \leq r'_{\mu\lambda} < k,\ 0 \leq a'_{\mu\lambda} < \alpha';\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots)$$

zugrunde, wobei α' eine beliebige andere Grundzahl > 1 bedeutet. Unter der Voraussetzung $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$ besteht alsdann die von uns so genannte Fundamentalgleichung

$$\text{(I)} \qquad \alpha' a_{\lambda\mu} - a_{\lambda,\mu+1} = \alpha a'_{\mu\lambda} - a'_{\mu,\lambda+1}. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots)$$

Um eine kurze Ausdrucksweise zu besitzen, nannten wir die Größen $a_{\lambda\mu}$, $a'_{\mu\lambda}$ [resp. $r_{\lambda\mu}$, $r'_{\mu\lambda}$] die Ziffern [resp. Reste] des Bruches $\frac{r_{11}}{k} = \frac{r'_{11}}{k}$ in den Zahlensystemen (α, α') bezw. (α', α). Der Geltungsbereich der Gleichung (I) ließ sich unschwer auf $\lambda, \mu = -\infty, \cdots + \infty$ erweitern; und in diesem allgemeineren Sinne konnte die Gültigkeit der Fundamentalgleichung nicht bloß für echte Brüche, sondern überhaupt für beliebige positive Zahlen nachgewiesen werden. Eine besonders einfache Gestalt nimmt (I) an, wenn die Größen α, α' modulo k kongruente oder assoziierte Zahlen sind.[1])

Bei weiterem Verfolg der Untersuchungen wird man auf die allgemeineren Algorithmen von der Form

$$\alpha^\nu r_\lambda - \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1} r_{\lambda+1} + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2} r_{\lambda+2} - \cdots \pm r_{\lambda+\nu} = k a_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

geführt, wo ν eine beliebige positive ganze Zahl > 1 bedeutet. Diese Algorithmen sind von uns allgemein untersucht und die Resultate wie

1) Vergl. hierüber auch **Bachmann**, Niedere Zahlentheorie I, S. 361 ff.

oben verallgemeinert worden. In der vorliegenden Arbeit sollen jedoch der Hauptsache nach nur die quadratischen, d. h. diejenigen von der Form

$$\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = k a_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

einer näheren Betrachtung unterzogen werden, während die höheren Algorithmen nur insoweit Berücksichtigung finden, als es ohne Weitläufigkeiten geschehen kann. Über die Beziehungen zur Theorie der quadratischen Reste und Formen behalten wir uns vor, bei anderer Gelegenheit zu berichten.

1. Nachdem der Ausdruck $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$[1]), in welchem wir $\alpha < k$ voraussetzen dürfen, wie erwähnt, unter der Annahme näher untersucht worden ist, daß er sich durch k teilen läßt, soll diese Beschränkung jetzt aufgehoben werden. Es soll demgemäß jener Ausdruck im allgemeinen beliebige Werte annehmen können. Jedoch sollen die r_λ, die wir auch in der Folge als Reste bezeichnen wollen, der Bedingung $0 \leqq r_\lambda < k$ unterworfen bleiben. Alsdann kann man jedenfalls setzen:

$$(1) \qquad \alpha r_\lambda - r_{\lambda+1} = k h_\lambda - r'_\lambda. \qquad (0 \leq r'_\lambda < k).$$

Der Ausdruck $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ ist, sofern er negativ wird, seinem absoluten Werte nach $< k$. Daher kann h_λ niemals negativ werden. Andererseits aber vermag h_λ auch nicht die Zahl α zu übersteigen, da bei $h_\lambda = \alpha + n (n > 0)$ entgegen der Voraussetzung $r_\lambda > k$ sein würde. Also:

„*Wenn unter α und k positive ganze Zahlen > 1 verstanden werden und die Reste r_λ der Bedingung $0 \leqq r_\lambda < k$ genügen, so kann man stets setzen:*

$$\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1} = k h_\lambda - r'_\lambda.\text{“} \qquad (0 \leq r'_\lambda < k,\ 0 \leq h_\lambda \leq \alpha;\ \lambda = 1, 2, \ldots)$$

Es möge nun weiter der Ausdruck

$$\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = \alpha(\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}) - (\alpha r_{\lambda+1} - r_{\lambda+2})$$

in Betracht gezogen werden. Derselbe ist entweder für alle positiven ganzen Werte von λ durch k teilbar, oder nicht. Im ersteren Falle läßt die mit Hilfe von (1) sich ergebende Gleichung

$$(2) \qquad \alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = k(\alpha h_\lambda - h_{\lambda+1}) - (\alpha r'_\lambda - r'_{\lambda+1})$$

erkennen, daß $\alpha r'_\lambda - r'_{\lambda+1}$ gleichfalls durch k teilbar sein muß. Es sei

$$(3) \qquad \alpha r'_\lambda - r'_{\lambda+1} = k e_\lambda. \qquad (0 \leq e_\lambda < \alpha)$$

1) Im folgenden sind in allen Ausdrücken, in denen Buchstabenindizes vorkommen, dieselben immer, sofern nicht ausdrücklich eine besondere Einschränkung gemacht ist, als variabel gedacht, derart, daß diese Ausdrücke für alle positiven ganzen Werte der Indizes zu verstehen sind. Ferner werden die vorkommenden Zahlengrößen, falls nicht das Gegenteil bemerkt ist, immer positive ganze Zahlen bedeuten.

Führt man die Beziehung (3) in Gleichung (2) ein, so nimmt dieselbe die Form an:

(4) $$\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = k(\alpha h_\lambda - h_{\lambda+1} - e_\lambda). \qquad (0 \leqq h_\lambda \leqq \alpha,\ 0 \leqq e_\lambda < \alpha)$$[1]

Kann andererseits $\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2}$ nicht für alle Werte von λ durch k geteilt werden, so besitzt doch möglicherweise

$$\alpha^3 r_\lambda - 3\alpha^2 r_{\lambda+1} + 3\alpha r_{\lambda+2} - r_{\lambda+3} = \alpha^2(\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}) - 2\alpha(\alpha r_{\lambda+1} - r_{\lambda+2}) + (\alpha r_{\lambda+2} - r_{\lambda+3})$$

diese Eigenschaft. In diesem Falle folgt aus

(5) $$\alpha^3 r_\lambda - 3\alpha^2 r_{\lambda+1} + 3\alpha r_{\lambda+2} - r_{\lambda+3} = k(\alpha^2 h_\lambda - 2\alpha h_{\lambda+1} + h_{\lambda+2}) - (\alpha^2 r'_\lambda - 2\alpha r'_{\lambda+1} + r'_{\lambda+2}),$$

daß der Ausdruck $\alpha^2 r'_\lambda - 2\alpha r'_{\lambda+1} + r'_{\lambda+2}$ den Teiler k enthalten muß. Nach (4) darf man also setzen:

(6) $$\alpha^2 r'_\lambda - 2\alpha r'_{\lambda+1} + r'_{\lambda+2} = k(\alpha g_\lambda - g_{\lambda+1} - e_\lambda). \qquad (0 \leqq g_\lambda \leqq \alpha,\ 0 \leqq e_\lambda < \alpha)$$

Mit Rücksicht auf (6) verwandelt sich sodann (5) in:

(7) $$\alpha^3 r_\lambda - 3\alpha^2 r_{\lambda+1} + 3\alpha r_{\lambda+2} - r_{\lambda+3} = k[(\alpha^2 h_\lambda - 2\alpha h_{\lambda+1} + h_{\lambda+2}) - (\alpha g_\lambda - g_{\lambda+1}) + e_\lambda],$$

wo die h_λ, g_λ und e_λ den Bedingungen genügen:

$$0 \leqq h_\lambda \leqq \alpha, \quad 0 \leqq g_\lambda \leqq \alpha, \quad 0 \leqq e_\lambda < \alpha.$$

In derselben Weise fortfahrend gelangt man zu folgendem, durch vollständige Induktion leicht zu erweisenden allgemeinen Ergebnis:

„*Wenn der Ausdruck* $\alpha^\nu r_\lambda - \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1} r_{\lambda+1} + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2} r_{\lambda+2} - \cdots \pm r_{\lambda+\nu}$, *in welchem* ν *eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, für alle positiven ganzen Werte von* λ *durch* k *teilbar ist, so kann man setzen:*

$$\alpha^\nu r_\lambda - \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1} r_{\lambda+1} + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2} r_{\lambda+2} - \cdots \pm r_{\lambda+\nu} = k\{[\alpha^{\nu-1} h_\lambda - \binom{\nu-1}{1}\alpha^{\nu-2} h_{\lambda+1} \cdots] - [\alpha^{\nu-2} g_\lambda - \binom{\nu-2}{1}\alpha^{\nu-3} g_{\lambda+1} + \cdots] + [\alpha^{\nu-3} f_\lambda - \binom{\nu-3}{1} f_{\lambda+1} + \cdots] - \cdots \pm e_\lambda]\},$$

wo die Größen h_λ, g_λ, f_λ, $\cdots$ e_λ *den Bedingungen Genüge leisten:*

$$0 \leqq h_\lambda \leqq \alpha,\ 0 \leqq g_\lambda \leqq \alpha,\ 0 \leqq f_\lambda \leqq \alpha, \cdots, 0 \leqq e_\lambda < \alpha.$$“

Für die Zahlen h_λ, g_λ, f_λ, $\cdots$ kann man schreiben:

$$h_\lambda = h'_\lambda + \alpha u_\lambda - u_{\lambda+1},\ g_\lambda = g'_\lambda + \alpha v_\lambda - v_{\lambda+1},\ f_\lambda = f'_\lambda + \alpha w_\lambda - w_{\lambda+1}, \cdots,$$

---

1) Ist hierbei im besonderen Falle $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ für $\lambda = i$ durch k teilbar, so sind die e_λ für $\lambda = i, i+1, \ldots$ gleich null, und die h_λ genügen der Gleichung

$$\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1} = k h_\lambda, \quad \text{wo } 0 \leqq h_\lambda < \alpha. \qquad (\lambda = i, i+1, \ldots)$$

wo nunmehr die neuen Größen $h'_\lambda, g'_\lambda, f'_\lambda, \ldots$ nicht nur $\geqq 0$, sondern auch $< \alpha$ sind, mithin als Ziffern im Zahlensysteme α aufgefaßt werden dürfen, während die $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda, \ldots$ nur die Werte 0 und 1 annehmen. Die arithmetische Bedeutung dieser Ziffern $h'_\lambda, g'_\lambda, f'_\lambda, \ldots$, sowie der Zahlen $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda, \ldots$ gedenken wir in einem weiteren Aufsatze zu erörtern. Hier sei nur angedeutet, daß sie zu Brüchen mit Potenzen von k als Nennern in Beziehung stehen.

2. Im Anschluß an die Ausführungen des vorigen Artikels wollen wir hier den Beweis eines allgemeinen Satzes auseinandersetzen, der die Verallgemeinerung des in der Fundamentalgleichung (I) ausgesprochenen Lehrsatzes darstellt. Es mögen $r_{\lambda\mu}$ bezw. $r'_{\mu\lambda}$ zwei Doppelserien von Resten darstellen, für welche die Bedingungen $0 \leqq r_{\lambda\mu} < k$, $0 \leqq r'_{\mu\lambda} < k$ gelten und die Algorithmen bestehen:

$$(8) \quad \alpha^\nu r_{\lambda\mu} - \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1} r_{\lambda+1,\mu} + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2} r_{\lambda+2,\mu} - \cdots \pm r_{\lambda+\nu,\mu} = k a_{\lambda\mu},$$

$$(9) \quad \alpha'^\nu r'_{\mu\lambda} - \binom{\nu}{1}\alpha'^{\nu-1} r'_{\mu+1,\lambda} + \binom{\nu}{2}\alpha'^{\nu-2} r'_{\mu+2,\lambda} - \cdots \pm r'_{\mu+\nu,\lambda} = k a'_{\mu\lambda},$$

wo ν eine positive ganze Zahl bedeutet. Wenn dann die Größen $r_{\lambda\mu}, r'_{\mu\lambda}$ in einem derartigen Zusammenhange stehen, daß allgemein $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$ ist, die leicht zu beweisende (vergl. Nr. **5.**) Möglichkeit eines solchen Zusammenhanges vorausgesetzt, so kann folgender Satz ausgesprochen werden:

„*Aus den beiden Algorithmen* (8) *und* (9) *folgt unter der Voraussetzung* $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$ *der neue Algorithmus:*

$$(10) \quad \alpha'^\nu a_{\lambda\mu} - \binom{\nu}{1}\alpha'^{\nu-1} a_{\lambda,\mu+1} + \binom{\nu}{2}\alpha'^{\nu-2} a_{\lambda,\mu+2} - + \cdots = \alpha^\nu a'_{\mu\lambda} - \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1} a'_{\mu,\lambda+1} + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2} a'_{\mu,\lambda+2} - + \cdots \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots)$$

Zum Beweise setzen wir unter Anwendung symbolischer Bezeichnungsweise $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda} = r^\lambda R^\mu$, $a_{\lambda\mu} = a^\lambda A^\mu$, $a'_{\mu\lambda} = a'^\mu A'^\lambda$. Dann lassen sich die Gleichungen (8) und (9) symbolisch in der Form schreiben:

$$(11) \quad r^\lambda(\alpha - r)^\nu R^\mu = k a^\lambda A^\mu,$$

$$(12) \quad r^\lambda(\alpha' - R)^\nu R^\mu = k a'^\mu A'^\lambda.$$

Substituiert man nun in Gleichung (11) für μ der Reihe nach die Werte μ, $\mu + 1, \ldots \mu + \nu$, multipliziert hierauf die entstehenden Gleichungen mit bezw. $\alpha'^\nu, -\binom{\nu}{1}\alpha'^{\nu-1}, \cdots \pm 1$ und addiert, so folgt:

$$(13) \quad r^\lambda(\alpha - r)^\nu R^\mu(\alpha' - R)^\nu = k a^\lambda A^\mu(\alpha' - A)^\nu.$$

Auf gleiche Weise ergibt sich aus Gleichung (12), wenn man darin für λ nacheinander die Werte λ, $\lambda + 1, \ldots \lambda + \nu$ setzt und, nachdem die erhaltenen Gleichungen mit bezw. $\alpha^\nu, -\binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}, \cdots \pm 1$ multipliziert worden sind, addiert:

$$(14) \quad r^\lambda(\alpha - r)^\nu R^\mu(\alpha' - R)^\nu = k a'^\mu A'^\lambda(\alpha - A')^\nu.$$

Aus (13) und (14) folgt ohne weiteres:

(15) $$a^\lambda A^\mu(\alpha' - A)^\nu = a'^\mu A'^\lambda(\alpha - A')^\nu.$$

Dies ist aber der zu beweisende Algorithmus in symbolischer Schreibweise.

3. Wir betrachten jetzt eingehender die Algorithmen von der Form

(16) $$\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = k a_\lambda.$$

Nach **1.** darf dabei

(17) $$\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1} = k h_\lambda - r'_\lambda \quad (\alpha r'_\lambda - r'_{\lambda+1} = k e_\lambda,\ 0 \leqq h_\lambda \leqq \alpha,\ 0 \leqq e_\lambda < \alpha)$$

gesetzt werden.

Zunächst ist klar, daß bei gegebenen α, k durch irgend zwei aufeinanderfolgende Reste r_λ, etwa r_i und r_{i+1}, alle folgenden r_λ eindeutig bestimmt sind. Falls, wie hier vorerst vorausgesetzt werden soll, α prim zu k ist, gilt dies auch für die vorangehenden r_λ. Wenn zwei benachbarte Reste, z. B. r_1 und r_2, gleichzeitig verschwinden, so müssen alle übrigen Reste ebenfalls gleich null sein. Wird dieser Fall ausgeschlossen, so kann der Algorithmus (16) offenbar niemals abbrechen. Da ferner die k möglichen Reste $0, 1, \ldots (k-1)$ nur eine endliche Anzahl von Variationen zu je zwei Elementen gestatten, so ist der Algorithmus periodisch, und zwar bei der gemachten Annahme (α prim zu k) rein periodisch. Bezeichnet man die Anzahl der Elemente einer Periode mit Δ, so hat man

(18) $$r_{\lambda+\Delta} = r_\lambda, \quad a_{\lambda+\Delta} = a_\lambda.$$

Die konstante Zahl Δ soll in der Folge kurz als Periode der r_λ bezw. a_λ bezeichnet werden.

Denkt man sich in Gleichung (16) für λ der Reihe nach $\lambda, \lambda+1, \ldots \lambda+i-1$ gesetzt, wo i eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, darauf die entsprechenden Gleichungen mit bezw. α^{i-1}, $\alpha^{i-2}, \ldots 1$ multipliziert und addiert, so folgt:

(19a) $$\alpha(\alpha^i r_\lambda - r_{\lambda+i}) - (\alpha^i r_{\lambda+1} - r_{\lambda+i+1}) = k A_{i,\lambda},$$

oder

(19b) $$\alpha^i(\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}) - (\alpha r_{\lambda+i} - r_{\lambda+i+1}) = k A_{i,\lambda},$$

wo zur Abkürzung $A_{i\lambda}$ für $\alpha^{i-1} a_\lambda + \alpha^{i-2} a_{\lambda+1} + \cdots a_{\lambda+i-1}$ gesetzt wurde. Multipliziert man dagegen die Gleichungen (16), nachdem darin für λ die Werte $\lambda, \lambda+1, \ldots \lambda+i-2$ gesetzt worden sind, mit bezw. $(i-1)\alpha^{i-2}, (i-2)\alpha^{i-3}, \ldots 1$, so ergibt sich wegen der Identität $\mu - 2(\mu-1) + \mu - 2 \equiv 0$:

(20) $$\alpha^i r_\lambda - r_{\lambda+i} = i\alpha^{i-1}(\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}) - k A'_{i,\lambda},$$

wenn symbolisch $(i-1)\alpha^{i-2}a_\lambda + (i-2)\alpha^{i-3}a_{\lambda+1} + \cdots + a_{\lambda+i-2} = \frac{\partial A_{i,\lambda}}{\partial \alpha} = A'_{i,\lambda}$ bezeichnet wird. In ähnlicher Weise erhält man

(21) $\alpha^i r_\lambda - r_{\lambda+i} = i(\alpha r_{\lambda+i-1} - r_{\lambda+i}) + k[\alpha^{i-2}a_\lambda + \cdots + (i-1)a_{\lambda+i-2}]$.

4. Bei Bestimmung der Periode Δ unterscheiden wir zunächst zwischen zwei Hauptfällen, je nachdem nämlich $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ für irgend einen Wert von λ durch k teilbar, oder relativ prim zu k ist. Aus der Gleichung

$$\alpha(\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}) - (\alpha r_{\lambda+1} - r_{\lambda+2}) = k a_\lambda$$

ergibt sich, daß unter der Voraussetzung α prim zu k der Ausdruck $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ für alle Werte von λ durch k teilbar sein muß, sobald dies für einen unter ihnen der Fall ist. Der Algorithmus (16) ist unter diesen Umständen mit dem Algorithmus ersten Grades

$$\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1} = k h_\lambda \qquad (0 \leq h_\lambda < \alpha) \tag{22}$$

identisch, dessen Periode δ gleich dem Exponenten ist, zu welchem α in bezug auf den Modul k gehört. Wenn es andererseits zwei aufeinanderfolgende Reste r_i, r_{i+1} gibt, für welche $\alpha r_i - r_{i+1}$ teilerfremd zu k ist, so gilt ein Gleiches für je zwei benachbarte Reste. Aus Gleichung (20) geht hervor, daß der Ausdruck $\alpha^i r_\lambda - r_{\lambda+i}$ für $i = k$ durch k teilbar wird; gleichzeitig leuchtet ein, daß dies unter der Voraussetzung $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ prim zu k für keinen Wert $i < k$ möglich ist. Nun folgt aber aus Gleichung (19ᵃ), daß $\alpha^i r_\lambda - r_{\lambda+i}$ für alle Werte von λ den Teiler k enthalten muß, sobald dies für irgend einen unter ihnen der Fall ist. Daher stellen die Größen r_λ, $r_{\lambda+k}$, $r_{\lambda+2k}$, ... die Reste des Bruches r_λ/k im Zahlensysteme α^k dar. Bezeichnen wir nun den größten gemeinschaftlichen Teiler von k und δ mit d und setzen $k = dk'$, $\delta = d\delta'$, so gehört α^k in bezug auf den Modul k bekanntlich zu dem Exponenten δ'; d. h. die r_λ, $r_{\lambda+k}$, $r_{\lambda+2k}$, ... bilden Perioden von je δ' Resten. Die r_λ, $r_{\lambda+1}$, $r_{\lambda+2}$, ... müssen sich demnach jedenfalls nach den ersten $k\delta'$ Resten wiederholen; d. h. $k\delta'$ muß durch Δ teilbar sein. Andererseits folgt aus (19ᵇ) (bei $i = \Delta$), daß $\alpha^\Delta - 1$ durch k, also Δ durch δ teilbar sein muß, und Gleichung (20) lehrt sodann (bei $i = \Delta$), daß Δ den Teiler k besitzt. Daher muß Δ durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von k und δ, nämlich $k\delta'$, teilbar sein; d. h. es ist $\Delta = k\delta'$. Der Fall, wo $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ und k einen von k bezw. 1 verschiedenen größten gemeinschaftlichen Teiler besitzen, läßt sich auf die vorangehenden Fälle zurückführen, soll hier aber unerörtert bleiben. Wir gelangen somit zu dem Ergebnisse:

„*Wenn* $k = dk'$, $\delta = d\delta'$ *gesetzt wird, wo* δ *den zu* α *modulo* k

gehörigen Exponenten und d den größten gemeinschaftlichen Teiler von k und δ bedeutet, so ist die Periode Δ des Algorithmus

$$\alpha^2 r_\lambda - 2\alpha r_{\lambda+1} + r_{\lambda+2} = ka_\lambda$$

(bezw. der Größen r_λ, a_λ) für den Fall, daß $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ durch k teilbar ist (r_λ prim zu k vorausgesetzt), gleich δ; falls dagegen $\alpha r_\lambda - r_{\lambda+1}$ relativ prim zu k ist, gleich $k\delta'$."

5. Es seien r_{11}, r_{21}, r_{12}, r_{22} vier willkürlich gewählte positive ganze Zahlen $< k$ (die Null eingeschlossen). Wir bilden mit ihrer Hilfe ein System von Resten $r_{\lambda\mu}$:

$$\begin{matrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & \cdots \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & \cdots \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot, \end{matrix} \tag{23}$$

für welche der Algorithmus besteht:

$$\alpha^2 r_{\lambda\mu} - 2\alpha r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+2,\mu} = ka_{\lambda\mu}. \qquad (0 \leq r_{\lambda\mu} < k) \tag{24}$$

Nach **1.** kann man dann setzen:

$$a_{\lambda\mu} = \alpha h_{\lambda\mu} - h_{\lambda+1,\mu} - e_{\lambda\mu}. \qquad (0 \leq h_{\lambda\mu} \leq \alpha,\ 0 \leq e_{\lambda\mu} < \alpha)$$

Substituiert man in Gleichung (24) für μ nacheinander die Werte μ, $\mu+1$, $\mu+2$, multipliziert danach die entstehenden Gleichungen mit bezw. α'^2, $-2\alpha'$, 1 und addiert, so folgt, wenn gleichzeitig $r'_{\mu\lambda} = r_{\lambda\mu}$ und $R'_{\mu\lambda} = \alpha'^2 r'_{\mu\lambda} - 2\alpha' r'_{\mu+1,\lambda} + r'_{\mu+2,\lambda}$ eingeführt wird:

$$\alpha^2 R'_{\mu\lambda} - 2\alpha R'_{\mu,\lambda+1} + R'_{\mu,\lambda+2} = k(\alpha'^2 a_{\lambda\mu} - 2\alpha' a_{\lambda,\mu+1} + a_{\lambda,\mu+2}). \tag{25}$$

Werden nun die Größen $r_{1\mu} = r'_{\mu 1}$ und $r_{2\mu} = r'_{\mu 2}$ so gewählt, daß die Gleichungen

$$R'_{\mu 1} = ka'_{\mu 1},\ R'_{\mu 2} = ka'_{\mu 2} \tag{26}$$

bestehen, so ist, wie sich aus (25) durch Anwendung der vollständigen Induktion leicht ergibt, allgemein:

$$\alpha'^2 r'_{\mu\lambda} - 2\alpha' r'_{\mu+1,\lambda} + r'_{\mu+2,\lambda} = ka'_{\mu\lambda}, \tag{27}$$

wo die Größen $a'_{\mu\lambda}$ gewisse (positive oder negative) ganze Zahlen bedeuten, für welche man nach **1.** schreiben darf:

$$a'_{\mu\lambda} = \alpha' h'_{\mu\lambda} - h'_{\mu+1,\lambda} - e'_{\mu\lambda}. \qquad (0 \leq h'_{\mu\lambda} \leq \alpha',\ 0 \leq e'_{\mu\lambda} < \alpha')$$

Die Verallgemeinerung des Beweisverfahrens (vergl. 2) liefert den Satz:

„In einem System von Größen $r_{\lambda\mu}$ ($0 \leq r_{\lambda\mu} < k$; λ, $\mu = 1, 2, \ldots$) seien ν^2 dieser Größen $r_{\lambda\mu}$ (λ, $\mu = 1, 2, \ldots \nu$) beliebig gegeben, und es gelte der Algorithmus

$$\alpha^\nu r_{\lambda\mu} - \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1} r_{\lambda+1,\mu} + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2} r_{\lambda+2,\mu} - \cdots \pm r_{\lambda+\nu,\mu} = ka_{\lambda\mu}$$

für alle positiven ganzen Werte von λ und μ. Besteht alsdann der Algorithmus

$$\alpha'^{\nu} r'_{\mu\lambda} - \binom{\nu}{1}\alpha'^{\nu-1} r'_{\mu+1,\lambda} + \binom{\nu}{2}\alpha'^{\nu-2} r_{\mu+2,\lambda} - \cdots \pm r'_{\mu+\nu,\lambda} = k a'_{\mu\lambda},$$

wo $r'_{\mu\lambda} = r_{\lambda\mu}$ ist, für $\lambda = 1, 2, \ldots \nu$, aber für alle Werte von μ (was bei der gemachten Voraussetzung stets in eindeutiger Weise zu ermöglichen ist), so gilt er überhaupt für alle positiven ganzen Werte von λ und μ."

Durch die vier willkürlich gewählten Reste $r_{11}, r_{21}, r_{12}, r_{22}$, sowie durch die Größen k, α und α' sind alle übrigen Reste des Systems (23), sofern für sie die Beziehungen (24) und (27) gelten sollen, eindeutig bestimmt. Wir wollen nun unter dieser Voraussetzung zunächst eine Beziehung ableiten, die $r_{\lambda\mu}$ in independenter Form aus jenen Größen berechnen lehrt. Zu diesem Zwecke schreiben wir Gleichung (20) in der Form:

$$r_\lambda = \alpha^{\lambda-1} r_1 - (\lambda-1)\alpha^{\lambda-2}(\alpha r_1 - r_2) + k A'_{\lambda-1} \tag{28}$$
$$[A'_{\lambda-1} = (\lambda-2)\alpha^{\lambda-3} a_1 + (\lambda-3)\alpha^{\lambda-4} a_2 + \cdots + a_{\lambda-2}].$$

Auf Gleichung (24) angewendet, liefert (28) zunächst

$$r_{\lambda\mu} = \alpha^{\lambda-1} r_{1\mu} - (\lambda-1)\alpha^{\lambda-2}(\alpha r_{1\mu} - r_{2\mu}) + k A'_{\lambda-1,\mu}.$$

Indem man hierin noch für $r_{1\mu} = r'_{\mu 1}$, $r_{2\mu} = r'_{\mu 2}$ die ihnen vermöge der Gleichung

$$r'_{\mu\lambda} = \alpha'^{\mu-1} r'_{1\lambda} - (\mu-1)\alpha'^{\mu-2}(\alpha r'_{1\lambda} - r'_{2\lambda}) + k A''_{\mu-1,\lambda}$$

zukommenden Werte setzt, erhält man die gewünschte Beziehung

$$\begin{aligned} r_{\lambda\mu} = \alpha^{\lambda-2}\alpha'^{\mu-2}[&\alpha\alpha' r_{11} - (\lambda-1)\alpha'(\alpha r_{11} - r_{21}) - (\mu-1)\alpha(\alpha' r_{11} - r_{12}) \\ &+ (\lambda-1)(\mu-1)(\alpha\alpha' r_{11} - \alpha r_{12} - \alpha' r_{21} + r_{22})] + k B_{\lambda\mu}, \end{aligned} \tag{29}$$

wo

$$B_{\lambda\mu} = \alpha^{\lambda-1} A''_{\mu-1,\lambda} - (\lambda-1)\alpha^{\lambda-2}(\alpha A''_{\mu-1,1} - A'_{\mu-1,2}) + A'_{\lambda-1,\mu}.$$

Wenn man symbolisch $r_{\lambda\mu} = r_\lambda R_\mu$ setzt, so läßt sich Gleichung (29) in der Form schreiben:

$$r_{\lambda\mu} \equiv \alpha^{\lambda-2}\alpha'^{\mu-2}[\alpha r_1 - (\lambda-1)(\alpha r_1 - r_2)]\cdot[\alpha' R_1 - (\mu-1)(\alpha' R_1 - R_2)] \pmod{k} \tag{30}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, in welchem $r_{11} = 0$, $r_{12} = 0$, $r_{21} = 0$; hier ist

$$r_{\lambda\mu} \equiv (\lambda-1)(\mu-1)\alpha^{\lambda-2}\alpha'^{\mu-2} r_{22} \pmod{k}. \tag{31}$$

6. Die Reste $r_{\lambda\mu}$ kommen in einer Reihe von Verbindungen vor, die für unsere weiteren Entwicklungen von Bedeutung sind. Im folgenden soll daher einiger derselben Erwähnung geschehen.

Es möge zunächst der Ausdruck $\alpha\alpha' r_{\lambda\mu} - \alpha r_{\lambda,\mu+1} - \alpha' r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+1,\mu+1}$

betrachtet werden. Mit Hilfe der symbolischen Kongruenz (30) ergibt sich nach leichter Rechnung:

$$(32) \quad \begin{cases} \alpha\alpha' r_{\lambda\mu} - \alpha r_{\lambda,\mu+1} - \alpha' r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+1,\mu+1} \\ \equiv \alpha^{\lambda-1}\alpha'^{\mu-1}(\alpha\alpha' r_{11} - \alpha r_{12} - \alpha' r_{21} + r_{22}) \pmod{k}. \end{cases}$$

Setzt man abkürzend

$$s_{11} \equiv \alpha\alpha' r_{11} - \alpha r_{12} - \alpha' r_{21} + r_{22} \pmod{k}, \qquad (0 \leq s_{11} < k)$$

so kann (32) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(33) \quad \alpha\alpha' r_{\lambda\mu} - \alpha r_{\lambda,\mu+1} - \alpha' r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+1,\mu+1} = s_{\lambda\mu} + k v_{\lambda\mu}.$$

Dabei bedeuten die Größen $s_{\lambda\mu}$ (vgl. Zeitschr. f. Math. und Phys., Bd. 37, S. 333 Gleich. 10) die Reste des im Zahlensysteme (α, α') dargestellten Bruches s_{11}/k, während die $v_{\lambda\mu}$ gewisse noch näher zu bestimmende (positive oder negative) ganze Zahlen vorstellen. Analog hat man

$$(34) \quad \alpha\alpha' r'_{\mu\lambda} - \alpha' r'_{\mu,\lambda+1} - \alpha r'_{\mu+1,\lambda} + r'_{\mu+1,\lambda+1} = s'_{\mu\lambda} + k v'_{\mu\lambda},$$

wo die $s'_{\mu\lambda}$ die Reste des im Systeme (α', α) dargestellten Bruches $\frac{s'_{11}}{k}\left(=\frac{s_{11}}{k}\right)$ sind. Da die linken Seiten der Gleichungen (33) und (34) identisch sind, so folgt ohne weiteres:

$$(35) \quad s_{\lambda\mu} = s'_{\mu\lambda}, \quad v_{\lambda\mu} = v'_{\mu\lambda}.$$

Falls $s_{11} = 0$ ist, sind sämtliche $s_{\lambda\mu} = s'_{\mu\lambda} = 0$; aus Gleichung (33) ergibt sich sodann:

„Wenn der Ausdruck $\alpha\alpha' r_{11} - \alpha r_{12} - \alpha' r_{21} + r_{22}$ durch k teilbar ist, so gilt ein Gleiches für den Ausdruck $\alpha\alpha' r_{\lambda\mu} - \alpha r_{\lambda,\mu+1} - \alpha' r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+1,\mu+1}$, und zwar für alle positiven ganzen Werte von λ und μ."

Um über die Natur der Größen $v_{\lambda\mu}$ einen vorläufigen Aufschluß zu erhalten, schreiben wir Gleichung (33) in der Form

$$(36) \quad \alpha'(\alpha r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+1,\mu}) - (\alpha r_{\lambda,\mu+1} - r_{\lambda+1,\mu+1}) = s_{\lambda\mu} + k v_{\lambda\mu}.$$

Nach **1.** kann man dann setzen:

$$(37) \quad \alpha r_{\lambda\mu} - r_{\lambda+1,\mu} = k h_{\lambda\mu} - m_{\lambda\mu} \qquad (0 \leq h_{\lambda\mu} \leq \alpha,\ 0 \leq m_{\lambda\mu} < k);$$

dadurch nimmt (36) die Gestalt an:

$$(38) \quad k v_{\lambda\mu} = k(\alpha' h_{\lambda\mu} - h_{\lambda,\mu+1}) - (\alpha' m_{\lambda\mu} - m_{\lambda,\mu+1} + s_{\lambda\mu}).$$

Man darf also

$$(39) \quad \alpha' m_{\lambda\mu} - m_{\lambda,\mu+1} + s_{\lambda\mu} = k f_{\lambda\mu}$$

schreiben; zugleich ist ersichtlich, daß bei $s_{11} > 0$ nicht schon $\alpha' m_{\lambda\mu} - m_{\lambda,\mu+1}$ den Teiler k besitzen kann. Aus (39) folgt, wenn gleichzeitig $s'_{\mu\lambda}$ für $s_{\lambda\mu}$ gesetzt wird:

$$(\alpha'^2 m_{\lambda\mu} - 2\alpha' m_{\lambda,\mu+1} + m_{\lambda,\mu+2}) + (\alpha' s'_{\mu\lambda} - s'_{\mu+1,\lambda}) = k(\alpha' f_{\lambda\mu} - f_{\lambda,\mu+1}).$$

Der Ausdruck $\alpha' s'_{\mu\lambda} - s'_{\mu+1,\lambda}$ ist, der Bedeutung der Größen $s'_{\mu\lambda}$ zufolge, durch k teilbar. Daher muß auch $\alpha'^2 m_{\lambda\mu} - 2\alpha' m_{\lambda,\mu+1} + m_{\lambda,\mu+2}$ den Teiler k enthalten. Es darf somit wiederum nach **1.** geschrieben werden:

$$(40) \qquad \alpha' m_{\lambda\mu} - m_{\lambda,\mu+1} = k g'_{\mu\lambda} - n'_{\mu\lambda}. \qquad (0 \leqq g'_{\mu\nu} \leqq \alpha',\ 0 \leqq n'_{\mu\lambda} < k)$$

Durch Vergleichung ergibt sich aus (39) und (40) sofort:

$$(41) \qquad f_{\lambda\mu} = g'_{\mu\lambda}, \quad n'_{\mu\lambda} = s_{\lambda\mu} = s'_{\mu\lambda}.$$

Unter diesen Umständen folgt aus (38):

$$(42) \qquad v_{\lambda\mu} = \alpha' h_{\lambda\mu} - h_{\lambda,\mu+1} - g'_{\mu\lambda}.$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$(43) \qquad v'_{\mu\lambda} = \alpha h'_{\mu\lambda} - h'_{\mu,\lambda+1} = g_{\lambda\mu}. \qquad (0 \leqq h'_{\mu\lambda} \leqq \alpha',\ 0 \leqq g_{\lambda\mu} \leqq \alpha)$$

Wir gelangen somit zu dem folgenden Resultate:

„*Es seien* α, α', k, *sowie vier willkürlich gewählte Reste* r_{11}, r_{21}, r_{12}, r_{22} ($\geqq 0$ *und* $< k$) *gegeben, und es werde*

$$s_{11} \equiv \alpha\alpha' r_{11} - \alpha r_{12} - \alpha' r_{21} + r_{22} \pmod{k}$$

gesetzt ($0 \leqq s_{11} < k$). *Bildet man alsdann (was immer in eindeutiger Weise geschehen kann) ein System von Resten* $r_{\lambda\mu} = r'_{\mu\lambda}$, *für welche die Algorithmen bestehen:*

$$\alpha^2 r_{\lambda\mu} - 2\alpha r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+2,\mu} = k a_{\lambda\mu}, \quad \alpha'^2 r'_{\mu\lambda} - 2\alpha' r'_{\mu+1,\lambda} + r'_{\mu+2,\lambda} = k a'_{\mu\lambda},$$

wobei die $r_{\lambda\mu}$ *der Bedingung* $0 \leqq r_{\lambda\mu} < k$ *genügen, während die* $a_{\lambda\mu}$ *und* $a'_{\mu\lambda}$ *gewisse (positive oder negative) ganze Zahlen bedeuten, so darf man*

$$\alpha\alpha' r_{\lambda\mu} - \alpha r_{\lambda,\mu+1} - \alpha' r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+1,\mu+1}$$
$$= s_{\lambda\mu} + k(\alpha' h_{\lambda\mu} - h_{\lambda,\mu+1} - g'_{\mu\lambda}) = s'_{\mu\lambda} + k(\alpha h'_{\mu\lambda} - h'_{\mu,\lambda+1} - g_{\lambda\mu})$$

setzen. Hierin sind die $s_{\lambda\mu}$ *bezw.* $s'_{\mu\lambda}$ *die Reste des Bruches* $\frac{s_{11}}{k} = \frac{s'_{11}}{k}$ *in den Zahlensystemen* (α, α') *bezw.* (α', α); *die* $h_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\mu}$, $h'_{\mu\lambda}$, $g'_{\mu\lambda}$ *sind noch näher zu besprechende Größen, welche den Bedingungen*

$$0 \leqq h_{\lambda\mu} \leqq \alpha, \ 0 \leqq g_{\lambda\mu} \leqq \alpha, \ 0 \leqq h'_{\mu\lambda} \leqq \alpha', \ 0 \leqq g'_{\mu\lambda} \leqq \alpha'$$

Genüge leisten, und für welche der Algorithmus besteht:

$$\alpha' h_{\lambda\mu} - h_{\lambda,\mu+1} - g'_{\mu\lambda} = \alpha h'_{\mu\lambda} - h'_{\mu,\lambda+1} - g_{\lambda\mu}.\text{“} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots)$$

Die arithmetische Bedeutung der $h_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\mu}$, $h'_{\mu\lambda}$, $g'_{\mu\lambda}$ soll in einem besonderen Aufsatze auseinandergesetzt werden.

Als zweiter Ausdruck sei $\alpha^2 r_{\lambda,\mu+2} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + \alpha'^2 r_{\lambda+2,\mu}$ (der quadratischen Form entsprechend) erwähnt. Setzt man in Gleichung (24) $\mu + 2$ für μ, in (33) $\lambda + 1$, $\mu + 1$ an Stelle von λ, μ und in (27) $\lambda + 2$ anstatt λ, multipliziert sodann die drei entstehenden Gleichungen mit bezw. 1, -2, 1 und addiert, so erhält man:

$$(44)\quad \begin{aligned} \alpha^2 r_{\lambda,\mu+2} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + \alpha'^2 r_{\lambda+2,\mu} &= -2 s_{\lambda+1,\mu+1} \\ &+ k(a_{\lambda,\mu+2} - 2 v_{\lambda+1,\mu+1} + a'_{\mu,\lambda+2}). \end{aligned}$$

Bei $s_{11} = 0$ ist auch $s_{\lambda+1,\mu+1} = 0$. Also:

„*Unter den früheren Voraussetzungen hat man für alle positiven ganzen Werte von* λ, μ:

$$\begin{aligned} \alpha^2 r_{\lambda,\mu+2} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + \alpha'^2 r_{\lambda+2,\mu} &= -2 s_{\lambda+1,\mu+1} \\ &+ k(a_{\lambda,\mu+2} - 2 v_{\lambda+1,\mu+1} + a'_{\mu,\lambda+2}). \end{aligned}$$

Ist insbesondere $\alpha\alpha' r_{11} - \alpha r_{12} - \alpha' r_{21} + r_{22}$ *durch* k *teilbar, so gilt ein Gleiches auch für* $\alpha^2 r_{\lambda,\mu+2} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + \alpha'^2 r_{\lambda+2,\mu}$."

Zum Schlusse betrachten wir noch den Ausdruck

$$\alpha^2 \alpha'^2 r_{\lambda\mu} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + r_{\lambda+2,\mu+2}.$$

Aus (24) und (27) ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha^2 r_{\lambda\mu} - 2\alpha r_{\lambda+1,\mu} + r_{\lambda+2,\mu} &= k a_{\lambda\mu} \\ \alpha'^2 r'_{\mu,\lambda+1} - 2\alpha' r'_{\mu+1,\lambda+1} + r'_{\mu+2,\lambda+1} &= k a'_{\mu,\lambda+1} \\ \alpha^2 r_{\lambda,\mu+2} - 2\alpha r_{\lambda+1,\mu+2} + r_{\lambda+2,\mu+2} &= k a_{\lambda,\mu+2}. \end{aligned}$$

Multipliziert man dieselben der Reihe nach mit bezw. α'^2, 2α, 1 und addiert die entstehenden Gleichungen, so folgt:

$$(45)\quad \begin{aligned} (\alpha^2\alpha'^2 r_{\lambda\mu} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + r_{\lambda+2,\mu+2}) + (\alpha^2 r_{\lambda,\mu+2} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} \\ + \alpha'^2 r_{\lambda+2,\mu}) = k(\alpha'^2 a_{\lambda\mu} + 2\alpha a'_{\mu,\lambda+1} + a_{\lambda,\mu+2}). \end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung von (44) können wir also sagen:

„*Wenn die früheren Voraussetzungen gemacht werden, so besteht für alle positiven ganzen Werte von* λ, μ *die Gleichung (45), der man auch die Form geben kann:*

$$(46)\quad \begin{aligned} \alpha^2\alpha'^2 r_{\lambda\mu} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + r_{\lambda+2,\mu+2} &= 2 s_{\lambda+1,\mu+1} \\ &+ k(\alpha'^2 a_{\lambda\mu} + 2\alpha a'_{\mu,\lambda+1} - a'_{\mu,\lambda+2} + 2 v_{\lambda+1,\mu+1}). \end{aligned}$$

Ist insbesondere $\alpha\alpha' r_{11} - \alpha r_{12} - \alpha' r_{21} + r_{22}$ *durch* k *teilbar, so gilt ein Gleiches für* $\alpha^2\alpha'^2 r_{\lambda\mu} - 2\alpha\alpha' r_{\lambda+1,\mu+1} + r_{\lambda+2,\mu+2}$.

Darmstadt, Januar 1903.

Über senäre Raumkollineationen.

Von Rudolf Krause in Straßburg i. E.

Der folgende Aufsatz ist ein Auszug aus der Inaug.-Dissertation „Über senär zyklische Kollineationen im Raume“ (Straßburg (Els.) 1903), auf die wir zur näheren Begründung der angeführten Sätze verweisen.

Eine senär zyklische Raumkollineation φ ist eine Transformation, deren sechsmalige Anwendung auf die Identität führt; dieses Verhalten findet seinen Ausdruck in der symbolischen Gleichung $\varphi^6 = 1$. Eine solche Kollineation φ ordnet die Elemente eines räumlichen Systems, insbesondere dessen Punkte, i. a. zu Gruppen zu je sechs, zu „Zykeln“ an, die wieder in Teilgruppen zerfallen, welche einfacheren zyklischen Kollineationen, und zwar involutorischen und ternären, angehören, wie die Umformung der Gleichung $\varphi^6 = 1$ in $(\varphi^2)^3 = 1$ und $(\varphi^3)^2 = 1$ zeigt. Wir können schon aus der Betrachtung der verschiedenen Lagebeziehungen, welche die Punkte eines Zykels aufweisen können, einen Schluß auf die Anzahl und die charakteristischen Merkmale der möglichen senären Kollineationen ziehen. Es lassen sich hinsichtlich der relativen Lage der Punkte eines Zykels folgende fünf Fälle unterscheiden, die wir in der Reihenfolge anführen, in welcher der allgemeinere Fall dem speziellern vorangeht.

1. Allgemeinster Fall: Die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 bilden ein windschiefes Sechseck und zwar in der Weise, daß keine vier Eckpunkte in einer Ebene liegen. Die Hauptdiagonalen sind zu einander windschief.

2. Die 3 Hauptdiagonalen gehen durch einen Punkt, je zwei Paare gegenüberliegender Eckpunkte fallen also in eine Ebene.

3. Das Sechseck 123456 ist ein ebenes.

4. Die 6 Eckpunkte liegen zu je dreien auf zwei windschiefen Geraden g, g_1, und zwar die Punkte 1, 3, 5 auf g, die Punkte 2, 4, 6 auf g_1.

5. Die 6 Punkte liegen sämtlich auf ein und derselben Geraden. Das Sechseck degeneriert.

Es ergeben sich also 5 verschiedene Arten senärer Kollineationen, für die ein Existenzbeweis noch zu führen ist. Um für die verschiedenen Kollineationen eine kurze Bezeichnung zu haben, versehen wir das Zeichen φ mit einem Index, der auf die Zugehörigkeit zu der betreffenden Klasse hinweist.

Wir unterscheiden demgemäß folgende 5 Arten:

1. windschiefe 1. Art φ_1,
2. windschiefe 2. Art φ_2,
3. planare φ_3,
4. windschiefe 3. Art oder *halbgescharte*. Diese Art zerfällt, wie sich später ergibt, in zwei Unterarten: die hyperbolische halbgescharte Kollineation φ_4 und die elliptische halbgescharte φ_4';
5. gescharte φ_5.

Wir führen zum Nachweise der Existenz dieser Arten die senären Kollineationen auf einfachere zyklische Kollineationen zurück, nämlich auf ternäre und involutorische. Auch dieser Weg führt uns zu den erwähnten verschiedenen Arten senärer Kollineationen.

Ist nämlich φ eine senär zyklische Kollineation, also $\varphi^6 = 1$, so ist $\varphi = \varphi^7 = \varphi^3 \cdot \varphi^4 = \varphi^4 \cdot \varphi^3$; hierin ist φ^4 eine ternär zyklische Kollineation und φ^3 eine mit dieser vertauschbare Involution. Es läßt sich also eine senäre Kollineation aus zwei vertauschbaren Verwandtschaften, einer Involution und einer ternären Kollineation, zusammensetzen.

Wir gelangen also zu den verschiedenen Arten senärer Kollineationen, indem wir alle möglichen Arten ternärer Kollineationen mit allen Arten von Involutionen komponieren; zu beachten ist dabei die Einschränkung, daß die zu komponierenden Verwandtschaften vertauschbar sein müssen.

Im Raume lassen sich zwei Arten ternärer Kollineationen unterscheiden, die planare und die gescharte.[1]) Ferner existieren 2 Arten von Involutionen, nämlich die perspektive und die gescharte.

Die windschiefe senäre Kollineation φ_1 1. Art.

Aus einer planaren ternären Kollineation ψ und einer mit ihr vertauschbaren gescharten Involution ω, welche die Doppelgeraden u und v von ψ zu Doppelstrahlen hat, resultiert eine windschiefe senäre Kollineation φ_1 1. Art. Sind g_1, g_2, g_3 irgend drei zu u und v windschiefe Strahlen eines Tripels von ψ, so ist die Involution, welche die Strahlen der durch g_1, g_2, g_3 und u bestimmten und auch v enthaltenden linearen Kongruenz zu Doppelstrahlen hat, mit ψ vertauschbar. Die Geraden u und v sind die einzigen Doppelelemente der Kollineation φ_1, und zwar werden die Punkte von u und die Ebenen von v durch φ_1 involutorisch gepaart; ihre Involutionen sind elliptisch. Die Punkte von v und die Ebenen von u sind senär zyklisch gruppiert.

Alle übrigen Punktzykel bilden je ein windschiefes Sechseck, von

1) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. Leipzig 1892. Abt. II. Vortrag XI.

welchem keine vier Eckpunkte in eine Ebene fallen. Ihre Hauptdiagonalen, welche Doppelstrahlen der Involution ω sind, werden durch φ_1 ternär zyklisch gruppiert; die auf ihnen liegenden Gegenpunkte der für φ_1 invarianten Sechsecke sind Paare zugeordneter Punkte der elliptischen gescharten Involution ω.

Jede windschiefe senäre Kollineation φ_1 1. Art kann in jede andere derselben Art, insbesondere auch in die „rotatorische" ϱ_1 kollinear transformiert werden. Diese resultiert aus einer rotatorischen ternären planaren Kollineation ψ_ϱ, welche mit einer Drehung des Raumes um eine Achse u' durch 120^0 gleichbedeutend ist, und einer mit ψ_ϱ vertauschbaren gescharten Involution ω, welche die Doppelstrahlen u' und v' von ψ_ϱ zu Doppelstrahlen hat. Durch Drehung um u' ändert sich die Kollineation ϱ_1 nicht.

Für die windschiefe senäre Kollineation φ_1 sind einfach unendlich viele Flächen 2. Grades invariant. Sie bilden sowohl einen F^2-Büschel als eine Φ^2-Schar. Sie sind ausschließlich Regelflächen; auf jeder von ihnen sind die Strahlen der einen Schar durch φ_1 zu Tripeln angeordnet, während die Geraden der andern Schar zu Zykeln von je sechs Strahlen gruppiert sind. Die Geraden u und v sind reziproke Polaren bezüglich dieser Flächen, diese haben ∞^2 gemeinsame Poltetraeder.

Für φ_1 sind ∞^2 kubische Raumkurven invariant, und zwar geht durch jeden weder auf u noch auf v gelegenen Punkt eine einzige von ihnen. Auf jeder in φ_1 sich selbst entsprechenden Regelfläche 2. Ordnung liegen ∞^1 dieser kubischen Raumkurven. Diese sind Nullkurven eines für φ_1 invarianten linearen Strahlenkomplexes; sie haben die Geraden der einen Regelschar, die ternär zyklisch gruppiert sind, zu gemeinsamen Sehnen. Diese sind zugleich gemeinsame Achsen von ∞^1 invarianten kubischen Ebenenbüscheln, deren Anschmiegungskurven auf einer andern invarianten Regelfläche 2. Grades liegen. Die Gerade u ist eine uneigentliche Sehne aller invarianten k^3 und die Gerade v eine uneigentliche Achse der kubischen Ebenenbüschel, welche diesen Raumkurven 3. Ordnung sich anschmiegen.

Die windschiefe senäre Kollineation φ_2 2. Art.

Aus einer planaren ternären Kollineation ψ, welche die Punkte einer Geraden u zu Doppelpunkten und die Ebenen einer Geraden v zu Doppelebenen hat, und einer perspektiven Involution ω, deren Involutionszentrum A auf u liegt und deren Involutionsebene α durch v geht, resultiert eine senäre windschiefe Kollineation φ_2 zweiter Art. Diese läßt die Punkte A und $\alpha \cdot u\ (= B)$, die Geraden u und v, ferner

die Ebenen α und $\overline{Av}$ $(=\beta)$ ungeändert. Andere reelle Doppelelemente kommen in φ_2 nicht vor. Die Punkte von u und die Ebenen von v werden durch φ_2 involutorisch gepaart, und zwar sind ihre Involutionen hyperbolische mit den Doppelpunkten A und B bezw. den Doppelebenen α und β. Die Punkte und Strahlen der Ebene α, sowie die Ebenen und Strahlen des Punktes A sind ternär zyklisch gruppiert; überdies bilden die Punkte von v und die Ebenen von u für φ_2 invariante Tripel. Die Ebene β ist dagegen Trägerin eines senär zyklischen Feldes, und der Punkt B ist Mittelpunkt eines senär zyklischen Bündels. Alle übrigen Punktzykel bilden räumliche Sechsecke, deren Hauptdiagonalen sämtlich durch den Doppelpunkt A gehen. Die Gegenkanten eines jeden der Sechsecke schneiden sich in 3 Punkten der Doppelebene α, die ein Punkttripel von φ_2 bilden.

Aus einer rotatorischen ternären planaren Kollineation ψ_ϱ und einer perspektiven Involution ω, deren Zentrum auf der Rotationsachse u' von ψ_ϱ liegt und deren Involutionsebene zu u' normal ist, resultiert eine rotatorische senäre Kollineation. Diese nimmt eine besonders anschauliche Form an, wenn das Zentrum von ω auf u' in unendliche Ferne rückt. Diese rotatorische senäre Kollineation bezeichnen wir mit ϱ_2. Sie resultiert also aus einer Drehung des Raumes um eine Achse u', wenn der Drehungswinkel 120^0 beträgt, und einer Spiegelung an einer zu u' normalen Ebene α'. In diese rotatorische senäre Kollineation ϱ_2 kann die allgemeine φ_2 durch Kollineation verwandelt werden.

Für φ_2 sind die Flächen eines F^2-Bündels invariant. Dieser ist ein spezieller: seine Flächen berühren sich in den imaginären Doppelpunkten von v. Er enthält unter anderem die Ebenenpaare der Involution v, sowie zwei Büschel konzentrischer Kegel 2. Ordnung mit den Mittelpunkten A und B. Die Strahlen der Kegel A werden ternär, die der Kegel B senär zyklisch durch φ_2 gruppiert. Durch jeden weder auf u noch auf v gelegenen Punkt P des Raumes geht ein aus invarianten Flächen bestehender F^2-Büschel, dessen Grundkurve aus zwei Kegelschnitten besteht, die in dem durch P bestimmten Ebenenpaar der Involution v liegen. Der F^2-Büschel enthält ∞^1 Regelflächen 2. Ordnung; durch φ_2 werden die beiden Regelscharen einer solchen Regelfläche in einander übergeführt. Die Fläche enthält die Kanten von ∞^1 auf ihr liegenden Punktzykeln. — Für alle invarianten Flächen 2. Ordnung sind u und v reziproke Polaren, und zwar ist A Pol von α und B Pol von β. Die Flächen haben ∞^1 gemeinsame Poltetraeder; von diesen fallen stets zwei Eckpunkte nach A und B, während die übrigen Eckpunkte eine elliptische Involution auf v bilden.

Die beiden Doppelebenen α und β enthalten je einen Büschel in-

varianter Kegelschnitte; diese berühren sich in den imaginären Doppelpunkten von v. Die in jeder der beiden Ebenen liegenden invarianten Kegelschnitte haben ∞^1 gemeinsame Poldreiecke; von diesen fällt ein Eckpunkt in den Doppelpunkt der Ebene; die übrigen Eckpunkte gehören der erwähnten elliptischen Involution an.

Für die rotatorische Kollineation ϱ_2 ist jede Rotationsfläche 2. Ordnung invariant, welche u' zur Rotationsachse und α' zur Symmetrie-Ebene hat. Jedes Kreispaar, das durch Rotation eines Punktes P und seines Spiegelbildes P' bezgl. α' um u' beschrieben wird, ist für ϱ_2 invariant. Es entsprechen somit alle konzentrischen Kreise, die in α' liegen und ihren Mittelpunkt auf u' haben, sich selbst.

Invariante, irreduzible kubische Raumkurven und biquadratische 1. Art kommen in der senären Kollineation φ_2 nicht vor. Jede sich selbst entsprechende Raumkurve 4. Ordnung zerfällt in zwei Kegelschnitte, die in einem Ebenenpaar der Involution v liegen. Jeder Punkt des Raumes bestimmt ein solches Kegelschnittpaar; es gibt deren ∞^2.

Die planare senäre Kollineation φ_3.

Aus der planaren ternären Kollineation ψ und der gescharten Involution ω, welche die Doppelgeraden u und v von ψ zu Involutionsachsen hat, resultiert eine planare senäre Kollineation φ_3. Diese läßt die beiden Geraden u und v, sowie jeden Punkt von u und jede Ebene von v ungeändert. Die Punkte von v und die Ebenen von u werden durch φ_3 zu Tripeln gruppiert. Auf der Geraden v liegen keine reellen Doppelpunkte. Die Ebenen des Büschels v enthalten senär zyklische Felder der Kollineation φ_3; jeder Punktzykel liegt mit v in einer solchen Doppelebene. Die allgemeine Kollineation φ_3 kann in die rotatorische ϱ_3 kollinear transformiert werden; diese ist gleichbedeutend mit einer Drehung des Raumes um eine Achse u' durch 60^0.

Für die planare senäre Kollineation φ_3 ist jede Fläche 2. Ordnung invariant, welche einen Punktzykel enthält und u und v zu reziproken Polaren hat. Die für φ_3 invarianten Flächen 2. Ordnung bilden ein spezielles F^2-Gebüsch; sie berühren sich in den imaginären Doppelpunkten von v. Durch φ_3 werden die Strahlen einer jeden Regelschar einer invarianten Regelfläche 2. Ordnung senär zyklisch gruppiert. Durch jeden Punkt gehen ∞^2 invariante Regelflächen 2. Ordnung. Jeder Punkt von u ist Mittelpunkt von ∞^1 für φ_3 invarianten Kegeln 2. Ordnung. Diese bilden einen Büschel; ihre Strahlen werden durch φ_3 senär zyklisch gruppiert.

In jeder Ebene durch v liegen ∞^1 Kegelschnitte, die in φ_3 sich selbst entsprechen; sie bilden sowohl einen Büschel als eine Schar und

haben ∞^1 gemeinsame Poldreiecke. Ein Eckpunkt dieser Poldreiecke fällt mit dem auf u liegenden Doppelpunkt der Ebene zusammen, die übrigen Eckpunkte bilden Punktepaare der elliptischen Involution auf v, welche die imaginären Doppelpunkte von v zu Ordnungspunkten hat. Die Kegelschnitte berühren sich in diesen imaginären Punkten.

Die halbgescharten senären Kollineationen.

Eine allgemeine halbgescharte senäre Kollineation läßt sich auf folgende Weise herstellen. Sei eine involutorische Regelschar gegeben, von welcher p, p_1 und q, q_1 zwei Strahlenpaare und a_1, a_2, a_3 drei beliebige Leitstrahlen seien. Dann ist durch die Beziehung $a_1 a_2 a_3 p p_1 q \barwedge a_2 a_3 a_1 p_1 p q_1$ eine halbgescharte Kollineation bestimmt. Die Doppelstrahlen der involutorischen Regelschar sind Doppelgeraden derselben. Je nachdem diese reell oder imaginär sind, ist die halbgescharte Kollineation hyperbolisch oder elliptisch.

a) Die hyperbolische halbgescharte senäre Kollineation φ_4.

Eine solche resultiert aus einer ternären gescharten Kollineation ψ' und der gescharten Involution ω, welche irgend zwei Doppelstrahlen g und h von ψ' zu Achsen hat. Diese sind die einzigen Doppelelemente von φ_4 und Träger von Punkt- und Ebenentripeln. Durch φ_4 werden die Strahlen einer bestimmten linearen Kongruenz Γ, nämlich die Doppelstrahlen von ψ', involutorisch gepaart. Ein beliebiger Punktzykel 123456 ist in der Weise auf ein Strahlenpaar aa_1 von Γ verteilt, daß die Punkte 1, 3, 5 auf a, die übrigen drei 2, 4, 6 auf a_1 liegen.

Einen Sonderfall dieser halbgescharten Kollineation bildet die rotatorische ϱ_4. Diese resultiert aus einer rotatorischen ternären gescharten Kollineation ψ'_ϱ und einer Spiegelung an deren Rotationsachse r. Die Doppelelemente von ϱ_4 sind r und die Gerade, welche in den zu r normalen Ebenen unendlich fern liegt. Die allgemeine Kollineation φ_4 kann in die rotatorische ϱ_4 kollinear verwandelt werden.

Die allgemeine senäre Kollineation φ_4 läßt 2 Büschel von Flächen 2. Ordnung, die zugleich als Φ^2-Scharen aufzufassen sind, ungeändert. Die Flächen des einen Büschels durchdringen sich in den Doppelgeraden g und h. Auf jeder von ihnen sind die Geraden der Schar, welche g und h enthält, durch φ_4 involutorisch gepaart; die Strahlen der Leitschar sind ternär zyklisch gruppiert; sie sind die Hauptdiagonalen der auf der Fläche gelegenen Punktzykel. Die Flächen des zweiten F^2-Büschels haben g und h zu reziproken Polaren. Die Erzeugenden der einen Schar auf jeder dieser Flächen werden durch φ_4 involutorisch gepaart; ihre Involution ist elliptisch. Dagegen sind die Strahlen der Leitschar

zu Zykeln von je sechs Strahlen gruppiert. Die Flächen dieses F^2-Büschels haben ∞^2 gemeinsame Poltetraeder, deren Eckpunkte auf g und h liegen.

Durch einen Punkt P geht je eine Fläche der beiden F^2-Büschel; diese beiden Flächen schneiden sich in dem Gegengeradenpaare, das durch P bestimmt ist. Jede Fläche des einen F^2-Büschels schneidet jede Fläche des andern Büschels in einem solchen Paar von Geraden.

In der rotatorischen halbgescharten Kollineation φ_4 existieren ebenfalls 2 Büschel invarianter Regelflächen 2. Ordnung. Der eine besteht aus Rotationsflächen mit der gemeinsamen Rotationsachse r, der andere aus gleichseitigen Paraboloiden, die sich in r durchdringen.

b) Die elliptische halbgescharte Kollineation φ_4'.

Aus einer gescharten ternären Kollineation ψ' und einer elliptischen gescharten Involution ω, welche die Doppelstrahlen von ψ' involutorisch paart, resultiert eine elliptische halbgescharte senäre Kollineation φ_4'. Diese hat zwei reelle Doppelgeraden g' und h'; reelle Doppelpunkte und Doppelebenen sind in φ_4' nicht vorhanden. Die Doppelgeraden g' und h' sind Träger senärer Punkt- und Ebenenzykel.

Eine elliptische halbgescharte rotatorische Kollineation ϱ_4' erhalten wir auf folgende Weise. Wir gruppieren die eine Regelschar eines Rotationshyperboloides R^2 ternär zyklisch, indem wir sie um die Rotationsachse r' sukzessive um 120° und 240° drehen. Die andere Regelschar machen wir zu einer involutorischen, indem wir ihre Strahlen an r' spiegeln. Ist a_1, a_2, a_3 ein Strahlentripel der ersten Regelschar und sind p, p_1 und q, q_1 zwei Strahlenpaare der involutorischen Leitschar, so ist die Kollineation $a_1 a_2 a_3 p p_1 q \barwedge a_2 a_3 a_1 p_1 p q_1$ eine elliptische halbgescharte rotatorische.

Die elliptische halbgescharte senäre Kollineation φ_4' läßt zwei Büschel von Regelflächen 2. Ordnung, die zugleich Φ^2-Scharen sind, ungeändert. Andere reelle Doppelflächen 2. Grades treten nicht auf. Die Flächen des einen F^2-Büchels haben die Doppelgeraden g' und h' gemein. Auf jeder dieser Regelflächen sind die Strahlen der Schar, welcher g' und h' angehören, durch φ_4' involutorisch gepaart; die Leitschar ist dagegen durch φ_4' senär zyklisch auf sich bezogen. Die Flächen des andern F^2-Büschels haben keine reellen Punkte gemein. Die Geraden g' und h' sind bezüglich ihrer reziproke Polaren und die Gegenpunkte der auf ihnen liegenden Zykel Paare konjugierter Punkte. Die Flächen haben ∞^2 gemeinsame Poltetraeder. Die Strahlen der einen Regelschar von einer dieser Flächen werden durch φ_4' involutorisch gepaart, die der Leitschar ternär zyklisch gruppiert.

Die gescharte senäre Kollineation φ_5.

Aus einer ternären gescharten Kollineation ψ' und der gescharten Involution ω, deren Doppelstrahlen mit denen von ψ' zusammenfallen, resultiert eine gescharte senäre Kollineation φ_5. Diese enthält ∞^2 Doppelgeraden, und zwar bilden diese eine lineare Kongruenz, deren Leitgeraden konjugiert-imaginäre Gerade 2. Art sind. Andere reelle Doppelelemente kommen in φ_5 nicht vor. Jeder Punktzykel von φ_5 besteht aus 6 Punkten, die allemal auf einer Doppelgeraden liegen.

Sei H^2 ein geradliniges Hyperboloid. Wir beziehen die eine Regelschar senär zyklisch auf sich selbst, etwa dadurch, daß wir die Punkte eines Kegelschnittes k^2, den eine beliebige Schnittebene mit H^2 gemein hat, senär zyklisch gruppieren. Dies geschieht am einfachsten dadurch, daß wir k^2 auf einen Kreis, welchem reguläre Sechsecke eingeschrieben sind, projektiv beziehen. Sind $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ sechs Strahlen eines solchen Zykels und sind p, q, r drei beliebige Strahlen der Leitschar, so ist durch die Beziehung $a_1 a_2 a_3 a_3 a_5 a_6 pqr \barwedge a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_1 pqr$ die senäre gescharte Kollineation φ_5 bestimmt.

Ist R^2 ein Rotationshyperboloid, so können wir die Strahlen der einen Regelschar senär zyklisch gruppieren, indem wir die Regelfläche R^2 durch eine zur Rotationsachse r normale Ebene in einem Kreise schneiden und diesem reguläre Sechsecke einschreiben. Dann sind die Punkte des Kreises und damit auch die durch sie gehenden Strahlen der einen Regelschar senär zyklisch gruppiert. Ist $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 a'_5 a'_6$ ein solcher Strahlenzykel und sind p', q', r' drei Leitstrahlen der Schar, so ist die Kollineation $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4 a'_5 a'_6 p' q' r' \barwedge a'_2 a'_3 a'_4 a'_5 a'_6 a_1 p' q' r'$ eine senäre gescharte und zwar eine rotatorische ϱ_5.

Jede für φ_5 invariante Fläche 2. Ordnung ist eine Regelfläche. Eine solche ist bestimmt durch irgend drei Doppelgeraden. Die Strahlen ihrer einen Regelschar sind Doppelstrahlen von φ_5; die Strahlen der andern Schar werden durch φ_5 senär zyklisch gruppiert. Überhaupt bleibt durch φ_5 jede Regelfläche erhalten, welche eine Schar von Doppelstrahlen enthält.

Sur quelques intégrales définies;

Par F. Gomes Teixeira à Porto.

1. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(x - a - ib)\, dx,$$

où b représente une quantité différente de zéro, a une grande importance dans la théorie de l'intégration des fonctions circulaires, comme on peut le voir en lisant les belles pages que Hermite a consacrées à cette doctrine dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* Dans cet important ouvrage l'éminent géomètre donne la formule

$$\int_0^{2\pi} \cot \tfrac{1}{2}(x - a - ib)\, dx = 2(b) i\pi, \tag{1}$$

où (b) représente une quantité égale à l'unité en valeur absolue et du signe de b. Il obtient cette valeur au moyen d'une méthode très élégante. Nous avons donné une autre démonstration de ce résultat, en nous fondant sur un théorème de Cauchy, très connu, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. VII, p. 220).

Dans la présente Note nous allons d'abord nous occuper une autre fois de cette formule, pour en donner une nouvelle démonstration, fondée sur l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)}\, dx = i\pi \sum_{n=1}^{n=m} A_n (b_n), \tag{2}$$

où $F(x)$ représente une fonction entière de degré m; $f(x)$ une autre de degré inférieur à $m - 1$; $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$, ..., $a_m + ib_m$ les racines de $F(x) = 0$, que nous supposons toutes inégales et imaginaires; A_1, A_2, ..., A_m les numérateurs des fractions simples dans lesquelles on peut décomposer $\frac{f(x)}{F(x)}$; et (b_n) une quantité égale à l'unité et du signe de b_n.

On démontre facilement cette égalité en généralisant l'analyse employée par Hermite (l. c., p. 289) pour l'établir dans le cas particulier où $f(x) = 1$ et $F(x) = (x - a_1 - ib_1)(x - a_2 - ib_2)$.

On a, en effet,

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \sum_{n=1}^{n=m} \frac{A_n}{x - a_n - ib_n},$$

et

$$\int \frac{dx}{x - a_n - ib_n} = \tfrac{1}{2}\log[(x - a_n)^2 + b_n^2] + i \operatorname{arctg}\frac{x - a_n}{b_n},$$

et par conséquent

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=m} A_n \log\frac{(\beta - a_n)^2 + b_n^2}{(\alpha - a_n)^2 + b_n^2}$$

$$+ i\sum_{n=1}^{n=m} A_n\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - a_n}{b_n}\right]$$

$$= \log\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{n=m} A_n + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=m} A_n \log\frac{\left(1 - \frac{a_n}{\beta}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\beta^2}}{\left(1 - \frac{a_n}{\alpha}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\alpha^2}}$$

$$+ i\sum_{n=1}^{n=m} A_n\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - a_n}{b_n}\right].$$

Mais, en vertu d'un théorème bien connu, on a

$$\sum_{n=1}^{n=m} A_n = 0.$$

Donc

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=m} A_n \log\frac{\left(1 - \frac{a_n}{\beta}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\beta^2}}{\left(1 - \frac{a_n}{\alpha}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\alpha^2}}$$

$$+ i\sum_{n=1}^{n=m} A_n\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - a_n}{b_n}\right].$$

En posant maintenant dans cette formule $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, on trouve immédiatement la formule (2), qu'on voulait démontrer.

Cela posé, nous allons déduire de l'égalité qu'on vient d'établir, l'égalité (1).

Nous avons d'abord

$$\int_0^{2\pi} \cot\tfrac{1}{2}(x - a - ib)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cot\frac{1}{2}(a + ib)\cot\frac{1}{2}x + 1}{\cot\frac{1}{2}(a + ib) - \cot\frac{1}{2}x}\,dx,$$

et, par conséquent, en posant $\cot\frac{1}{2}x = t$,

$$\int_0^{2\pi} \cot\tfrac{1}{2}(x - a - ib)\,dx = -2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\cot\frac{1}{2}(a + ib) + 1}{[t - \cot\frac{1}{2}(a + ib)][t^2 + 1]}\,dt.$$

Nous avons aussi

$$\frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)][t^2+1]} = \frac{A_1}{t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)} + \frac{A_2}{t+i} + \frac{A_3}{t-i},$$

où

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = -\tfrac{1}{2}, \qquad A_3 = -\tfrac{1}{2};$$

et

$$a_1 + ib_1 = \cot\tfrac{1}{2}(a+ib), \qquad a_2 + ib_2 = -i, \qquad a_3 + ib_3 = i.$$

En appliquant la formule (2) nous trouvons donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)][t^2+1]}\,dt = i\pi(b_1),$$

et par conséquent

$$\int_0^{2\pi} \cot\tfrac{1}{2}(x-a-ib)\,dx = -2i\pi(b_1).$$

Pour déterminer (b_1), remarquons qu'on a

$$a_1 + ib_1 = \cot\tfrac{1}{2}(a+ib) = \frac{2\sin a - i(e^b - e^{-b})}{\left(e^{-\frac{1}{2}b} + e^{\frac{1}{2}b}\right)^2 \sin^2\frac{1}{2}a + \left(e^{-\frac{1}{2}b} - e^{\frac{1}{2}b}\right)^2\cos^2\frac{1}{2}a},$$

et par conséquent

$$b_1 = \frac{e^{-b} - e^b}{\left(e^{-\frac{1}{2}b} + e^{\frac{1}{2}b}\right)^2 \sin^2\frac{1}{2}a + \left(e^{-\frac{1}{2}b} - e^{\frac{1}{2}b}\right)^2\cos^2\frac{1}{2}a}.$$

On voit donc que b_1 est positif quand $b < 0$ et négatif quand $b > 0$, et qu'on peut, par conséquent, écrire $(b_1) = -(b)$, et ensuite

$$\int_0^{2\pi} \cot\tfrac{1}{2}(x-a-ib)\,dx = 2i\pi(b).$$

2. On peut trouver au moyen d'une analyse semblable la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \cot\tfrac{1}{2}(x-a-ib)\,dx.$$

Nous avons, en effet,

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \sum_{n=1}^{n=m} A_n \log\beta + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=m} \log\left[\left(1-\frac{a_n}{\beta}\right)^2 + \frac{b_n^2}{\beta^2}\right]$$

$$- \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=m} A_n \log\left[(\alpha - a_n)^2 + b_n^2\right]$$

$$+ i\sum_{n=1}^{n=m} A_n\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta - a_n}{b_n} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - a_n}{b_n}\right],$$

et par conséquent, en ayant d'abord égard à l'identité $\sum_{n=1}^{n=m} A_n = 0$ et en posant ensuite $\alpha = 0$ et $\beta = \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{F(x)} dx = -\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=m} A_n \log(a_n^2 + b_n^2) + i\sum_{n=1}^{n=m} A_n\left[\tfrac{1}{2}\pi(b_n) + \operatorname{arctg}\frac{a_n}{b_n}\right].$$

En appliquant maintenant cette formule à la fonction

$$\frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)][t^2+1]},$$

on trouve

$$\int_0^\infty \frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)][t^2+1]} dt = -\tfrac{1}{2}\log(a_1^2+b_1^2) + i\left[\tfrac{1}{2}\pi(b_1) + \operatorname{arctg}\frac{a_1}{b_1}\right],$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)][t^2+1]} dt = -\tfrac{1}{2}\log\frac{e^{2b}-2\cos 2a+e^{-2b}}{(e^b-2\cos a+e^{-b})^2} - i\left[\tfrac{1}{2}\pi(b) - \operatorname{arctg}\frac{2e^b\sin a}{1-e^{2b}}\right].$$

Mais on a

$$\int_0^\pi \cot\tfrac{1}{2}(x-a-ib)dx = -2\int_0^\infty \frac{t\cot\frac{1}{2}(a+ib)+1}{[t-\cot\frac{1}{2}(a+ib)][t^2+1]} dt.$$

Donc

$$\int_0^\pi \cot\tfrac{1}{2}(x-a-ib)\,dx = \log\frac{e^{2b}-2\cos 2a+e^{-2b}}{(e^b-2\cos a+e^{-b})^2} + i\left[\pi(b) - 2\operatorname{arctg}\frac{2e^b\sin a}{1-e^{2b}}\right].$$

Porto, 4 mars 1904.

Zur Einführung in die normalen Koordinaten.

Von JAN DE VRIES in Utrecht.

1. Eine Ebene ε werde, in bezug auf ein orthogonales Raumkoordinatensystem, durch die Gleichung dargestellt:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \tag{1}$$

Eine Gerade g in ε ist alsdann durch Hinzunahme der homogenen Gleichung bestimmt:

$$Px + Qy + Rz = 0. \tag{2}$$

Werden nun die Koordinaten x, y, z durch Größen ersetzt, welche der Ebene ε angehören, so hat man ein Koordinatensystem in der Ebene, welches zunächst für jede Gerade eine homogene lineare Gleichung liefert.

Am einfachsten erreicht man dies durch Einführung der Abstände α, β, γ eines in ε belegenen Punktes von den Seiten a, b, c des Dreiecks, dessen Eckpunkte A, B, C auf OX, OY, OZ liegen. Bezeichnet man die Höhen dieses Dreiecks mit h_a, h_b, h_c, so ist nämlich

$$x : \alpha = p : h_a, \quad y : \beta = q : h_b, \quad z : \gamma = r : h_c. \tag{3}$$

In den Koordinaten α, β, γ wird die Gerade g daher dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{Pp}{h_a}\alpha + \frac{Qq}{h_b}\beta + \frac{Rr}{h_c}\gamma = 0,$$

oder auch durch

$$Ppa\alpha + Qqb\beta + Rrc\gamma = 0. \tag{4}$$

Umgekehrt bestimmt jede homogene lineare Gleichung in α, β, γ eine in ε liegende Gerade. Aus

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

ergibt sich, daß zwischen α, β, γ die Bedingungsgleichung obwaltet:

$$\frac{\alpha}{h_a} + \frac{\beta}{h_b} + \frac{\gamma}{h_c} = 1. \tag{5}$$

Die unendlich ferne Gerade der Ebene ε wird durch die Ebene

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 0$$

bestimmt. Demnach ist ihre Gleichung in normalen Koordinaten

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0. \tag{6}$$

2. Weil eine Kurve n^{ter} Ordnung dargestellt wird durch die Gleichung (1) in Verbindung mit der homogenen Gleichung der Kegelfläche, welche sie aus dem Nullpunkte projiziert, ist ihre Gleichung in normalen Koordinaten α, β, γ ebenfalls homogen.

Ein Kreis in ε läßt sich zunächst durch die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 + lx + my + nz = 0,$$

sodann durch die Kegelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 + (lx + my + nz)\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r}\right) = 0 \tag{7}$$

darstellen.

Infolge der Beziehungen

$$(8)\qquad x : pa\alpha = y : qb\beta = z : rc\gamma$$

erhält man somit die Kreisgleichung in der Form

$$(9)\quad p^2a^2\alpha^2 + q^2b^2\beta^2 + r^2c^2\gamma^2 + (pla\alpha + qmb\beta + rnc\gamma)(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0.$$

Den Umkreis des Dreiecks ABC erhält man, wenn man l, m, n beziehungsweise durch $-p$, $-q$, $-r$ ersetzt; man findet dann

$$(10)\qquad c\alpha\beta + a\beta\gamma + b\gamma\alpha = 0.$$

Die Gleichung eines beliebigen Kreises läßt sich mit Hilfe der Gleichung (10) und derjenigen der unendlich fernen Geraden in der Form

$$(11)\quad c\alpha\beta + a\beta\gamma + b\gamma\alpha + (a\alpha + b\beta + c\gamma)(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) = 0$$

darstellen, wo dann

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$$

die Potenzgerade der beiden Kreise ist.

Die Umformung der Gleichung (9) in diese Gestalt ergibt sich auf folgende Weise. Man hat zunächst

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)\{(p + l)pa\alpha + (q + m)qb\beta + (r + n)rc\gamma\}$$
$$- (p^2 + q^2)ab\alpha\beta - (q^2 + r^2)bc\beta\gamma - (r^2 + p^2)ca\gamma\alpha = 0.$$

Weil aber

$$p^2 + q^2 = c^2, \quad q^2 + r^2 = a^2, \quad r^2 + p^2 = b^2$$

ist, ergibt sich

$$(12)\qquad \left(\sum a\alpha\right)\sum(p + l)pa\alpha - abc\sum c\alpha\beta = 0.$$

3. Es soll noch gezeigt werden, wie sich eine Formel für die Entfernung d zweier Punkte herleiten läßt. Mit Hilfe der Beziehungen (3) erhält man

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$= \frac{p^2}{h_a^2}(\alpha - \alpha')^2 + \frac{q^2}{h_b^2}(\beta - \beta')^2 + \frac{r^2}{h_c^2}(\gamma - \gamma')^2.$$

Der Kürze halber werde ξ, η, ζ geschrieben anstatt

$$\frac{\alpha - \alpha'}{h_a}, \quad \frac{\beta - \beta'}{h_b}, \quad \frac{\gamma - \gamma'}{h_c}.$$

Aus

$$\sum \frac{\alpha}{h_a} = 1 \quad \text{und} \quad \sum \frac{\alpha'}{h_a} = 1$$

ergibt sich

$$\xi + \eta + \zeta = 0.$$

Demnach ist

$$\xi^2 = -(\xi\eta + \xi\zeta), \quad \text{usw.}$$

und

$$d^2 = -p^2(\xi\eta + \xi\zeta) - q^2(\xi\eta + \eta\zeta) - r^2(\xi\zeta + \eta\zeta).$$

Ersetzt man $p^2 + q^2$ durch c^2 usw., so wird

$$d^2 = -c^2\xi\eta - a^2\eta\zeta - b^2\zeta\xi.$$

Schließlich erhält man die Formel

$$d^2 = -\sum c^2 \cdot \frac{\alpha - \alpha'}{h_a} \cdot \frac{\beta - \beta'}{h_b}, \tag{13}$$

oder, wenn $\varDelta$ den Inhalt des Dreiecks ABC vorstellt,

$$d^2 = -\frac{abc}{4\varDelta^2} \sum c(\alpha - \alpha')(\beta - \beta'). \tag{14}$$

Utrecht, den 18. Oktober 1903.

Über die wichtigsten Beziehungen zwischen elektrischen und optischen Konstanten, insbesondere über den von Hagen und Rubens nachgewiesenen Zusammenhang des Reflexionsvermögens mit dem elektrischen Leitvermögen.

Von W. Westphal in Marburg.

Einleitung. — Die drei wichtigsten der in der obigen Überschrift genannten Beziehungen sind die folgenden: 1. Die Beziehung der beiden elektrischen Maßeinheiten zur Lichtgeschwindigkeit. 2. Die Beziehung, daß der Brechungsindex gleich der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante ist. 3. Die kürzlich von Hagen und Rubens gefundene Beziehung des Reflexions- und Emissionsvermögens der Metalle zu ihrer elektrischen Leitfähigkeit.

Die schon lange bekannte Tatsache, daß der elektromagnetisch im C-G-S-System gemessene Wert einer Ladung, multipliziert mit der Geschwindigkeit von 300000 km pro Sekunde, also multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit, gleich ist dem elektrostatisch gemessenen Wert dieser Ladung, fand zuerst ihre Erklärung durch die von Maxwell aufgestellte Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen. Hieraus folgt nämlich, daß jene Geschwindigkeit, die gleich dem *Verhältnis der beiden Maßeinheiten* ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Kräfte im Weltenraum, d. h. im freien Äther angibt.

Andrerseits machte Maxwell die Annahme, daß das Licht in derartigen Wellen bestehe: die elektromagnetische Lichttheorie. Daraus ergab sich dann die Erklärung dafür, daß jenes Verhältnis gerade gleich ist der Lichtgeschwindigkeit. Daß es überhaupt einer Geschwindigkeit gleich ist, läßt sich einfach erkennen; siehe: F. Richarz, Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität, 2. Aufl. 1902 bei B. G. Teubner. Seite 22—29.

Als eine weitere unmittelbare Folgerung aus den Maxwellschen Gleichungen ergab sich für Dielektrika die wichtige Beziehung zwischen den *Brechungsexponenten* und den *Dielektrizitätskonstanten*, die für das Gebiet ihrer theoretisch postulierten Gültigkeit bei einer Reihe von Körpern experimentell bestätigt worden ist. Auf ihre Ableitung wird nachher eingegangen werden.

Was dagegen die optischen Eigenschaften der Metalle betrifft, so haben diese sich lange Zeit nicht mit den Folgerungen aus der Theorie in Einklang bringen lassen. Nur ganz im allgemeinen fand man, daß, wie die Theorie verlangte, die besten Leiter (Metalle) auch am undurchlässigsten für Lichtschwingungen waren. Der Grund der quantitativen Abweichungen, die man fand, liegt in dem Umstande, daß im Gebiete kürzerer Wellen die molekularen Eigenschwingungen der Metalle einen überwiegenden Einfluß auf die optischen Parameter ausüben, der von der gewöhnlichen Theorie nicht berücksichtigt wird. Für längere Wellen fällt diese Störung weg, und es ist Hagen und Rubens gelungen, eine Beziehung zwischen dem Leitvermögen und dem Reflexionsvermögen auf experimentellem Wege aufzufinden, deren Herleitung aus den Maxwellschen Gleichungen Drude, Cohn, Planck gegeben haben. Nach diesen kommt für das optische Verhalten des Metalls bei großen Wellenlängen, also langsamen Schwingungen, allein seine Leitfähigkeit für stationäre galvanische Ströme in Betracht.

Sind nämlich $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ die Komponenten der elektrischen Kraft, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ die der damit verbundenen magnetischen Kraft, bezogen auf ein kartesisches System, dessen positive x-Achse nach rechts, dessen positive y-Achse nach hinten und dessen positive z-Achse nach oben gerichtet ist, so bestehen zwischen deren Ableitungen nach der Zeit und den Koordinaten die Maxwellschen Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} \\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{D}{c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E}_x \\ \frac{D}{c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} - \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E}_y \\ \frac{D}{c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E}_z. \end{cases}$$

Hierin ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, D die Dielektrizitätskonstante, λ die Leitfähigkeit in elektrostatischem Maß und μ die magnetische Permeabilität.

1. *Elektrische Wellen in Nichtleitern.* — Für den freien Äther, sowie für Dielektrika ist $\lambda = 0$ zu setzen, und es läßt sich zeigen, daß hierfür die Maxwellschen Gleichungen durch eine transversale Schwingungsbewegung erfüllt werden, vorausgesetzt, daß in dem betrachteten Raum keine elektrischen Ladungen vorhanden sind. Zuerst soll letztere Bedingung formuliert werden. Differenziert man die Gleichungen (2) bez. nach x, y, z und addiert, so findet man, wenn $\lambda = 0$ und D konstant ist:

$$(3)\quad D\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) = 0$$

und daher:

$$(4)\quad D\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) = \text{Konst.}$$

Es hat dann dieser Ausdruck, der nur noch Funktion der Koordinaten ist, die Bedeutung der mit 4π multiplizierten Elektrizitätsdichtigkeit, die in Nichtleitern sich zeitlich nicht ändern kann. Für einen Spezialfall sieht man dies sogleich ein; wenn nämlich $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$ zu dem elektrostatischen Potential V gehören, so wird (4):

$$(4a)\quad D\cdot\Delta V = 4\pi\varepsilon,$$

wo ε die Dichte der Elektrizität ist. Da aber ε positiv und negativ sein kann, hat man nach der Annahme zweier entgegengesetzter Elektrizitäten (dualistische Theorie) dem ε die Bedeutung der Differenz beider beigelegt.

Für $D = 1$, also für Luft, resultiert aus (4a) die gewöhnliche Laplacesche Differentialgleichung zwischen dem Potential und der Dichtigkeit der Elektrizität. Ist $D > 1$, so muß ε größer sein bei demselben V. Hieraus folgt also die Definition von D als das Verhältnis der Kapazitäten eines Kondensators bei einem dielektrischen Zwischenmedium und bei Luft ($D = 1$).

Sind daher keine Ladungen vorhanden, so muß stets sein:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Differenziert man die erste der Gleichungen (2) für $\lambda = 0$ nach t, so findet man bei Vertauschung der Differentiationen:

$$\frac{D}{c} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t}\right).$$

Setzt man die bezüglichen Werte aus (1) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} &= \frac{c}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}\right)\right] \\
&= \frac{c}{\mu}\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial z \partial x}\right] \\
&= \frac{c}{\mu}\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung von (5), und wenn wie üblich gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2} = \Delta \mathfrak{E}_x,$$

findet man:

$$\frac{D}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu} \Delta \mathfrak{E}_x$$

oder für $\frac{c^2}{\mu \cdot D} = a^2$:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = a^2 \Delta \mathfrak{E}_x. \tag{6}$$

Analoge Gleichungen bestehen für $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$. Sie stellen beliebige transversale wie longitudinale Wellenbewegungen dar. Daß sie aber unter der Annahme (5) nur transversale Wellen ergeben, resultiert aus folgendem.

Es sei nur die Komponente in der Richtung der x-Achse vorhanden, d. h. $\mathfrak{E}_y = 0$, $\mathfrak{E}_z = 0$, dann folgt aus (5):

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{E}_x = f(y, z, t)$$

und aus (6):

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2}\right). \tag{6a}$$

Nimmt man hier $\mathfrak{E}_x$ als nur von y und t abhängig an, so findet man zu seiner Bestimmung die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial y^2}, \tag{7}$$

deren allgemeine Lösung ist:

$$(8) \qquad \mathfrak{E}_x = f_1(y + at) + f_2(y - at),$$

wo f_1 und f_2 willkürliche Funktionen sind.

Betrachtet man analog den Fall, daß $\mathfrak{E}_x$ nur von z und t abhängig ist, so findet man als Lösung:

$$(9) \qquad \mathfrak{E}_x = g_1(z + at) + g_2(z - at).$$

Im allgemeinen Falle, wie er der Gleichung (6a) entspricht, koexistieren die durch (8) und (9) gegebenen Lösungen. Deren Bedeutung läßt sich jetzt ohne weiteres einsehen, nämlich, daß sich, wenn nur $\mathfrak{E}_x$-Kräfte vorhanden sind, diese in der y- oder der z-Richtung, also in einer zur x-Achse senkrechten Richtung mit der Geschwindigkeit a fortpflanzen, also eine transversale Welle vorliegt. Ganz das Analoge gilt, wenn nur $\mathfrak{E}_y$- oder nur $\mathfrak{E}_z$-Kräfte vorhanden sind. Die allgemeinste mögliche Bewegung setzt sich aus allen diesen Fällen, deren jeder eine Transversalwelle bedeutet, zusammen.

Es war:

$$a^2 = \frac{c^2}{\mu \cdot D}.$$

$\frac{c}{a}$ ist nun der Brechungsexponent n für das betrachtete Medium und $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ ist für Dielektrika, da ihre Magnetisierbarkeit $\varkappa$ gleich 0 ist, $= 1$ zu setzen, so daß sich ergibt:

$$(10) \qquad n = \sqrt{D},$$

d. h.:

„Für Dielektrika ist der Brechungsexponent für lange Wellen gleich der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstante."

Eine elementare Veranschaulichung dieser Beziehung findet man in den oben erwähnten „Neueren Fortschritten" Seite 101.

2. *Elektrische Wellen in Metallen.* — Für die meisten Metalle ist die Größe μ in den Gleichungen (1) nahezu $= 1$ zu setzen, weil ihre Magnetisierbarkeit $\varkappa = 0$ ist. Ausnahme hiervon machen nur Fe, Co, Ni. Aus der experimentell bestätigten Gültigkeit der jetzt abzuleitenden Beziehung auch für diese Metalle folgt, daß ihr Magnetismus so schnellen Schwingungen wie denen der Lichtwellen nicht folgen kann, weshalb auch für sie in dem betrachteten Wellenbereich $\mu = 1$ gesetzt werden kann.

Für den Fall einer ebenen, in der Richtung der x-Achse fortschreitenden transversalen Welle müssen die Komponenten $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_x = 0$ sein, und die Komponenten $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{E}_z$ resp. $\mathfrak{H}_y$ und $\mathfrak{H}_z$ dürfen nur noch von der x-Koordinate abhängen, eben weil eine be-

liebige Ebene x = Konst. Wellenfläche, d. h. Fläche mit Punkten gleicher Schwingungsphase sein soll. Aus (1) und (2) findet man demnach:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\frac{D}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} - \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E}_y, \quad \frac{D}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E}_z. \tag{12}$$

Ist ferner die Welle geradlinig polarisiert, d. h. schwingt die elektrische Kraft stets parallel zu einer bestimmten Richtung, senkrecht zur x-Achse, welche Schwingungsrichtung man mit der y-Achse zusammenfallen lassen kann, so fällt die Schwingungsrichtung der magnetischen Kraft mit der z-Achse zusammen, sodaß also zu setzen ist $\mathfrak{E}_z = 0$, $\mathfrak{H}_y = 0$; und man findet die Endgleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -c\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} + \frac{D}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{4\pi\lambda}{c}\mathfrak{E}_y. \tag{13}$$

Differenziert man die erste Gleichung nach x, die zweite nach t und subtrahiert, so ergibt sich:

$$-\frac{D}{c}\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} + \frac{4\pi\lambda}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t},$$

$$D\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} - 4\pi\lambda\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}. \tag{14}$$

Diese Differentialgleichung stellt eine beim Fortschreiten gleichmäßig gedämpfte Welle dar. Für $\lambda = 0$ resultiert die gewöhnliche Wellengleichung; das mit $\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t}$ multiplizierte Glied entspricht der Dämpfung. Die Konstante D hat für Leiter zunächst keine bestimmte physikalische Bedeutung, indes werden die folgenden Betrachtungen zu einer solchen führen. Die Differentialgleichung (14) ist linear und homogen und läßt sich daher mit Hilfe einer Exponentialfunktion, deren Exponent eine lineare Funktion der unabhängigen Variablen ist, integrieren. Man setze demnach:

$$\mathfrak{E}_y = Ae^{\alpha t + \beta x}, \tag{15}$$

wo durch (14) eine Beziehung zwischen α und β gegeben ist. Da man es bei einem andauernden Wellenzug für einen bestimmten Punkt mit einer zeitlich rein periodischen Schwingung zu tun hat, muß α, damit dies wirklich der Fall ist, rein imaginär sein, da eine Exponentialfunktion die Periode $2\pi i$ hat und die Zeit natürlich immer reell ist. Setzt man daher:

$$\alpha = \frac{2\pi i}{\tau}, \tag{16}$$

so ist τ die Schwingungsdauer, und β vermöge (14) als Funktion derselben bestimmt. Dabei wird durch diese Wahl von α die Allgemeinheit der Lösung durchaus nicht beeinträchtigt, da τ noch ebenso willkürlich ist wie α, nur daß diese Konstante die bestimmte physikalische Bedeutung der Schwingungsdauer besitzt. Ferner gibt man noch β zur Vereinfachung späterer Rechnungen die Form:

$$\beta = -\frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{p}{c}. \tag{17}$$

Hier ist p aus τ und den übrigen bekannten Größen durch (14) bestimmt und zwar folgendermaßen. Es ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= A e^{2\pi(it - px/c)/\tau} \\ \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} &= A e^{2\pi(it-px/c)/\tau} \cdot 2\pi i/\tau \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} &= -A \cdot e^{2\pi(it-px/c)/\tau} \cdot (2\pi/\tau)^2 \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} &= A e^{2\pi(it-px/c)/\tau} \cdot (2p\pi/c\tau)^2. \end{aligned} \tag{18}$$

In (14) eingesetzt, findet man:

$$-D(2\pi/\tau)^2 = c^2(2p\pi/c\tau)^2 - 8\pi^2\lambda i/\tau$$

oder

$$-D - p^2 + 2\lambda\tau \cdot i = 0. \tag{19}$$

Wie hieraus ersichtlich, wird p^2 und p komplex, und man setzt daher:

$$p = \varkappa + i \cdot \nu, \tag{20}$$

wodurch (19) übergeht in:

$$-D - \varkappa^2 - 2\varkappa \cdot \nu \cdot i + \nu^2 + 2\lambda\tau \cdot i = 0,$$

oder wenn das Reelle vom Imaginären getrennt wird:

$$-D - \varkappa^2 + \nu^2 = 0, \qquad \varkappa \cdot \nu = \lambda \cdot \tau. \tag{21}$$

Dies sind also jetzt zwei Gleichungen, die $\varkappa$ und ν durch τ, D und λ ausdrücken.

Gleichung (18) schreibt sich bei Berücksichtigung von (20) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_y &= A e^{2\pi/\tau \cdot (i \cdot t - (\varkappa + i\nu)x/c)} \\ &= A e^{-2\pi\varkappa x/c\tau} \cdot e^{i \cdot 2\pi(t/\tau - \nu x/c\tau)} \\ &= A e^{-2\pi\varkappa x/c\tau} \cdot [\cos 2\pi\,(t/\tau - \nu x/c\tau) + i \sin 2\pi\,(t/\tau - \nu x/c\tau)]. \end{aligned}$$

Setzt man in (14) ein, so sieht man leicht, daß sowohl der reelle wie der imaginäre Teil für sich eine Lösung darstellen muß. Betrachtet man demnach:

$$\mathfrak{E}_y = A e^{-2\pi\varkappa \cdot x/c\tau} \cdot \sin 2\pi\,(t/\tau - \nu x/c\tau), \tag{22}$$

so stellt dies eine gedämpfte fortschreitende Sinuswelle dar, denn durch die Gleichung $y = f(x - at)$ wird bekanntlich eine in der Richtung der x-Achse fortschreitende Wellenbewegung dargestellt, die mit der Geschwindigkeit a sich fortpflanzt. Die durch (22) dargestellte Wellenbewegung schreitet daher mit einer Geschwindigkeit $a = \frac{c}{\nu}$ fort. Es ist demnach:

$$\nu = \frac{c}{a},$$

und ist analog dem Brechungsindex.

Gleichung (22) stimmt überein mit der in Boltzmanns Vorlesungen über Maxwellsche Theorie, Bd. II, 1893, S. 33.

Ist l_v die Wellenlänge der Schwingungsbewegung im Vakuum, d. h.:

$$c \cdot \tau = l_v$$

und daher:

$$\mathfrak{E}_y = A e^{-2\pi\varkappa \cdot x/l_v} \cdot \sin 2\pi\,(t/\tau - \nu x/l_v),$$

so ist die verhältnismäßige Amplitudenabnahme, wenn die Bewegung um eine Vakuumwellenlänge in dem Metall weiter geht, gleich $e^{-2\pi\varkappa}$ und daher die relative Abnahme der Intensität gleich $e^{-4\pi\varkappa}$. Hieraus geht hervor, daß $\varkappa$ die Bedeutung des sog. Extinktionsindex in der Optik hat: Je größer $\varkappa$ ist, umso schneller nimmt die Amplitude ab, umso stärker ist die Schwingung gedämpft.

Aus (21) folgt:

$$D = \nu^2 - \frac{\lambda^2 \cdot \tau^2}{\nu^2}. \tag{23}$$

D ist somit physikalisch völlig bestimmt. Für Dielektrika ist $\lambda = 0$, also $D = \nu^2$. D hat dann die Bedeutung der sog. Dielektrizitätskonstante im früheren Sinne. Für Metalle kann (23) als Definitionsgleichung der Dielektrizitätskonstante im erweiterten Sinne gelten.

Unter der Annahme, daß D endlich ist, und daß man es mit langen Wellen, also großem τ zu tun hat, findet man aus (23) für ν:

$$\nu = \sqrt{\frac{D}{2} \pm \sqrt{\lambda^2\tau^2 + \frac{D^2}{4}}},$$

wo indes nur das obere Zeichen gelten kann. Unter Vernachlässigung von $\frac{D^2}{4}$ gegen $\lambda^2\tau^2$ und $\frac{D}{2}$ gegen $\lambda\tau$ ergibt sich demnach:

$$(24)\begin{cases} \nu = \sqrt{\lambda\tau}, \\ \text{also nach (21) auch:} \\ \varkappa = \sqrt{\lambda\tau}. \end{cases}$$

3. *Reflexion von Wellen.* — Bei gewöhnlicher Reflexion, die nur an der *Oberfläche* einer spiegelnden Fläche stattfindet, gilt bei senkrechter Inzidenz die Fresnelsche Gleichung:

$$R = \left(\frac{\nu - 1}{\nu + 1}\right)^2,$$

wo R das Reflexionsvermögen, d. h. das Verhältnis der Intensitäten der Strahlen einer Lichtquelle direkt nach und vor der Reflexion für die ans Vakuum grenzende Oberfläche, und ν den Brechungsexponenten bedeutet.

Voraussetzung dabei ist, daß die Reflexion eben nur an der *Oberfläche* stattfindet, nicht aus dem Innern heraus, daß also im Innern keine Störung der Wellen durch Absorption stattfindet. In diesem Falle können Phasenänderungen des einfallenden Lichtes, wenn überhaupt, so nur als Phasenumkehr, also um π stattfinden. Also kann geradlinig polarisiertes Licht immer nur wieder als geradlinig polarisiertes reflektiert werden, und es kann hierbei nicht elliptisch polarisiertes Licht neu auftreten, wenn es nicht schon vorhanden war.

Untersucht man aber geradlinig schwingend einfallendes Licht nach Total- oder Metallreflexion, so findet man im allgemeinen, daß das reflektierte Licht elliptisch polarisiert ist. Die elliptische Polarisation zeigt, daß das reflektierte Licht nicht nur aus den an der äußersten Oberfläche reflektierten Lichtstrahlen besteht, sondern auch einen Teil der eingedrungenen Strahlen, die später erst reflektiert wurden, enthält. Die eindringende Schwingungsbewegung nimmt in Form einer Exponentialfunktion hinsichtlich ihrer Amplitude ab. Dies ist die Folge der Störung, die die Lichtbewegung erleidet. Diese selbe Störung gibt auch zu Reflexion aus dem Innern heraus Anlaß, und der reflektierte Strahl ist daher zum Teil aus Schwingungen, die von der Oberfläche, zum Teil aus solchen, die von Punkten innerhalb der Schicht ausgehen, zusammengesetzt. Die Tiefe des Eindringens der Komponenten des einfallenden Lichts in der Einfallsebene und senkrecht dazu ist im allgemeinen verschieden. Diese werden daher auch verschiedene Phasenänderungen erhalten, und indem sich diese beiden aufeinander senkrechten Komponenten zusammensetzen, wird das Auftreten des elliptisch polarisierten Lichtes bei Metallreflexion erklärbar.

Diese aus dem Innern herauskommenden Wellen bei der Metallreflexion beeinflussen nun auch die *Intensität* der Reflexion. Die Theorie lehrt, daß das Reflexionsvermögen bei Metallspiegeln durch die Formel dargestellt wird:

$$R = \frac{(\nu - 1)^2 + \varkappa^2}{(\nu + 1)^2 + \varkappa^2} \tag{25}$$

wo $\varkappa$ den Extinktionsindex bedeutet. Was ihre Ableitung betrifft, so vergleiche man Drude in Winckelmanns Handbuch der Physik II, 1 Optik Seite 810 und Seite 824.

Es ist hierbei zu beachten, daß in der dort abgeleiteten Formel für das Reflexionsvermögen:

$$R = \frac{(n - 1)^2 + n^2\varkappa^2}{(n + 1)^2 + n^2\varkappa^2} \tag{26}$$

n den Brechungsindex und $\varkappa$ den Extinktionsindex, bezogen auf eine Wellenlänge l_m im Metall, bedeutet, d. h. es ist hier die relative Amplitudenabnahme $= e^{-2\pi\varkappa}$, wenn die Bewegung um l_m im Metall weitergeht. Bezeichnet man daher für den Augenblick das $\varkappa$ in (25) mit $\varkappa'$, so geht für $n = \nu$ und $\varkappa = \frac{\varkappa'}{n}$ (25) aus (26) hervor.

Für nicht absorbierende Mittel, also $\varkappa = 0$ resultiert die Fresnelsche Gleichung für das Reflexionsvermögen. Die infolge der Absorption eingetretene Verstärkung des reflektierten Strahles hat zur Folge, daß in der obigen Formel (25) das Quadrat des Extinktionskoeffizienten auftritt, welches, da es im Zähler zu einer kleineren Zahl, im Nenner zu einer größeren hinzutritt, den Wert des Bruches vergrößert. Aus (25) folgt $R = 1$ für $\varkappa = \infty$. Dies ist der Fall bei Metallen für so lange elektrische Wellen, bei denen auf eine ganze Wellenlänge nichts durchdringt, wie z. B. bei Hertzschen Wellen; für sie findet vollständige Reflexion statt. Bei Berücksichtigung von (24) ergibt sich:

$$R = \frac{1 + 2\lambda\tau - 2\sqrt{\lambda\tau}}{1 + 2\lambda\tau + 2\sqrt{\lambda\tau}}.$$

Bei großem τ kann man zunächst im Zähler und Nenner die Eins gegen die andern Glieder vernachlässigen, und indem man Zähler und Nenner durch $2\lambda\tau$ dividiert, erhält man:

$$R = \frac{1 - 1/\sqrt{\lambda\tau}}{1 + 1/\sqrt{\lambda\tau}}$$

oder wegen der Kleinheit von $1/\sqrt{\lambda\tau}$:

$$R = 1 - \frac{2}{\sqrt{\lambda\tau}}.$$

Führt man statt λ den spezifischen Widerstand $w = 1/\lambda$, für τ die Schwingungszahl $n = 1/\tau$ ein, so findet man:

$$R = 1 - 2\sqrt{w \cdot n}.$$

R bezieht sich in dieser Formel auf die reflektierte Strahlungsintensität, wenn die einfallende $= 1$ gesetzt wird. Nennt man R_1 die reflektierte, in Prozenten ausgedrückte Intensität, so ergibt sich, da die einfallende Strahlungsintensität $= 100$ und demnach $100\,R = R_1$:

$$100 - R_1 = 200\sqrt{w \cdot n}$$

oder wenn für R_1 wieder ein neues R geschrieben wird:

$$(100 - R)\sqrt{\lambda} = 200\sqrt{n}$$

oder auch:

$$(100 - R)\sqrt{\lambda\tau} = 200.$$

Dies ist das von Hagen und Rubens experimentell gefundene Gesetz. Es besagt, daß *die nichtreflektierten Intensitäten* $100 - R$, *die sog. Eindringungskoeffizienten, im Gebiete langer Wellen sich umgekehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Leitvermögen der betreffenden Metalle.*

Es sollen schließlich noch die in der abgeleiteteten Beziehung vorkommenden Größen in den gebräuchlichen Maßeinheiten ausgedrückt werden.

Es bedeutete λ die Leitfähigkeit in absolutem elektrostatischem Maße. Es ist also, da $w = l/\lambda q$, wo w der Widerstand, l die Länge, q der Querschnitt eines Drahtes ist, $1/\lambda$ der Widerstand in elektrostatischem Maß eines Drahtes von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt. Daher ist der Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt in elektrostatischem Maße $= 10^4/\lambda$ elektrostatischen Widerstandseinheiten. Ist die Stromstärke J_m, elektromagnetisch gemessen, J_s, elektrostatisch gemessen, so ist $J_s = c\,J_m$, wo c die Lichtgeschwindigkeit $= 3 \cdot 10^{10}$ cm pro sec. ist. Ferner ist nach dem Jouleschen Gesetz in jedem absoluten Maßsystem: Quadrat der Stromstärke mal Widerstand W das Arbeitsäquivalent der während 1 Sekunde entwickelten Wärmemenge, also: $J_m^2 \cdot W_m = J_s^2 \cdot W_s$, und mithin:

$$W_m = c^2 \cdot W_s.$$

Man findet daher als Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt $\frac{c^2 \cdot 10^4}{\lambda}$ elektromagnetische Widerstandseinheiten. Mit $1/\varkappa$ bezeichnen nun Hagen und Rubens den Widerstand in Ohm $= \Omega$ eines Drahtes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt. Da das Zeichen $\varkappa$ in der vorhergehenden Betrachtung schon die Bedeutung

des Extinktionsindex hat, soll der genannte Widerstand mit $1/\chi$ bezeichnet werden. Es ist demnach, da $1\ \Omega = 10^9$ elektromag. W. E., dieser Widerstand in letzteren $= 10^9/\chi$, und man findet:

$$\frac{c^2 \cdot 10^4}{\lambda} = \frac{10^9}{\chi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{10^5}{c^2 \cdot \chi}.$$

Weiter ist $l/\tau = c$, also $1/\tau = c/l$, wo c und die Wellenlänge l (im Vakuum, s. S. 43) in denselben Einheiten auszudrücken sind. Drückt man l in $\mu = 10^{-3}$ mm $= 10^{-4}$ cm, c aber in cm aus, so folgt:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{c}{l_\mu 10^{-4}}.$$

Es ergibt sich daher:

$$\frac{1}{\lambda\tau} = \frac{10^9}{c} \cdot \frac{1}{l_\mu \cdot \chi} = \frac{1}{3 \cdot 10}\,\frac{1}{l_\mu \cdot \chi},$$

und

$$\sqrt{\lambda\tau} = \sqrt{30}\sqrt{l_\mu \chi},$$

also (s. vor. S.):

$$(100 - R)\sqrt{30}\sqrt{l_\mu \chi} = 200,$$

oder:

$$(100 - R)\sqrt{\chi} = C,$$

wo:

$$C = \frac{K}{\sqrt{l_\mu}} \quad \text{und} \quad K = \frac{200}{\sqrt{30}} = 36{,}5.$$

Hagen und Rubens bestimmten direkt die Größen R resp. $100 - R$ und χ und damit C bei verschiedenen Wellenlängen. Und zwar wurde bei den ersten Versuchen R bestimmt und in Prozenten der einfallenden Strahlung (= 100) ausgedrückt. Bei den späteren Versuchen wurde die aus dem Kirchhoffschen Gesetz folgende Überlegung benutzt, daß die Größe $100 - R$ oder die absorbierte Strahlung proportional ist der Emission. Die Emission des betrachteten Körpers wurde gemessen und mit der eines gleichtemperierten absolut schwarzen Körpers verglichen, die gleich 100 gesetzt wurde, woraus sich dann das Verhältnis $100 - R : 100$ und damit $100 - R$ ergab. Aus C fanden sie dann nach $K = C\sqrt{l_\mu}$ im Mittel:

für $l_\mu = 4\mu$	$K = 38{,}8$
8μ	$36{,}8$
12μ	$38{,}1$
$25{,}5\mu$	$37{,}2$,

also gute Übereinstimmung mit dem aus der Maxwellschen Theorie folgenden Werte.

Physikalisches Institut der Universität Marburg, im August 1904.

Rezensionen.

Loria, Gino. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Leipzig 1902, B. G. Teubner. XXI u. 744 S. Mit 174 Fig. auf 17 Tafeln.

„An der Aufstellung der bunten Schar der mannigfaltigen, speziellen algebraischen und transzendenten Kurven haben fast alle Mathematiker, angefangen von der griechischen Epoche bis auf unsere Tage, mitgearbeitet: die einen trieb der Wunsch nach Vermehrung der Zahl interessanter geometrischer Figuren, die anderen der Wunsch, analytische Formeln geometrisch interpretiert zu sehen; wieder andere beseelte die Hoffnung, gewisse, bis dahin unbezwungene geometrische Probleme zu lösen; noch andere führten Anwendungen aus der Mechanik und Physik dazu." Besonders seit durch die Einführung der analytischen Geometrie das Mittel an die Hand gegeben war, jeder Funktion von zwei Variabeln eine ebene krumme Linie entsprechen zu lassen, welche die Infinitesimalrechnung weit vollständiger untersuchen lehrte, als es bisher möglich war, nahm die Zahl der behandelten krummen Linien immer mehr zu. Haben auch manche von diesen nur vorübergehend Beachtung gefunden, so gibt es doch überaus viele, die dauernden Wert haben, entweder weil sie sich besonderer bemerkenswerter geometrischer Eigenschaften erfreuen, oder weil sie wichtigen Problemen anderer mathematischer Wissenschaften ihre Entstehung verdanken. Dabei ist das Material überall zerstreut, weil „vielleicht in keinem Zweige der Mathematik wichtige Forschungen über spezielle Kurven gänzlich fehlen". So füllt in der Tat das vorliegende Werk eine wesentliche Lücke aus, deren Vorhandensein allgemein anerkannt war.

Wir haben in dem Buche eine vollständige Zusammenstellung aller derjenigen ebenen Kurven, die für die Wissenschaft von irgend welcher Bedeutung sind, darunter alle, die einen besonderen Namen erhalten haben. Um alle krummen Linien gleichmäßig behandeln zu können, ist die Form der analytischen Geometrie gewählt. Einmal ist ja eine sehr große Zahl der benannten Kurven mit Hilfe der analytischen Geometrie gefunden, dann ist auch nur so eine kurze Übersicht möglich. Wir finden bei den einzelnen Kurven das Geschichtliche ihrer ersten Herleitung angegeben, ihre Konstruktion und Gestalt und die besonders charakteristischen Eigenschaften. Nur ganz kurz ist auf die Gerade und die Kegelschnitte eingegangen (S. 1—13). Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit den krummen Linien

dritter Ordnung (S. 14—93), die als solche natürlich erst erkannt werden konnten, als durch die Einführung der analytischen Geometrie überhaupt eine Einteilung der Kurven nach Ordnungen möglich war. Da aber war auch nach sehr kurzer Zeit durch Newton eine volle Klassifikation derselben gegeben, und heute kann die Theorie dieser Kurven „als eine der vollendetsten der ganzen Geometrie angesehen werden." Nach einer allgemeinen Klassifikation werden zuerst die rationalen Kurven dritter Ordnung behandelt, sodann die zirkularen, worauf die besonders bemerkenswerten und zum Teil schon seit dem Altertum bekannten einer Betrachtung unterzogen werden. Von den Kurven vierter Ordnung werden die verschiedenen Arten ihrer Einteilung aufgezählt und einige Linien ohne Doppelpunkte angegeben. Es folgen die rationalen Kurven im allgemeinen und ebenso die elliptischen und bizirkularen und darauf eine große Zahl von speziellen Kurven. Sind noch die Kurven vierter Ordnung, wenn ihre Theorie auch nicht völlig ausgebildet ist, einer allgemeinen Behandlung fähig, so ist dies bei den Kurven höherer Ordnung nicht mehr möglich. Schon unter den Kurven fünfter Ordnung ist keine mehr, die einen besonderen Namen erhalten hat, und diejenigen Kurven höherer Ordnung, die einen solchen besitzen, sind entweder von bekannten Kurven niederer Ordnung abgeleitet oder durch bestimmte Bewegung entstanden (Gleitkurven). Die Ableitung der Kurven kann in der Weise geschehen, daß wir den Ort gewisser mit einer Kurve verbundener Punkte suchen (wie etwa die Krümmungsmittelpunktskurven), oder indem wir, sei es die Konstruktion (z. B. die allgemeinen Cissoiden und die Konchoiden mit beliebiger Basis), sei es die Gleichung der Kurve (die Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung und die Perlkurven) verallgemeinern. Dazu kommen die krummen Linien, die eine vorgeschriebene Gestalt haben, wie die Blattkurven, deren Gleichung dann hinterher zu bestimmen ist. Kurven, die gewissen Aufgaben anderer Art ihre Entstehung verdanken, sind die Multiplikatrix- und die Sektrix- oder Teilungskurven. Den Kurven höherer Ordnung sind der 4. und 5. Abschnitt gewidmet (S. 219—405).

Den algebraischen Kurven, die man durch eine algebraische Gleichung zwischen den kartesischen Koordinaten eines Punktes darstellen kann, stehen die transzendenten Kurven gegenüber. Bei ihnen scheint zunächst eine Klassifikation ganz unmöglich. Zwar entstehen bei manchen algebraische Gleichungen, wenn man von den kartesischen Koordinaten zu polaren, bipolaren oder natürlichen übergeht; doch ließ sich bisher eine Theorie darauf nicht aufbauen. Einen wichtigen Schritt vorwärts macht der Verfasser, indem er den Begriff der panalgebraischen Kurven aufstellt. Panalgebraische Kurven sind danach die transzendenten Kurven, bei denen die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte der Ebene gezogenen Tangenten auf einer algebraischen Kurve liegen. Sie sind insofern eine Verallgemeinerung der algebraischen Kurven, als der Neigungskoeffizient der Tangente $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, deren Koeffizienten ganze Polynome in x und y sind. Jede derartige Kurve ist die Integralkurve einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$F(x,y,y') = \sum_{r=0}^{n} f_1(x,y)\, y'^{n-r} = 0,$$

wo die f_m Polynome ohne gemeinsame Faktoren sind. n wird der Grad der panalgebraischen Kurve genannt, ν, der höchste Grad der Polynome f_m, ihr Rang. Die größte Zahl der bekannten transzendenten Kurven gehört zu den panalgebraischen Kurven. Von den transzendenten Kurven seien nur angegeben die verschiedenen Spiralen, die Cykloiden, die Traktrixkurven, die Kettenlinien, unter den abgeleiteten die Evoluten und Evolventen, die Parallelkurven, Radialen, Brennlinien und Fußpunktkurven. Den Beschluß des Werkes bildet ein gedrängter, inhaltreicher Rückblick über die historische Entwickelung der Theorie der ebenen Kurven.

Es ist nicht möglich, in einer kurzen Besprechung ein klares Bild von dem überaus reichen Inhalt und der in bezug auf die Zahl der Kurven erschöpfenden Behandlung zu geben; sicher ist, daß niemand, der sich eingehender mit der Kurventheorie beschäftigen will, das Werk unbeachtet lassen darf. Eine wertvolle Ergänzung sind die von dem Bearbeiter der deutschen Ausgabe, Herrn Fritz Schütte, entworfenen Zeichnungen, die uns auf 17 Tafeln 174 Kurven darstellen.

Chemnitz. H. Willgrod.

Močniks Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. Bearb. von **Joh. Spielmann.** I. Abt. (für die I. u. II. Klasse) 26. Aufl. Wien u. Prag 1901, E. Tempsky 76 S. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

— II. Abt. (für die III. u. IV. Klasse) 21. Aufl. 1901. 86 S. gr. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

Močniks Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Bearbeitet von **Joh. Spielmann.** 23. Aufl. 1901. VI u. 297 S. gr. 8⁰. geb. 3 K 80 h.

An den österreichischen höheren Schulen ist dem vorbereitenden geometrischen Unterrichte eine weit größere Zeit eingeräumt als bei uns; im 2. Semester der I. (untersten) Klasse beginnt bereits der Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre und wird durch die vier ersten Klassen durchgeführt. Mit dem Ober-Gymnasium bez. der Oberrealschule (Kl. V) setzt dann der eigentliche wissenschaftliche Unterricht ein, wieder mit den Elementen beginnend.

Demgemäß sind auch die vorliegenden Bücher eingerichtet. Die beiden ersten Teile enthalten die Elemente in anschaulicher Form. Sie genügen recht wohl der Forderung der österreichischen „Instruktionen“: „Das Lehrbuch soll im Untergymnasium mehr den Charakter eines Übungsbuches als eines Lehrbuches haben“. Dabei ist aber auch die Ableitung der Sätze mit der nötigen Ausführlichkeit behandelt. Der erste Teil enthält die Grundvorstellungen, von dem Würfel und dem Zylinder ausgehend, und die Planimetrie in den einzelnen Teilen: Gerade Linie, Kreislinie, Winkel, parallele Linien, Dreiecke, Kongruenz, besondere Eigenschaften des Kreises, Vierecke und Vielecke, der zweite Teil die Flächengleichheit, die Ausmessung der ebenen Figuren und Ähnlichkeit und als letzten Abschnitt die Stereometrie, gerade Linien und Ebenen im Raume und die Körper und ihre Ausmessung.

Das Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen entspricht in der Behandlung des Stoffes den ausführlichen unserer Lehrbücher und enthält die

Planimetrie, ebene Trigonometrie, Sterometrie mit sphärischer Trigonometrie und die analytische Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Auch hier ist überall ein reiches Übungsmaterial beigefügt, das dem Lehrer eine genügende Auswahl gestattet und ein besonderes Übungsbuch unnötig macht. Ein Anhang von 4 Seiten gibt eine ganz kurze Übersicht über die Geschichte der Geometrie.

Chemnitz. H. WILLGROD.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. XV u. 594 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk ist von den interessierten Kreisen mit großer Spannung erwartet worden. Ein deutsches Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, geeignet zur Einführung in diese mit dem praktischen Leben so vielfach verknüpfte Disziplin und ihre hauptsächlichsten Anwendungen, hat stets gefehlt. Die Bearbeitungen fremdsprachlicher Werke, wie z. B. die von Czuber im Jahre 1879 besorgte Ausgabe der A. Meyerschen Vorlesungen, mußten bei dem schnellen Fortschreiten der Wahrscheinlichkeitstheorie gerade innerhalb der beiden letzten Jahrzehnte bald veralten. Wenn gleichwohl dem unzweifelhaft vorhandenen Bedürfnisse nicht schon seit langem abgeholfen worden ist, so dürfte der Grund darin zu finden sein, daß eine sachgemäße Behandlung des Gegenstandes, vor allem der Anwendungen auf Statistik und Versicherungswesen, einen in der Theorie wie in der Praxis gleich erfahrenen Autor erforderte.

Der Verfasser des als neunter Band der Teubnerschen Lehrbücher erschienenen Werkes hat, wie es nach seinen früheren zahlreichen Schriften auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitslehre erwartet werden durfte, seine schwierige Aufgabe im allgemeinen befriedigend gelöst. Die Darstellung der eigentlichen Wahrscheinlichkeitstheorie sowie der Ausgleichungsrechnung kann als meisterhaft bezeichnet werden. Dagegen wird, wie schon hier bemerkt sei, der mit „Lebensversicherungsrechnung" bezeichnete Abschnitt nicht die volle Zustimmung der Praktiker finden, denen der Verfasser übrigens auch als Mathematiker einer Wiener Lebensversicherungs-Gesellschaft bekannt ist.

Den „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" ist der erste Abschnitt des mit „Wahrscheinlichkeitstheorie" betitelten ersten Teiles gewidmet. Die Einleitung gibt eine Übersicht über die bekanntlich sehr strittigen Grundbegriffe und setzt die Beziehungen zur Logik und Erkenntnistheorie (hypothetisches und hypothetisch-disjunktives Urteil, Zufall, gleichmögliche Fälle) auseinander. Die hierbei gewonnene Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit führt sodann zur direkten Wahrscheinlichkeitsbestimmung durch Bildung und Zählung der möglichen und günstigen Fälle, wobei die Formeln der Kombinatorik und namentlich die Stirlingsche Näherungsformel wichtige Dienste leisten. Dieselbe Definition ermöglicht mit Hilfe der Sätze von der vollständigen und der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit eine indirekte Wahrscheinlichkeitsbestimmung, und sie ist endlich auch unbeschränkter Anwendung fähig auf Probleme der „geometrischen Wahrscheinlichkeit", denen kontinuierliche und daher nicht zählbare Mannigfaltig-

wo die f_m Polynome ohne gemeinsame Faktoren sind. n wird der Grad der panalgebraischen Kurve genannt, ν, der höchste Grad der Polynome f_m, ihr Rang. Die größte Zahl der bekannten transzendenten Kurven gehört zu den panalgebraischen Kurven. Von den transzendenten Kurven seien nur angegeben die verschiedenen Spiralen, die Cykloiden, die Traktrixkurven, die Kettenlinien, unter den abgeleiteten die Evoluten und Evolventen, die Parallelkurven, Radialen, Brennlinien und Fußpunktkurven. Den Beschluß des Werkes bildet ein gedrängter, inhaltreicher Rückblick über die historische Entwickelung der Theorie der ebenen Kurven.

Es ist nicht möglich, in einer kurzen Besprechung ein klares Bild von dem überaus reichen Inhalt und der in bezug auf die Zahl der Kurven erschöpfenden Behandlung zu geben; sicher ist, daß niemand, der sich eingehender mit der Kurventheorie beschäftigen will, das Werk unbeachtet lassen darf. Eine wertvolle Ergänzung sind die von dem Bearbeiter der deutschen Ausgabe, Herrn Fritz Schütte, entworfenen Zeichnungen, die uns auf 17 Tafeln 174 Kurven darstellen.

Chemnitz. H. WILLGROD.

Močniks Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. Bearb. von **Joh. Spielmann.** I. Abt. (für die I. u. II. Klasse) 26. Aufl. Wien u. Prag 1901, E. Tempsky 76 S. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

— II. Abt. (für die III. u. IV. Klasse) 21. Aufl. 1901. 86 S. gr. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

Močniks Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Bearbeitet von **Joh. Spielmann.** 23. Aufl. 1901. VI u. 297 S. gr. 8⁰. geb. 3 K 80 h.

An den österreichischen höheren Schulen ist dem vorbereitenden geometrischen Unterrichte eine weit größere Zeit eingeräumt als bei uns; im 2. Semester der I. (untersten) Klasse beginnt bereits der Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre und wird durch die vier ersten Klassen durchgeführt. Mit dem Ober-Gymnasium bez. der Oberrealschule (Kl. V) setzt dann der eigentliche wissenschaftliche Unterricht ein, wieder mit den Elementen beginnend.

Demgemäß sind auch die vorliegenden Bücher eingerichtet. Die beiden ersten Teile enthalten die Elemente in anschaulicher Form. Sie genügen recht wohl der Forderung der österreichischen „Instruktionen“: „Das Lehrbuch soll im Untergymnasium mehr den Charakter eines Übungsbuches als eines Lehrbuches haben“. Dabei ist aber auch die Ableitung der Sätze mit der nötigen Ausführlichkeit behandelt. Der erste Teil enthält die Grundvorstellungen, von dem Würfel und dem Zylinder ausgehend, und die Planimetrie in den einzelnen Teilen: Gerade Linie, Kreislinie, Winkel, parallele Linien, Dreiecke, Kongruenz, besondere Eigenschaften des Kreises, Vierecke und Vielecke, der zweite Teil die Flächengleichheit, die Ausmessung der ebenen Figuren und Ähnlichkeit und als letzten Abschnitt die Stereometrie, gerade Linien und Ebenen im Raume und die Körper und ihre Ausmessung.

Das Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen entspricht in der Behandlung des Stoffes den ausführlichen unserer Lehrbücher und enthält die

Planimetrie, ebene Trigonometrie, Sterometrie mit sphärischer Trigonometrie und die analytische Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Auch hier ist überall ein reiches Übungsmaterial beigefügt, das dem Lehrer eine genügende Auswahl gestattet und ein besonderes Übungsbuch unnötig macht. Ein Anhang von 4 Seiten gibt eine ganz kurze Übersicht über die Geschichte der Geometrie.

Chemnitz. H. WILLGROD.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. XV u. 594 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk ist von den interessierten Kreisen mit großer Spannung erwartet worden. Ein deutsches Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, geeignet zur Einführung in diese mit dem praktischen Leben so vielfach verknüpfte Disziplin und ihre hauptsächlichsten Anwendungen, hat stets gefehlt. Die Bearbeitungen fremdsprachlicher Werke, wie z. B. die von Czuber im Jahre 1879 besorgte Ausgabe der A. Meyerschen Vorlesungen, mußten bei dem schnellen Fortschreiten der Wahrscheinlichkeitstheorie gerade innerhalb der beiden letzten Jahrzehnte bald veralten. Wenn gleichwohl dem unzweifelhaft vorhandenen Bedürfnisse nicht schon seit langem abgeholfen worden ist, so dürfte der Grund darin zu finden sein, daß eine sachgemäße Behandlung des Gegenstandes, vor allem der Anwendungen auf Statistik und Versicherungswesen, einen in der Theorie wie in der Praxis gleich erfahrenen Autor erforderte.

Der Verfasser des als neunter Band der Teubnerschen Lehrbücher erschienenen Werkes hat, wie es nach seinen früheren zahlreichen Schriften auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitslehre erwartet werden durfte, seine schwierige Aufgabe im allgemeinen befriedigend gelöst. Die Darstellung der eigentlichen Wahrscheinlichkeitstheorie sowie der Ausgleichungsrechnung kann als meisterhaft bezeichnet werden. Dagegen wird, wie schon hier bemerkt sei, der mit „Lebensversicherungsrechnung" bezeichnete Abschnitt nicht die volle Zustimmung der Praktiker finden, denen der Verfasser übrigens auch als Mathematiker einer Wiener Lebensversicherungs-Gesellschaft bekannt ist.

Den „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" ist der erste Abschnitt des mit „Wahrscheinlichkeitstheorie" betitelten ersten Teiles gewidmet. Die Einleitung gibt eine Übersicht über die bekanntlich sehr strittigen Grundbegriffe und setzt die Beziehungen zur Logik und Erkenntnistheorie (hypothetisches und hypothetisch-disjunktives Urteil, Zufall, gleichmögliche Fälle) auseinander. Die hierbei gewonnene Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit führt sodann zur direkten Wahrscheinlichkeitsbestimmung durch Bildung und Zählung der möglichen und günstigen Fälle, wobei die Formeln der Kombinatorik und namentlich die Stirlingsche Näherungsformel wichtige Dienste leisten. Dieselbe Definition ermöglicht mit Hilfe der Sätze von der vollständigen und der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit eine indirekte Wahrscheinlichkeitsbestimmung, und sie ist endlich auch unbeschränkter Anwendung fähig auf Probleme der „geometrischen Wahrscheinlichkeit", denen kontinuierliche und daher nicht zählbare Mannigfaltig-

wo die f_m Polynome ohne gemeinsame Faktoren sind. n wird der Grad der panalgebraischen Kurve genannt, ν, der höchste Grad der Polynome f_m, ihr Rang. Die größte Zahl der bekannten transzendenten Kurven gehört zu den panalgebraischen Kurven. Von den transzendenten Kurven seien nur angegeben die verschiedenen Spiralen, die Cykloiden, die Traktrixkurven, die Kettenlinien, unter den abgeleiteten die Evoluten und Evolventen, die Parallelkurven, Radialen, Brennlinien und Fußpunktkurven. Den Beschluß des Werkes bildet ein gedrängter, inhaltreicher Rückblick über die historische Entwickelung der Theorie der ebenen Kurven.

Es ist nicht möglich, in einer kurzen Besprechung ein klares Bild von dem überaus reichen Inhalt und der in bezug auf die Zahl der Kurven erschöpfenden Behandlung zu geben; sicher ist, daß niemand, der sich eingehender mit der Kurventheorie beschäftigen will, das Werk unbeachtet lassen darf. Eine wertvolle Ergänzung sind die von dem Bearbeiter der deutschen Ausgabe, Herrn Fritz Schütte, entworfenen Zeichnungen, die uns auf 17 Tafeln 174 Kurven darstellen.

Chemnitz. H. Willgrod.

Močniks Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. Bearb. von **Joh. Spielmann.** I. Abt. (für die I. u. II. Klasse) 26. Aufl. Wien u. Prag 1901, E. Tempsky 76 S. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

— II. Abt. (für die III. u. IV. Klasse) 21. Aufl. 1901. 86 S. gr. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

Močniks Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Bearbeitet von **Joh. Spielmann.** 23. Aufl. 1901. VI u. 297 S. gr. 8⁰. geb. 3 K 80 h.

An den österreichischen höheren Schulen ist dem vorbereitenden geometrischen Unterrichte eine weit größere Zeit eingeräumt als bei uns; im 2. Semester der I. (untersten) Klasse beginnt bereits der Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre und wird durch die vier ersten Klassen durchgeführt. Mit dem Ober-Gymnasium bez. der Oberrealschule (Kl. V) setzt dann der eigentliche wissenschaftliche Unterricht ein, wieder mit den Elementen beginnend.

Demgemäß sind auch die vorliegenden Bücher eingerichtet. Die beiden ersten Teile enthalten die Elemente in anschaulicher Form. Sie genügen recht wohl der Forderung der österreichischen „Instruktionen“: „Das Lehrbuch soll im Untergymnasium mehr den Charakter eines Übungsbuches als eines Lehrbuches haben“. Dabei ist aber auch die Ableitung der Sätze mit der nötigen Ausführlichkeit behandelt. Der erste Teil enthält die Grundvorstellungen, von dem Würfel und dem Zylinder ausgehend, und die Planimetrie in den einzelnen Teilen: Gerade Linie, Kreislinie, Winkel, parallele Linien, Dreiecke, Kongruenz, besondere Eigenschaften des Kreises, Vierecke und Vielecke, der zweite Teil die Flächengleichheit, die Ausmessung der ebenen Figuren und Ähnlichkeit und als letzten Abschnitt die Stereometrie, gerade Linien und Ebenen im Raume und die Körper und ihre Ausmessung.

Das Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen entspricht in der Behandlung des Stoffes den ausführlichen unserer Lehrbücher und enthält die

Planimetrie, ebene Trigonometrie, Sterometrie mit sphärischer Trigonometrie und die analytische Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Auch hier ist überall ein reiches Übungsmaterial beigefügt, das dem Lehrer eine genügende Auswahl gestattet und ein besonderes Übungsbuch unnötig macht. Ein Anhang von 4 Seiten gibt eine ganz kurze Übersicht über die Geschichte der Geometrie.

Chemnitz. H. WILLGROD.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. XV u. 594 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk ist von den interessierten Kreisen mit großer Spannung erwartet worden. Ein deutsches Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, geeignet zur Einführung in diese mit dem praktischen Leben so vielfach verknüpfte Disziplin und ihre hauptsächlichsten Anwendungen, hat stets gefehlt. Die Bearbeitungen fremdsprachlicher Werke, wie z. B. die von Czuber im Jahre 1879 besorgte Ausgabe der A. Meyerschen Vorlesungen, mußten bei dem schnellen Fortschreiten der Wahrscheinlichkeitstheorie gerade innerhalb der beiden letzten Jahrzehnte bald veralten. Wenn gleichwohl dem unzweifelhaft vorhandenen Bedürfnisse nicht schon seit langem abgeholfen worden ist, so dürfte der Grund darin zu finden sein, daß eine sachgemäße Behandlung des Gegenstandes, vor allem der Anwendungen auf Statistik und Versicherungswesen, einen in der Theorie wie in der Praxis gleich erfahrenen Autor erforderte.

Der Verfasser des als neunter Band der Teubnerschen Lehrbücher erschienenen Werkes hat, wie es nach seinen früheren zahlreichen Schriften auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitslehre erwartet werden durfte, seine schwierige Aufgabe im allgemeinen befriedigend gelöst. Die Darstellung der eigentlichen Wahrscheinlichkeitstheorie sowie der Ausgleichungsrechnung kann als meisterhaft bezeichnet werden. Dagegen wird, wie schon hier bemerkt sei, der mit „Lebensversicherungsrechnung" bezeichnete Abschnitt nicht die volle Zustimmung der Praktiker finden, denen der Verfasser übrigens auch als Mathematiker einer Wiener Lebensversicherungs-Gesellschaft bekannt ist.

Den „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" ist der erste Abschnitt des mit „Wahrscheinlichkeitstheorie" betitelten ersten Teiles gewidmet. Die Einleitung gibt eine Übersicht über die bekanntlich sehr strittigen Grundbegriffe und setzt die Beziehungen zur Logik und Erkenntnistheorie (hypothetisches und hypothetisch-disjunktives Urteil, Zufall, gleichmögliche Fälle) auseinander. Die hierbei gewonnene Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit führt sodann zur direkten Wahrscheinlichkeitsbestimmung durch Bildung und Zählung der möglichen und günstigen Fälle, wobei die Formeln der Kombinatorik und namentlich die Stirlingsche Näherungsformel wichtige Dienste leisten. Dieselbe Definition ermöglicht mit Hilfe der Sätze von der vollständigen und der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit eine indirekte Wahrscheinlichkeitsbestimmung, und sie ist endlich auch unbeschränkter Anwendung fähig auf Probleme der „geometrischen Wahrscheinlichkeit", denen kontinuierliche und daher nicht zählbare Mannigfaltig-

wo die f_m Polynome ohne gemeinsame Faktoren sind. n wird der Grad der panalgebraischen Kurve genannt, ν, der höchste Grad der Polynome f_m, ihr Rang. Die größte Zahl der bekannten transzendenten Kurven gehört zu den panalgebraischen Kurven. Von den transzendenten Kurven seien nur angegeben die verschiedenen Spiralen, die Cykloiden, die Traktrixkurven, die Kettenlinien, unter den abgeleiteten die Evoluten und Evolventen, die Parallelkurven, Radialen, Brennlinien und Fußpunktkurven. Den Beschluß des Werkes bildet ein gedrängter, inhaltreicher Rückblick über die historische Entwickelung der Theorie der ebenen Kurven.

Es ist nicht möglich, in einer kurzen Besprechung ein klares Bild von dem überaus reichen Inhalt und der in bezug auf die Zahl der Kurven erschöpfenden Behandlung zu geben; sicher ist, daß niemand, der sich eingehender mit der Kurventheorie beschäftigen will, das Werk unbeachtet lassen darf. Eine wertvolle Ergänzung sind die von dem Bearbeiter der deutschen Ausgabe, Herrn Fritz Schütte, entworfenen Zeichnungen, die uns auf 17 Tafeln 174 Kurven darstellen.

Chemnitz. H. Willgrod.

Močniks Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. Bearb. von **Joh. Spielmann.** I. Abt. (für die I. u. II. Klasse) 26. Aufl. Wien u. Prag 1901, E. Tempsky 76 S. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

— II. Abt. (für die III. u. IV. Klasse) 21. Aufl. 1901. 86 S. gr. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

Močniks Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Bearbeitet von **Joh. Spielmann.** 23. Aufl. 1901. VI u. 297 S. gr. 8⁰. geb. 3 K 80 h.

An den österreichischen höheren Schulen ist dem vorbereitenden geometrischen Unterrichte eine weit größere Zeit eingeräumt als bei uns; im 2. Semester der I. (untersten) Klasse beginnt bereits der Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre und wird durch die vier ersten Klassen durchgeführt. Mit dem Ober-Gymnasium bez. der Oberrealschule (Kl. V) setzt dann der eigentliche wissenschaftliche Unterricht ein, wieder mit den Elementen beginnend.

Demgemäß sind auch die vorliegenden Bücher eingerichtet. Die beiden ersten Teile enthalten die Elemente in anschaulicher Form. Sie genügen recht wohl der Forderung der österreichischen „Instruktionen“: „Das Lehrbuch soll im Untergymnasium mehr den Charakter eines Übungsbuches als eines Lehrbuches haben“. Dabei ist aber auch die Ableitung der Sätze mit der nötigen Ausführlichkeit behandelt. Der erste Teil enthält die Grundvorstellungen, von dem Würfel und dem Zylinder ausgehend, und die Planimetrie in den einzelnen Teilen: Gerade Linie, Kreislinie, Winkel, parallele Linien, Dreiecke, Kongruenz, besondere Eigenschaften des Kreises, Vierecke und Vielecke, der zweite Teil die Flächengleichheit, die Ausmessung der ebenen Figuren und Ähnlichkeit und als letzten Abschnitt die Stereometrie, gerade Linien und Ebenen im Raume und die Körper und ihre Ausmessung.

Das Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen entspricht in der Behandlung des Stoffes den ausführlichen unserer Lehrbücher und enthält die

Planimetrie, ebene Trigonometrie, Sterometrie mit sphärischer Trigonometrie und die analytische Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Auch hier ist überall ein reiches Übungsmaterial beigefügt, das dem Lehrer eine genügende Auswahl gestattet und ein besonderes Übungsbuch unnötig macht. Ein Anhang von 4 Seiten gibt eine ganz kurze Übersicht über die Geschichte der Geometrie.

Chemnitz. H. WILLGROD.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. XV u. 594 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk ist von den interessierten Kreisen mit großer Spannung erwartet worden. Ein deutsches Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, geeignet zur Einführung in diese mit dem praktischen Leben so vielfach verknüpfte Disziplin und ihre hauptsächlichsten Anwendungen, hat stets gefehlt. Die Bearbeitungen fremdsprachlicher Werke, wie z. B. die von Czuber im Jahre 1879 besorgte Ausgabe der A. Meyerschen Vorlesungen, mußten bei dem schnellen Fortschreiten der Wahrscheinlichkeitstheorie gerade innerhalb der beiden letzten Jahrzehnte bald veralten. Wenn gleichwohl dem unzweifelhaft vorhandenen Bedürfnisse nicht schon seit langem abgeholfen worden ist, so dürfte der Grund darin zu finden sein, daß eine sachgemäße Behandlung des Gegenstandes, vor allem der Anwendungen auf Statistik und Versicherungswesen, einen in der Theorie wie in der Praxis gleich erfahrenen Autor erforderte.

Der Verfasser des als neunter Band der Teubnerschen Lehrbücher erschienenen Werkes hat, wie es nach seinen früheren zahlreichen Schriften auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitslehre erwartet werden durfte, seine schwierige Aufgabe im allgemeinen befriedigend gelöst. Die Darstellung der eigentlichen Wahrscheinlichkeitstheorie sowie der Ausgleichungsrechnung kann als meisterhaft bezeichnet werden. Dagegen wird, wie schon hier bemerkt sei, der mit „Lebensversicherungsrechnung" bezeichnete Abschnitt nicht die volle Zustimmung der Praktiker finden, denen der Verfasser übrigens auch als Mathematiker einer Wiener Lebensversicherungs-Gesellschaft bekannt ist.

Den „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" ist der erste Abschnitt des mit „Wahrscheinlichkeitstheorie" betitelten ersten Teiles gewidmet. Die Einleitung gibt eine Übersicht über die bekanntlich sehr strittigen Grundbegriffe und setzt die Beziehungen zur Logik und Erkenntnistheorie (hypothetisches und hypothetisch-disjunktives Urteil, Zufall, gleichmögliche Fälle) auseinander. Die hierbei gewonnene Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit führt sodann zur direkten Wahrscheinlichkeitsbestimmung durch Bildung und Zählung der möglichen und günstigen Fälle, wobei die Formeln der Kombinatorik und namentlich die Stirlingsche Näherungsformel wichtige Dienste leisten. Dieselbe Definition ermöglicht mit Hilfe der Sätze von der vollständigen und der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit eine indirekte Wahrscheinlichkeitsbestimmung, und sie ist endlich auch unbeschränkter Anwendung fähig auf Probleme der „geometrischen Wahrscheinlichkeit", denen kontinuierliche und daher nicht zählbare Mannigfaltig-

keiten möglicher und günstiger Fälle zugrunde liegen. Der zweite Abschnitt handelt von den Wahrscheinlichkeiten, welche die Ergebnisse wiederholter Beobachtungen betreffen, und hat demzufolge die Theoreme von Bernoulli und Poisson zum Gegenstande. Auf die Formulierung dieser Lehrsätze und des aus ihnen folgenden „Gesetzes der großen Zahlen" hat der Verfasser die größte Sorgfalt verwendet, wie er andererseits ihre Tragweite wiederholt und entschieden abgrenzt. Insbesondere nimmt er bei der Besprechung des letzterwähnten Gesetzes Stellung gegen die dem Praktiker oft begegnende Ansicht, als könne das Gesetz der großen Zahlen zur Vorhersage über das künftige Geschehen dienen; es sei vielmehr ein Wahrscheinlichkeitssatz, der wie jeder andere, gleichgültig ob es sich um eine einmalige oder eine wiederholte Realisierung handelt, nur das Maß einer Erwartung bestimme, während über den Verlauf des wirklichen Geschehens kein Satz der Wahrscheinlichkeitslehre eine Auskunft zu geben vermöge. In diesem Zusammenhange bietet sich auch Gelegenheit, den von Lexis eingeführten Begriff der Dispersion und ihre Unterscheidung in normale, unternormale und übernormale zu entwickeln und an instruktiven Beispielen zu erläutern.

Mit dem zweiten Abschnitte ist die Theorie der Wahrscheinlichkeit „a priori" abgeschlossen, und es folgt im dritten Abschnitte die Darstellung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit, wobei die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen streng auseinander zu halten sind. Das Theorem von Bayes, dessen Herleitung mit Hilfe des Urnenschemas erfolgt, gestattet unter gewissen Voraussetzungen (Unveränderlichkeit der bedingenden Umstände während der Beobachtungen und gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit der möglichen Hypothesen), aus dem Ergebnis einer ausgedehnten Beobachtungsreihe einen Schluß auf die unbekannten Wahrscheinlichkeiten der beteiligten Ereignisse zu ziehen; die für die Praxis außerordentlich wichtige Ergänzung dieses Theorems bildet die Umkehrung des Gesetzes der großen Zahlen, nach welcher die Zahl der Beobachtungen stets so groß gewählt werden kann, daß mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, die unbekannte Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses liege innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen. Die Bayessche Regel bietet auch eine Handhabe zur Bestimmung der aus Versuchen oder Beobachtungen für ein zufälliges Ereignis abgeleiteten Wahrscheinlichkeit, indem man nämlich dem Ereignis diejenige Wahrscheinlichkeit zuschreibt, welche sich aus der wahrscheinlichsten Hypothese über das beobachtete Ereignis dafür ergibt. Die andere Methode zur Bestimmung jener „empirischen" Wahrscheinlichkeit, bei der man alle mit dem beobachteten Ereignisse vereinbaren Hypothesen, jede entsprechend dem Grade ihrer eigenen Wahrscheinlichkeit, mitwirken läßt, hat eine geringe praktische Bedeutung.

In dem vierten und letzten Abschnitte des ersten Teiles, betitelt „Bewertung von Vor- und Nachteilen, welche an zufällige Ereignisse geknüpft sind", finden die Begriffe der mathematischen Erwartung, des mathematischen Risikos und der moralischen Erwartung eine eingehende Behandlung. Die hierher gehörenden Probleme sind schon von den Klassikern der Wahrscheinlichkeitstheorie studiert worden. Der Verfasser verwendet zu ihrer Lösung teilweise die sehr allgemeinen Sätze Tschebyscheffs über die Mittelwerte

dem Zufall unterworfener Größen (Journal de Liouville, XII, 1867) — auch das Gesetz der großen Zahlen ordnet sich diesen Sätzen unter — und macht sodann eine entsprechende Anwendung auf die Risikotheorie. Mit dankenswerter Ausführlichkeit wird endlich die Theorie der moralischen Erwartung entwickelt, zu der bekanntlich das berühmte Petersburger Problem den Anstoß gegeben hat. Ausgehend von der Bernoullischen Hypothese („Der aus einem beliebig kleinen Vermögenszuwachs resultierende Vorteil, oder sein moralischer Wert, ist dem Zuwachs selbst direkt, dem vorhandenen Vermögen umgekehrt proportional"), weist der Verfasser auf die weittragende Bedeutung dieser oft unterschätzten Theorie hin und schildert, inwiefern sie die Grundlage der modernen Wertlehre (Begriff des „Grenznutzens") geworden ist und sich selbst der Anwendung auf psychologische und politische Probleme fähig gezeigt hat.

Die im zweiten Teile des Werkes entwickelte Theorie der Ausgleichungsrechnung gliedert sich in die einleitende Theorie der Beobachtungsfehler und die eigentliche Lehre der Kombination von Beobachtungen. Das Fehlergesetz wird einmal, in Anlehnung an den Gedankengang M. W. Croftons, aus der Hypothese der „Elementarfehler", und an zweiter Stelle nach Gauß aus der des arithmetischen Mittels hergeleitet. Es folgt die Erläuterung des Präzisionsmaßes, des Fehlerrisikos, des durchschnittlichen, mittleren und wahrscheinlichen Fehlers und eine vergleichende Betrachtung der Genauigkeitsmaße. In der gleichen herkömmlichen Weise findet die Kombinationstheorie und die Methode der kleinsten Quadrate sachgemäße Erledigung. Ein näheres Eingehen auf die Einzelheiten erscheint mit Rücksicht auf das bekannte Buch des Verfassers (Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891) unnötig; doch ist hier die Stelle, auf die geschickt ausgewählten und sorgfältig durchgeführten zahlreichen Beispiele hinzuweisen, von denen die Darstellung der bis hierher besprochenen Theorien belebt wird.

Mit dem dritten Teile, welcher der mathematischen Statistik gewidmet ist, betritt der Verfasser ein Gebiet, das einer zusammenhängenden Schilderung bisher entbehrte. Von dieser Erwägung aus ist vor allem der erste, die menschlichen Massenerscheinungen vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelnde Abschnitt zu beurteilen. Die hier erörterten Fragen haben teilweise schon Laplace beschäftigt, während eine befriedigende Lösung des Hauptproblems, nämlich der Auffindung von Kriterien für die Stabilität statistischer Verhältniszahlen und Mittelwerte, den schon erwähnten Lexisschen Untersuchungen vorbehalten blieb. Eine ausführliche Darstellung der Dispersionstheorie und einiger darauf bezüglicher Untersuchungsergebnisse finden somit hier einen passenden Anschluß an die grundlegenden Entwicklungen über die Anwendbarkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Statistik. Von den Beispielen seien erwähnt das Geschlechtsverhältnis der Geborenen, — wobei sich die relative Häufigkeit der Knabengeburten in dem von Lexis betrachteten Beobachtungsgebiete als eine typische Wahrscheinlichkeitsgröße mit mäßig übernormaler Dispersion herausstellt, — und die Sterblichkeitsverhältnisse auf den verschiedenen Altersstufen, mit dem gleichen Ergebnis für die Sterblichkeitsquotienten. Den Schluß des ersten Abschnittes bildet die Ausdehnung der Dispersionstheorie auf die sogenannten extensiven Größen, die durch benannte Zahlen zum Ausdruck kommen, im Gegensatz zu den intensiven statistischen Größen, welche die Intensität des

keiten möglicher und günstiger Fälle zugrunde liegen. Der zweite Abschnitt handelt von den Wahrscheinlichkeiten, welche die Ergebnisse wiederholter Beobachtungen betreffen, und hat demzufolge die Theoreme von Bernoulli und Poisson zum Gegenstande. Auf die Formulierung dieser Lehrsätze und des aus ihnen folgenden „Gesetzes der großen Zahlen" hat der Verfasser die größte Sorgfalt verwendet, wie er andererseits ihre Tragweite wiederholt und entschieden abgrenzt. Insbesondere nimmt er bei der Besprechung des letzterwähnten Gesetzes Stellung gegen die dem Praktiker oft begegnende Ansicht, als könne das Gesetz der großen Zahlen zur Vorhersage über das künftige Geschehen dienen; es sei vielmehr ein Wahrscheinlichkeitssatz, der wie jeder andere, gleichgültig ob es sich um eine einmalige oder eine wiederholte Realisierung handelt, nur das Maß einer Erwartung bestimme, während über den Verlauf des wirklichen Geschehens kein Satz der Wahrscheinlichkeitslehre eine Auskunft zu geben vermöge. In diesem Zusammenhange bietet sich auch Gelegenheit, den von Lexis eingeführten Begriff der Dispersion und ihre Unterscheidung in normale, unternormale und übernormale zu entwickeln und an instruktiven Beispielen zu erläutern.

Mit dem zweiten Abschnitte ist die Theorie der Wahrscheinlichkeit „a priori" abgeschlossen, und es folgt im dritten Abschnitte die Darstellung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit, wobei die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen streng auseinander zu halten sind. Das Theorem von Bayes, dessen Herleitung mit Hilfe des Urnenschemas erfolgt, gestattet unter gewissen Voraussetzungen (Unveränderlichkeit der bedingenden Umstände während der Beobachtungen und gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit der möglichen Hypothesen), aus dem Ergebnis einer ausgedehnten Beobachtungsreihe einen Schluß auf die unbekannten Wahrscheinlichkeiten der beteiligten Ereignisse zu ziehen; die für die Praxis außerordentlich wichtige Ergänzung dieses Theorems bildet die Umkehrung des Gesetzes der großen Zahlen, nach welcher die Zahl der Beobachtungen stets so groß gewählt werden kann, daß mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, die unbekannte Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses liege innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen. Die Bayessche Regel bietet auch eine Handhabe zur Bestimmung der aus Versuchen oder Beobachtungen für ein zufälliges Ereignis abgeleiteten Wahrscheinlichkeit, indem man nämlich dem Ereignis diejenige Wahrscheinlichkeit zuschreibt, welche sich aus der wahrscheinlichsten Hypothese über das beobachtete Ereignis dafür ergibt. Die andere Methode zur Bestimmung jener „empirischen" Wahrscheinlichkeit, bei der man alle mit dem beobachteten Ereignisse vereinbaren Hypothesen, jede entsprechend dem Grade ihrer eigenen Wahrscheinlichkeit, mitwirken läßt, hat eine geringe praktische Bedeutung.

In dem vierten und letzten Abschnitte des ersten Teiles, betitelt „Bewertung von Vor- und Nachteilen, welche an zufällige Ereignisse geknüpft sind", finden die Begriffe der mathematischen Erwartung, des mathematischen Risikos und der moralischen Erwartung eine eingehende Behandlung. Die hierher gehörenden Probleme sind schon von den Klassikern der Wahrscheinlichkeitstheorie studiert worden. Der Verfasser verwendet zu ihrer Lösung teilweise die sehr allgemeinen Sätze Tschebyscheffs über die Mittelwerte

dem Zufall unterworfener Größen (Journal de Liouville, XII, 1867) — auch das Gesetz der großen Zahlen ordnet sich diesen Sätzen unter — und macht sodann eine entsprechende Anwendung auf die Risikotheorie. Mit dankenswerter Ausführlichkeit wird endlich die Theorie der moralischen Erwartung entwickelt, zu der bekanntlich das berühmte Petersburger Problem den Anstoß gegeben hat. Ausgehend von der Bernoullischen Hypothese („Der aus einem beliebig kleinen Vermögenszuwachs resultierende Vorteil, oder sein moralischer Wert, ist dem Zuwachs selbst direkt, dem vorhandenen Vermögen umgekehrt proportional"), weist der Verfasser auf die weittragende Bedeutung dieser oft unterschätzten Theorie hin und schildert, inwiefern sie die Grundlage der modernen Wertlehre (Begriff des „Grenznutzens") geworden ist und sich selbst der Anwendung auf psychologische und politische Probleme fähig gezeigt hat.

Die im zweiten Teile des Werkes entwickelte Theorie der Ausgleichungsrechnung gliedert sich in die einleitende Theorie der Beobachtungsfehler und die eigentliche Lehre der Kombination von Beobachtungen. Das Fehlergesetz wird einmal, in Anlehnung an den Gedankengang M. W. Croftons, aus der Hypothese der „Elementarfehler", und an zweiter Stelle nach Gauß aus der des arithmetischen Mittels hergeleitet. Es folgt die Erläuterung des Präzisionsmaßes, des Fehlerrisikos, des durchschnittlichen, mittleren und wahrscheinlichen Fehlers und eine vergleichende Betrachtung der Genauigkeitsmaße. In der gleichen herkömmlichen Weise findet die Kombinationstheorie und die Methode der kleinsten Quadrate sachgemäße Erledigung. Ein näheres Eingehen auf die Einzelheiten erscheint mit Rücksicht auf das bekannte Buch des Verfassers (Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891) unnötig; doch ist hier die Stelle, auf die geschickt ausgewählten und sorgfältig durchgeführten zahlreichen Beispiele hinzuweisen, von denen die Darstellung der bis hierher besprochenen Theorien belebt wird.

Mit dem dritten Teile, welcher der mathematischen Statistik gewidmet ist, betritt der Verfasser ein Gebiet, das einer zusammenhängenden Schilderung bisher entbehrte. Von dieser Erwägung aus ist vor allem der erste, die menschlichen Massenerscheinungen vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelnde Abschnitt zu beurteilen. Die hier erörterten Fragen haben teilweise schon Laplace beschäftigt, während eine befriedigende Lösung des Hauptproblems, nämlich der Auffindung von Kriterien für die Stabilität statistischer Verhältniszahlen und Mittelwerte, den schon erwähnten Lexisschen Untersuchungen vorbehalten blieb. Eine ausführliche Darstellung der Dispersionstheorie und einiger darauf bezüglicher Untersuchungsergebnisse finden somit hier einen passenden Anschluß an die grundlegenden Entwicklungen über die Anwendbarkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Statistik. Von den Beispielen seien erwähnt das Geschlechtsverhältnis der Geborenen, — wobei sich die relative Häufigkeit der Knabengeburten in dem von Lexis betrachteten Beobachtungsgebiete als eine typische Wahrscheinlichkeitsgröße mit mäßig übernormaler Dispersion herausstellt, — und die Sterblichkeitsverhältnisse auf den verschiedenen Altersstufen, mit dem gleichen Ergebnis für die Sterblichkeitsquotienten. Den Schluß des ersten Abschnittes bildet die Ausdehnung der Dispersionstheorie auf die sogenannten extensiven Größen, die durch benannte Zahlen zum Ausdruck kommen, im Gegensatz zu den intensiven statistischen Größen, welche die Intensität des

wo die f_m Polynome ohne gemeinsame Faktoren sind. n wird der Grad der panalgebraischen Kurve genannt, ν, der höchste Grad der Polynome f_m, ihr Rang. Die größte Zahl der bekannten transzendenten Kurven gehört zu den panalgebraischen Kurven. Von den transzendenten Kurven seien nur angegeben die verschiedenen Spiralen, die Cykloiden, die Traktrixkurven, die Kettenlinien, unter den abgeleiteten die Evoluten und Evolventen, die Parallelkurven, Radialen, Brennlinien und Fußpunktkurven. Den Beschluß des Werkes bildet ein gedrängter, inhaltreicher Rückblick über die historische Entwickelung der Theorie der ebenen Kurven.

Es ist nicht möglich, in einer kurzen Besprechung ein klares Bild von dem überaus reichen Inhalt und der in bezug auf die Zahl der Kurven erschöpfenden Behandlung zu geben; sicher ist, daß niemand, der sich eingehender mit der Kurventheorie beschäftigen will, das Werk unbeachtet lassen darf. Eine wertvolle Ergänzung sind die von dem Bearbeiter der deutschen Ausgabe, Herrn Fritz Schütte, entworfenen Zeichnungen, die uns auf 17 Tafeln 174 Kurven darstellen.

Chemnitz. H. Willgrod.

Močniks Geometrische Anschauungslehre für Unter-Gymnasien. Bearb. von **Joh. Spielmann.** I. Abt. (für die I. u. II. Klasse) 26. Aufl. Wien u. Prag 1901, E. Tempsky 76 S. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

— II. Abt. (für die III. u. IV. Klasse) 21. Aufl. 1901. 86 S. gr. 8⁰. geb. 1 K 50 h.

Močniks Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Realschulen. Bearbeitet von **Joh. Spielmann.** 23. Aufl. 1901. VI u. 297 S. gr. 8⁰. geb. 3 K 80 h.

An den österreichischen höheren Schulen ist dem vorbereitenden geometrischen Unterrichte eine weit größere Zeit eingeräumt als bei uns; im 2. Semester der I. (untersten) Klasse beginnt bereits der Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre und wird durch die vier ersten Klassen durchgeführt. Mit dem Ober-Gymnasium bez. der Oberrealschule (Kl. V) setzt dann der eigentliche wissenschaftliche Unterricht ein, wieder mit den Elementen beginnend.

Demgemäß sind auch die vorliegenden Bücher eingerichtet. Die beiden ersten Teile enthalten die Elemente in anschaulicher Form. Sie genügen recht wohl der Forderung der österreichischen „Instruktionen“: „Das Lehrbuch soll im Untergymnasium mehr den Charakter eines Übungsbuches als eines Lehrbuches haben“. Dabei ist aber auch die Ableitung der Sätze mit der nötigen Ausführlichkeit behandelt. Der erste Teil enthält die Grundvorstellungen, von dem Würfel und dem Zylinder ausgehend, und die Planimetrie in den einzelnen Teilen: Gerade Linie, Kreislinie, Winkel, parallele Linien, Dreiecke, Kongruenz, besondere Eigenschaften des Kreises, Vierecke und Vielecke, der zweite Teil die Flächengleichheit, die Ausmessung der ebenen Figuren und Ähnlichkeit und als letzten Abschnitt die Stereometrie, gerade Linien und Ebenen im Raume und die Körper und ihre Ausmessung.

Das Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen entspricht in der Behandlung des Stoffes den ausführlichen unserer Lehrbücher und enthält die

Planimetrie, ebene Trigonometrie, Sterometrie mit sphärischer Trigonometrie und die analytische Geometrie der Geraden und der Kegelschnitte. Auch hier ist überall ein reiches Übungsmaterial beigefügt, das dem Lehrer eine genügende Auswahl gestattet und ein besonderes Übungsbuch unnötig macht. Ein Anhang von 4 Seiten gibt eine ganz kurze Übersicht über die Geschichte der Geometrie.

Chemnitz. H. Willgrod.

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. XV u. 594 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk ist von den interessierten Kreisen mit großer Spannung erwartet worden. Ein deutsches Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, geeignet zur Einführung in diese mit dem praktischen Leben so vielfach verknüpfte Disziplin und ihre hauptsächlichsten Anwendungen, hat stets gefehlt. Die Bearbeitungen fremdsprachlicher Werke, wie z. B. die von Czuber im Jahre 1879 besorgte Ausgabe der A. Meyerschen Vorlesungen, mußten bei dem schnellen Fortschreiten der Wahrscheinlichkeitstheorie gerade innerhalb der beiden letzten Jahrzehnte bald veralten. Wenn gleichwohl dem unzweifelhaft vorhandenen Bedürfnisse nicht schon seit langem abgeholfen worden ist, so dürfte der Grund darin zu finden sein, daß eine sachgemäße Behandlung des Gegenstandes, vor allem der Anwendungen auf Statistik und Versicherungswesen, einen in der Theorie wie in der Praxis gleich erfahrenen Autor erforderte.

Der Verfasser des als neunter Band der Teubnerschen Lehrbücher erschienenen Werkes hat, wie es nach seinen früheren zahlreichen Schriften auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitslehre erwartet werden durfte, seine schwierige Aufgabe im allgemeinen befriedigend gelöst. Die Darstellung der eigentlichen Wahrscheinlichkeitstheorie sowie der Ausgleichungsrechnung kann als meisterhaft bezeichnet werden. Dagegen wird, wie schon hier bemerkt sei, der mit „Lebensversicherungsrechnung" bezeichnete Abschnitt nicht die volle Zustimmung der Praktiker finden, denen der Verfasser übrigens auch als Mathematiker einer Wiener Lebensversicherungs-Gesellschaft bekannt ist.

Den „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" ist der erste Abschnitt des mit „Wahrscheinlichkeitstheorie" betitelten ersten Teiles gewidmet. Die Einleitung gibt eine Übersicht über die bekanntlich sehr strittigen Grundbegriffe und setzt die Beziehungen zur Logik und Erkenntnistheorie (hypothetisches und hypothetisch-disjunktives Urteil, Zufall, gleichmögliche Fälle) auseinander. Die hierbei gewonnene Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit führt sodann zur direkten Wahrscheinlichkeitsbestimmung durch Bildung und Zählung der möglichen und günstigen Fälle, wobei die Formeln der Kombinatorik und namentlich die Stirlingsche Näherungsformel wichtige Dienste leisten. Dieselbe Definition ermöglicht mit Hilfe der Sätze von der vollständigen und der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit eine indirekte Wahrscheinlichkeitsbestimmung, und sie ist endlich auch unbeschränkter Anwendung fähig auf Probleme der „geometrischen Wahrscheinlichkeit", denen kontinuierliche und daher nicht zählbare Mannigfaltig-

keiten möglicher und günstiger Fälle zugrunde liegen. Der zweite Abschnitt handelt von den Wahrscheinlichkeiten, welche die Ergebnisse wiederholter Beobachtungen betreffen, und hat demzufolge die Theoreme von Bernoulli und Poisson zum Gegenstande. Auf die Formulierung dieser Lehrsätze und des aus ihnen folgenden „Gesetzes der großen Zahlen" hat der Verfasser die größte Sorgfalt verwendet, wie er andererseits ihre Tragweite wiederholt und entschieden abgrenzt. Insbesondere nimmt er bei der Besprechung des letzterwähnten Gesetzes Stellung gegen die dem Praktiker oft begegnende Ansicht, als könne das Gesetz der großen Zahlen zur Vorhersage über das künftige Geschehen dienen; es sei vielmehr ein Wahrscheinlichkeitssatz, der wie jeder andere, gleichgültig ob es sich um eine einmalige oder eine wiederholte Realisierung handelt, nur das Maß einer Erwartung bestimme, während über den Verlauf des wirklichen Geschehens kein Satz der Wahrscheinlichkeitslehre eine Auskunft zu geben vermöge. In diesem Zusammenhange bietet sich auch Gelegenheit, den von Lexis eingeführten Begriff der Dispersion und ihre Unterscheidung in normale, unternormale und übernormale zu entwickeln und an instruktiven Beispielen zu erläutern.

Mit dem zweiten Abschnitte ist die Theorie der Wahrscheinlichkeit „a priori" abgeschlossen, und es folgt im dritten Abschnitte die Darstellung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit, wobei die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ursachen eines beobachteten Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse auf Grund von Beobachtungen streng auseinander zu halten sind. Das Theorem von Bayes, dessen Herleitung mit Hilfe des Urnenschemas erfolgt, gestattet unter gewissen Voraussetzungen (Unveränderlichkeit der bedingenden Umstände während der Beobachtungen und gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit der möglichen Hypothesen), aus dem Ergebnis einer ausgedehnten Beobachtungsreihe einen Schluß auf die unbekannten Wahrscheinlichkeiten der beteiligten Ereignisse zu ziehen; die für die Praxis außerordentlich wichtige Ergänzung dieses Theorems bildet die Umkehrung des Gesetzes der großen Zahlen, nach welcher die Zahl der Beobachtungen stets so groß gewählt werden kann, daß mit einer der Einheit beliebig nahen Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, die unbekannte Wahrscheinlichkeit des beobachteten Ereignisses liege innerhalb beliebig eng festgesetzter Grenzen. Die Bayessche Regel bietet auch eine Handhabe zur Bestimmung der aus Versuchen oder Beobachtungen für ein zufälliges Ereignis abgeleiteten Wahrscheinlichkeit, indem man nämlich dem Ereignis diejenige Wahrscheinlichkeit zuschreibt, welche sich aus der wahrscheinlichsten Hypothese über das beobachtete Ereignis dafür ergibt. Die andere Methode zur Bestimmung jener „empirischen" Wahrscheinlichkeit, bei der man alle mit dem beobachteten Ereignisse vereinbaren Hypothesen, jede entsprechend dem Grade ihrer eigenen Wahrscheinlichkeit, mitwirken läßt, hat eine geringe praktische Bedeutung.

In dem vierten und letzten Abschnitte des ersten Teiles, betitelt „Bewertung von Vor- und Nachteilen, welche an zufällige Ereignisse geknüpft sind", finden die Begriffe der mathematischen Erwartung, des mathematischen Risikos und der moralischen Erwartung eine eingehende Behandlung. Die hierher gehörenden Probleme sind schon von den Klassikern der Wahrscheinlichkeitstheorie studiert worden. Der Verfasser verwendet zu ihrer Lösung teilweise die sehr allgemeinen Sätze Tschebyscheffs über die Mittelwerte

dem Zufall unterworfener Größen (Journal de Liouville, XII, 1867) — auch das Gesetz der großen Zahlen ordnet sich diesen Sätzen unter — und macht sodann eine entsprechende Anwendung auf die Risikotheorie. Mit dankenswerter Ausführlichkeit wird endlich die Theorie der moralischen Erwartung entwickelt, zu der bekanntlich das berühmte Petersburger Problem den Anstoß gegeben hat. Ausgehend von der Bernoullischen Hypothese („Der aus einem beliebig kleinen Vermögenszuwachs resultierende Vorteil, oder sein moralischer Wert, ist dem Zuwachs selbst direkt, dem vorhandenen Vermögen umgekehrt proportional“), weist der Verfasser auf die weittragende Bedeutung dieser oft unterschätzten Theorie hin und schildert, inwiefern sie die Grundlage der modernen Wertlehre (Begriff des „Grenznutzens“) geworden ist und sich selbst der Anwendung auf psychologische und politische Probleme fähig gezeigt hat.

Die im zweiten Teile des Werkes entwickelte Theorie der Ausgleichungsrechnung gliedert sich in die einleitende Theorie der Beobachtungsfehler und die eigentliche Lehre der Kombination von Beobachtungen. Das Fehlergesetz wird einmal, in Anlehnung an den Gedankengang M. W. Croftons, aus der Hypothese der „Elementarfehler“, und an zweiter Stelle nach Gauß aus der des arithmetischen Mittels hergeleitet. Es folgt die Erläuterung des Präzisionsmaßes, des Fehlerrisikos, des durchschnittlichen, mittleren und wahrscheinlichen Fehlers und eine vergleichende Betrachtung der Genauigkeitsmaße. In der gleichen herkömmlichen Weise findet die Kombinationstheorie und die Methode der kleinsten Quadrate sachgemäße Erledigung. Ein näheres Eingehen auf die Einzelheiten erscheint mit Rücksicht auf das bekannte Buch des Verfassers (Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891) unnötig; doch ist hier die Stelle, auf die geschickt ausgewählten und sorgfältig durchgeführten zahlreichen Beispiele hinzuweisen, von denen die Darstellung der bis hierher besprochenen Theorien belebt wird.

Mit dem dritten Teile, welcher der mathematischen Statistik gewidmet ist, betritt der Verfasser ein Gebiet, das einer zusammenhängenden Schilderung bisher entbehrte. Von dieser Erwägung aus ist vor allem der erste, die menschlichen Massenerscheinungen vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelnde Abschnitt zu beurteilen. Die hier erörterten Fragen haben teilweise schon Laplace beschäftigt, während eine befriedigende Lösung des Hauptproblems, nämlich der Auffindung von Kriterien für die Stabilität statistischer Verhältniszahlen und Mittelwerte, den schon erwähnten Lexisschen Untersuchungen vorbehalten blieb. Eine ausführliche Darstellung der Dispersionstheorie und einiger darauf bezüglicher Untersuchungsergebnisse finden somit hier einen passenden Anschluß an die grundlegenden Entwicklungen über die Anwendbarkeit des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Statistik. Von den Beispielen seien erwähnt das Geschlechtsverhältnis der Geborenen, — wobei sich die relative Häufigkeit der Knabengeburten in dem von Lexis betrachteten Beobachtungsgebiete als eine typische Wahrscheinlichkeitsgröße mit mäßig übernormaler Dispersion herausstellt, — und die Sterblichkeitsverhältnisse auf den verschiedenen Altersstufen, mit dem gleichen Ergebnis für die Sterblichkeitsquotienten. Den Schluß des ersten Abschnittes bildet die Ausdehnung der Dispersionstheorie auf die sogenannten extensiven Größen, die durch benannte Zahlen zum Ausdruck kommen, im Gegensatz zu den intensiven statistischen Größen, welche die Intensität des

Auftretens, die Häufigkeit einer Erscheinung kennzeichnende Relativzahlen darstellen.

Der weitere Inhalt des dritten Teiles ist den speziellen Problemen gewidmet, die mit der Sterblichkeit und der Invalidität zusammenhängen; insbesondere wird der Sterblichkeitsmessung und der formalen Bevölkerungstheorie ein breiter Raum zugewiesen. Bei Besprechung der Sterblichkeitstafeln geht der Verfasser auf die Deutsche Tafel vom Jahre 1887 sowie auf die von den meisten deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften benutzte, aus Beobachtungen an Versicherten („ausgewählten Leben") gewonnene „Sterbetafel der 23 deutschen Gesellschaften" ausführlich ein. Hieran schließt sich eine die neuesten Forschungen berücksichtigende Darstellung der Lehre von der Ausgleichung der Sterbetafeln und endlich, im Schlußparagraphen, die Übertragung gewisser Ergebnisse auf das verwandte Problem der Invalidität, wobei übrigens, was erwähnt werden muß, das wichtige Moment der Invaliditätsdauer an keiner Stelle Erwähnung gefunden hat.

Der vierte und letzte Teil, von den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung der umfangreichste, ist mit „Lebensversicherungsrechnung" betitelt und zerfällt in vier Abschnitte: Versicherungswerte, Prämien, Prämienreserven, das Risiko in der Lebensversicherung. Es ist schon im Eingange dieser Besprechung betont worden, daß der Fachmann der ganzen Anlage und demzufolge auch den meisten Ergebnissen dieses Teiles keinen unbedingten Beifall zollen kann. Was aber der Praktiker in der Lebensversicherung nicht gutzuheißen vermag, das hat für sie auch keine theoretische Bedeutung, weil Theorie und Praxis der Lebensversicherungswissenschaft untrennbar sind. Der Verfasser geht von der Annahme aus, daß die Grundlage der Lebensversicherung eine zweifache sei: aus der Erfahrung abgeleitete statistische Daten, welche den Verlauf der in Betracht kommenden menschlichen Massenerscheinung darstellen, und der Zinsfuß als der einfachste Ausdruck für die Stärke der Verzinsung. Mit dieser Annahme folgt er der zwar hergebrachten und sogar von Staatswegen sanktionierten, nichtdestoweniger aber unwissenschaftlichen und unpraktischen Methode der „Nettoprämien"; die dritte Rechnungsgrundlage, der Verwaltungskostensatz, wird gänzlich außer Acht gelassen. Es ist hier nicht der Ort, über die Motive zu reden, die in den letzten Jahren zu eingehenden Kritiken jener dogmatischen Methode geführt haben. Allen Lesern des Czuberschen Werkes aber, die in die wirklichen Verhältnisse der Lebenversicherung einen Einblick gewinnen und sich die Grundsätze der praktischen Lebensversicherungmathematik aneignen wollen, sei das Studium der neuesten Fachliteratur dringend anempfohlen.

Abgesehen von dem grundsätzlichen Widerspruch zwischen den theoretischen Entwickelungen und den Erfahrungstatsachen krankt die Darstellung des vierten Teiles an einer oft ermüdenden Breite. Dieselben einfachen Schlußfolgerungen werden immer aufs neue reproduziert, die elementaren Berechnungen von „Versicherungswerten" und Prämien bis in die kleinsten numerischen Einzelheiten wiederholt. Daß die ganze Reihe der Beispiele für Versicherungen mit Rückgewähr der Nettoprämien, weil praktisch bedeutungslos, ohne Schaden hätte weggelassen werden können, wird auch von Vertretern der Nettoprämienmethode zugegeben werden, und Ähnliches gilt für die mit großer Weitschweifigkeit behandelten Versicherungen verbundener Leben. Dagegen sind wichtige Fragen, wie die Lehre von der Gewinnbeteiligung, überhaupt

nicht erwähnt oder, wie die Theorie des Rückkaufs, nur kurz gestreift. Die Definition der Prämienreserve und die daran sich knüpfenden mathematischen Entwickelungen sind aus denselben Gründen abzulehnen wie die vorher behandelten Versicherungswerte und Prämien.

Den Schluß der „Lebensversicherungsrechnung" bildet eine Darstellung des heutigen Standes der Risikotheorie. Über den Wert der hierher gehörenden Untersuchungen für die Praxis sind die Meinungen geteilt; man wird nicht zugeben können, daß „die aus den Tabellen gebildeten Verhältniszahlen die Bedeutung typischer Wahrscheinlichkeitsgrößen mit normaler Dispersion, also denselben Charakter wie auf apriorischer Grundlage ermittelte Wahrscheinlichkeiten" haben, und daß das versicherte Material völlig homogen demjenigen ist, aus dessen Beobachtung die Tabellen hervorgegangen sind. Die Bedeutung der Risikotheorie liegt daher, wie der Verfasser sagt, neben dem theoretischen Interesse, zu dessen Befriedigung die Untersuchungen angestellt wurden, in gewissen allgemeinen Resultaten und Einblicken, von denen vielleicht eine spätere Zeit weitergehenden Gebrauch machen wird.

Eine nützliche Zugabe bilden die sieben numerischen Tafeln des Anhanges, von denen die erste die Werte der Funktion $\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\gamma e^{-t^2}dt$ enthält, während sich die sämtlichen übrigen auf die Lebens- und Invaliditätsversicherung beziehen.

Mannheim. B. Oster.

Fritz Emde. Die Arbeitsweise der Wechselstrommaschinen für Physiker, Maschineningenieure und Studenten der Elektrotechnik.

Unter diesem Titel hat Emde eine in drei Teile zerfallende Arbeit erscheinen lassen, deren Überschriften 1) Physikalische Grundlagen, 2) Selbstinduktion und Streuung, 3) Mechanische Wirkungen lauten.

Im ersten Teil hat Verfasser versucht eine für seine Zwecke bearbeitete gedrängte Behandlung der theoretischen Grundlagen der Elektrizitätslehre zu geben. Dies ist aber nach Ansicht des Referenten wenig geglückt. Es fehlen scharfe Definitionen und eine logische konsequente Durchführung der Gedanken. An die Spitze hätte zweckmäßig der Gaußsche Satz gestellt werden sollen; dann würden Sätze wie „Die Kraft nimmt 'offenbar' in der Richtung zu, nach der sich die Kraftlinien zusammendrängen" nicht beweislos dastehen (S. 1). An manchen Stellen ist es selbst dem Kundigen schwer zu verstehen, was gemeint ist, so z. B. auf S. 5 die Ausführungen über magnetisierende Kraft und magnetische Feldstärke, die, soweit sich verstehen läßt, auch sachlich anfechtbar sind.

Teil 2 und 3, wo der Ingenieur zur Sprache kommt, haben eine zweckmäßige Behandlung gefunden, die auch der Physiker mit Nutzen lesen wird.

Charlottenburg. E. Orlich.

Gustav Bauer. Vorlesungen über Algebra, herausgegeben vom Mathematischen Verein München. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 8⁰. IV u. 376 S.

Das Buch enthält eine einfache und klare Einführung in die Begriffe der Algebra. Der Verfasser benutzt stets die einfachsten und für die zahlen-

mäßige Anwendung geeignetsten Wege. Viele Beispiele erläutern die Darstellung, sodaß die abstrakten Begriffe gleich an konkreten Dingen geübt werden können. Die Vorlesungen sind zur Einführung in die Algebra sehr geeignet. — Der erste Abschnitt enthält allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen: Wurzelbeweis, Beziehungen zwischen Wurzeln, Koeffizienten der Gleichung und Potenzsummen, die Resultante und die Elimination. Der zweite Abschnitt behandelt die algebraische Auflösung der Gleichungen; er bringt den Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höherem als dem vierten Grade allgemein aufzulösen, die Galoissche Methode und die Abelschen Gleichungen. Der dritte Abschnitt ist der numerischen Auflösung gewidmet. In diesen drei Abschnitten sind Determinanten vermieden worden. Im vierten Abschnitt bringt der Verfasser eine Theorie der Determinanten und spricht mit ihrer Hilfe einige Eigenschaften der Resultanten usw. in allgemeiner Weise aus. — Auf S. 337 steht „adjungierte oder reziproke Form“, während doch im allgemeinen unter reziproker Form der Quotient aus der adjungierten Form und der Determinante verstanden wird!

Dortmund. H. Kühne.

Ludwig Kiepert. Grundriß der Differential- und Integralrechnung. I. Teil: Differentialrechnung. Neunte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von M. Stegemann. Hannover 1901, Hellwing. XVII u. 750 S.

Als Stegemann vor 40 Jahren sein Büchlein unter dem Titel „Grundriß“ herausgab, ahnte er nicht, daß unter den kundigen Händen seines Nachfolgers der Grundriß sich zu einem stattlichen Gebäude auswachsen würde. Während die erste Auflage nur die Grundtatsachen der Infinitesimalrechnung enthielt, bringt die neue Auflage den ganzen Wissensstoff, den ein Techniker von der Differentialrechnung und ihren Anwendungen höchstens braucht, in klarer und leichtfaßlicher Darstellung. Neu hinzugekommen sind bei dieser Auflage vor allem die hyperbolischen Funktionen nebst einer Tafel und die numerische Auflösung der Gleichungen. Beide haben eine gute Behandlung erfahren. — Im Laufe der Zeit ist das Buch so gut durchgearbeitet worden, daß man kaum eine besserungsfähige Stelle findet. Ich habe nur an dem Worte „Permutationsform“ (S. 559) Anstoß genommen. Seit Kronecker ist für diesen Begriff doch das einfache Wort „Permutation“ gebräuchlich geworden. Der Zusatz „Form“ erscheint mir überflüssig.

Dortmund. H. Kühne.

G. Holzmüller. Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Dritter Teil. Zweite Auflage im Anschluß an die neuen preußischen Lehrpläne mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen bearbeitet. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 8⁰. XIV u. 370 S.

Die erste Abteilung und der Anhang der ersten Auflage sind unter Hinzunahme einiger Sätze aus der algebraischen und stereometrischen Abteilung zu einer Abteilung „Geometrie“ organisch verschmolzen. Die Einleitung behandelt die Gaußische Gerade, das Malfattische Problem, den

Feuerbachschen Kreis und die Konstruktion des 17-ecks. Es folgt eine Betrachtung der Kegelschnitte. Die Behandlung ist vorherrschend synthetisch, doch kommt auch die Analysis zu ihrem Recht. Einige Anwendungen über die quadratische Einteilung der Ebene und ihre physikalischen Deutungen sind neu zugefügt. Die stereometrische Abteilung ist vermehrt worden um eine ausführliche Besprechung der Merkatorprojektion und eine größere Auswahl von vermischten Aufgaben. Gleichfalls vermehrt um einige Formeln und Aufgaben ist die sphärische Trigonometrie. Am wenigsten ist die vierte Abteilung „algebraische Analysis mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik" geändert worden; doch sind auch hier einige Aufgaben hinzugekommen.

Dortmund. H. Kühne.

C. H. Müller und **O. Presler. Leitfaden der Projektionslehre.** Ein Übungsbuch der konstruierenden Stereometrie. Ausgabe A. Vorzugsweise für Realgymnasien und Oberrealschulen. Ausgabe B. Für Gymnasien und sechsstufige Realanstalten. Leipzig und Berlin 1903, B. G. Teubner, geb. A *M* 4.— B *M* 2.—.

Infolge der neueren Bestimmungen in den Lehrplänen der preußischen höheren Lehranstalten bezüglich der Aufnahme der darstellenden Geometrie in den mathematischen Unterricht der Oberklassen sind mehrere neue Lehrbücher über diesen Gegenstand in den letzten Jahren veröffentlicht worden. Auch der vorliegende Leitfaden will auf diesem Gebiete anregend und befruchtend wirken, will sehr mit Recht den bisherigen ausgedehnten rechnerischen Betrieb der Stereometrie zurückdrängen zugunsten der Konstruktion, und es kann daher das Erscheinen des Buches nur mit Freuden begrüßt werden.

Es bringt in zwei ungefähr gleich großen Teilen die schräge und die senkrechte Parallelprojektion mit Schattenkonstruktionen und als Schluß die einfacheren Aufgaben der Zentralprojektion. Der Text ist durchdacht, einfach und klar, die Zahl der durchgeführten Aufgaben sehr groß, die Figuren sind durchweg musterhaft ausgeführt. Für den Lehrer, speziell für den des Linearzeichnens, wird das Buch von hervorragendem Werte sein.

Da augenblicklich auf die schräge Parallelprojektion großer Wert gelegt wird, so kann ich es begreifen, obgleich ich selbst auf anderem Standpunkte stehe, daß derselben ein ebenso großer, in der kleinen Ausgabe sogar ein größerer Raum als der senkrechten Projektion gewährt wird. Trotz dieses Entgegenkommens möchte ich aber § 5 gestrichen haben; es sollen die dort gegebenen Figuren die einfachsten stereometrischen Sätze zur Anschauung bringen, so daß Modelle nicht erforderlich sind. Das gelingt in vielen Fällen z. B. Fig. 36 (kürzester Abstand zweier Windschiefen) dadurch, daß der Schüler unbewußt die Figur als zentralperspektivisch gezeichnet auffaßt, nämlich die Grundebene als ein nach hinten verbreitertes Trapez, während nach der Absicht der Verfasser diese Ebene den Eindruck eines Rechteckes hervorbringen soll; in anderen Fällen wird der Schüler entschieden die Figur für falsch, z. B. in Fig. 40 die Strecke 3 C für größer als Strecke 1, 2 derselben Kante halten. Es finden sich freilich derartige Zeichnungen in den meisten Lehrbüchern; daß die Verfasser sie aber der Nach-

ahmung wert halten, ist um so merkwürdiger, als sie selbst in einer Anmerkung die musterhafte Ausführung und Plastik der Martusschen Zeichnungen rühmen, die sämtlich zentralperspektivisch gezeichnet sind.

Gegen den verhältnismäßig breiten Raum, den die Anwendung der schiefen Parallelprojektion auf Kristallographie, Kartenzeichnungen etc. einnimmt, würde nichts einzuwenden sein, wenn dabei die rein geometrischen Eigenschaften und Beziehungen zwischen Gegenstand und Bild, insbesondere die zwischen Kreis und Ellipse nicht etwas zu kurz behandelt worden wären. Über diesen Mangel könnte man hinwegsehen, wenn das Buch nur beim Unterrichte im Linearzeichnen gebraucht werden sollte; aber nach einer Bemerkung der Verfasser im Begleitworte soll es in erster Linie im mathematischen Unterrichte Verwendung finden. Wenn dies beabsichtigt ist, so dürfte es sich wohl auch empfehlen, die Hauptbeweise des ersten Teiles über die Bedeutung der Verzerrungsgrößen q und ω und dergl. sofort im Texte zu geben und nicht in einem Anhangsparagraphen zusammenzustellen, der noch dazu in der Gymnasialausgabe völlig fehlt, sodaß vielleicht bei manchem die irrige Vorstellung erweckt werden könnte, als ob die Beweise nur bei genügender Zeit durchgenommen werden sollten, was doch entschieden gegen Ziel und Zweck des mathematischen Unterrichts verstoßen würde.

Diese wenigen Ausstellungen können den Wert des Buches, den ich nochmals ausdrücklich betonen möchte, in keiner Weise beeinträchtigen; sie sind in der Absicht geschehen, um einerseits das Buch noch zu vervollkommnen und um andererseits einer unzweckmäßigen Benutzung desselben vorzubeugen.

Berlin. P. Schafheitlin.

W. Gercken. Grundzüge der darstellenden Geometrie. X u. 121 S. 77 Fig. Leipzig 1903, Verlag der Dürrschen Buchhandlung.

Der vorliegende Grundriß sucht diejenigen Methoden und Aufgaben der darstellenden Geometrie vorzuführen, mit denen die Schüler der höheren preußischen Schulen nach den Bestimmungen der neuesten Lehrpläne bekannt zu machen sind. Über die Auswahl des Stoffes werden vorläufig noch die Meinungen vielfach auseinandergehen; jeder Versuch, der praktisch durchführbar ist wie der vorliegende, ist unter allen Umständen dankbar zu begrüßen.

Das Buch zerfällt in 4 Teile: schräge Parallelprojektion, orthogonale Projektion, Perspektive und Schattenlehre. Im allgemeinen bin ich mit der Auswahl und Verarbeitung des Stoffes einverstanden; besonders sympathisch ist mir die Aufnahme der beiden letzten Teile; bei der orthogonalen Projektion möchte ich gern die Benutzung von Hilfsprojektionsebenen berücksichtigt haben und würde lieber, wenn der Umfang des Buches dann zu groß werden würde, dafür den ganzen ersten Teil über die schräge Parallelprojektion opfern; denn die Benutzung dieser Projektionsart bei den folgenden Teilen ist nur eine scheinbare. Beispielsweise bei der Aufgabe, den Neigungswinkel einer Ebene gegen die Projektionsebenen zu bestimmen (§ 17), heißt es: „Wir lösen die Aufgabe zuerst in schräger Projektion." Tatsächlich wird diese Aufgabe in schräger Projektion aber gar nicht gelöst; sie dürfte auch für den Schüler ohne Zuhilfenahme der orthogonalen Projektion nicht zu

lösen sein. Demnach kann der obige Satz nur den Sinn haben, daß der Schüler an einer zweckmäßigen Figur seine räumlichen Vorstellungen klärt, und hierzu dürfte eine Figur in Zentralprojektion einer parallelperspektivischen vorzuziehen sein Selbstverständlich habe ich gegen die Beibehaltung des ersten Teils, der auch verhältnismäßig knapp behandelt ist, nichts einzuwenden; ich wollte nur hervorheben, daß er für die folgenden Teile nicht nötig ist.

Die Figuren sind sehr sorgfältig gezeichnet; der Text ist klar und verständlich geschrieben; auf etwas besseren Ausdruck könnte wohl an einigen Stellen geachtet werden. „Die Umkehrung des Satzes lautet wie?“ und ähnliche Wendungen kann man beim mündlichen Vortrag wohl gelten lassen; sie sollten aber vor der Drucklegung abgeändert werden.

Berlin. P. Schafheitlin.

Eugen Jahnke. Nachruf auf Ferdinand Caspary. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Der von Freundeshand geschriebene und in der Überschrift näher bezeichnete Nachruf kann warm empfohlen werden. Es zeigt uns das Bild eines strebenden, hochbegabten Mannes, der nicht ohne eigene Schuld herausgedrängt aus den gewöhnlichen Bahnen eines Lehrers und Forschers auch unter den schwierigsten äußeren Verhältnissen die Begeisterung für seine Wissenschaft niemals verloren, vielmehr in derselben immer neuen Trost und neue Lebensfreudigkeit gefunden hat. Dann aber verdienen die wissenschaftlichen Arbeiten Casparys ein reges Interesse unserer mathematischen Kreise. Sie wurzeln in den Graßmannschen Anschauungen. Caspary hat frühzeitig von der Tragweite und Fruchtbarkeit des Graßmannschen Kalküls eine klare Vorstellung besessen und es als seine Lebensaufgabe betrachtet, für die Verbreitung Graßmannscher Ideen und für ihre Anwendung auf eine Reihe scheinbar weit auseinanderliegender Gebiete zu wirken. Daß und wie ihm das gelungen ist, findet sich in der genannten Broschüre in übersichtlicher Weise dargestellt, und es kann füglich davon abgesehen werden, hierauf näher einzugehen. Nur so viel sei bemerkt, daß die Arbeiten Casparys sich durch große Einfachheit und Eleganz der Darstellung, sowie durch eine wahre Kunst des Zusammenfassens und reiche Literaturnachweise auszeichnen, daß sie ferner Ergebnisse gezeitigt haben, die ihrem Verfasser einen ehrenvollen Platz in unserer Wissenschaft zu sichern geeignet sind.

Möchte die Broschüre von Herrn Jahnke dazu beitragen, die Überzeugung hiervon in weitere Kreise zu tragen.

Dresden. M. Krause.

P. Güssfeldt. Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen und der Entwicklung der hierfür maßgebenden mathematisch-geometrischen Begriffe. Braunschweig, Vieweg und Sohn. geh. 10 *M.* geb. 12 *M.* 377 S.

Der Verfasser hat sich nach dem beigegebenen Vorwort zur Aufgabe gestellt, die Möglichkeit zur Lieferung guter Beobachtungen auch den Forschungsreisenden zu geben, welche sich nicht besonders dafür auf einer Sternwarte vorbereiten konnten. Die moderne Entwicklung unserer Ver-

hältnisse hat gerade die Anzahl dieser Forschungsreisenden in unbekannten Ländern stark vermehrt, und so ist das Buch bestimmt, eine fühlbare Lücke auszufüllen. Daß es auch hierzu imstande sein wird, erscheint mir durch die weise Beschränkung der behandelten Methoden, wie anderseits eine kritische Abwägung ihres Wertes und nicht zum mindesten durch die bis ins einzelne gehende Anweisung für die Anstellung einschlägiger Beobachtungen gewährleistet. Den Mathematiker werden natürlich diejenigen Abschnitte des Buches besonders interessieren, welche die mathematischen Lehren entwickeln oder ihre Anwendung zeigen. Sie nehmen in der Tat einen so bedeutenden Raum ein, daß man dem größten Teil des Buches einen rein mathematischen Charakter zuschreiben muß. Von dem Leser verlangt der Verfasser, daß er den Unterricht einer höheren Schule genossen hat. Für ihn will er in den einleitenden Abschnitten die Grundlagen der Analysis so dargelegt haben, daß ein normaler Intellekt sie verstehen muß. Ich muß dem zustimmen. Zuerst wird der Zahlenbegriff entwickelt; allmählich aufsteigend wird das gesamte Gebiet der reellen Zahlen erschöpft. Dabei verfährt der Verfasser nun m. E. nicht methodisch genug. Seinem eigenen Urteil gemäß, „Die reine Mathematik beruht auf der Grundlage der von ihr geschaffenen Zahl und der mit letzterer ausführbaren Operationen", hätte er, wie die Algebra das auch sonst tut, lediglich die Ausführbarkeit dieser Operationen maßgebend sein lassen müssen. Dagegen führt er gleich den Begriff „Richtung" ein, unnötig, wie er sagt, aber anschaulicher. Wenn aber das einmal mit Rücksicht auf den Leserkreis geschah, dann hätte diese Methode auch weiter bei der Einführung der gebrochenen Zahl benützt werden sollen; sie wäre doch bei gehöriger Betonung des Begriffs „Strecke" ebenso nützlich gewesen und hätte die Anschaulichkeit sicher gestützt. Die imaginären Zahlen sind gewissermaßen nur als Anhang aufgefaßt, für den Endzweck des Buches wohl mit Recht; für den Teilzweck dagegen, von einem höheren Standpunkte aus die niedere Analysis zu übersehen, muß man das bedauern. Dieser höhere Standpunkt kommt sehr schön in den Sätzen zum Ausdruck, welche die Mathematik als Kulturfaktor würdigen und dann durch Schaffung des Begriffs „Größenklassen" das große Gebiet ihrer Anwendbarkeit zeigen.

Der algebraischen Einleitung folgt die geometrische. Hier schlägt der Verfasser den umgekehrten Weg ein wie vorhin, indem er vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreitet. Ich halte diese Anordnung nicht für glücklich, zumal auch die Bezeichnung den meisten Lesern, für die das Buch bestimmt ist, unbekannt sein wird. Interessant geschrieben aber ist das Kapitel; geschickt eingeführt ist überall die Kugel; zuweilen drängt sie sich sogar etwas sehr auf. Dies gilt vornehmlich von der Einführung des Koordinatenbegriffs; so geht der Verfasser bei Erläuterung des rechtwinkligen Koordinatensystems für Ebene und Raum auf die vorher behandelten sphärischen Koordinatensysteme zurück. Sehr anerkennenswert ist die klare Einführung der drei Bogeneinheiten. Die Überleitung zur Trigonometrie geschieht leicht und zweckentsprechend. Die Entwickelung der notwendigen trigonometrischen Formeln für die Ebene folgt in bekannter Weise, zunächst mit der erforderlichen Rücksicht auf die bisherige Bezeichnungsart. Aber warum nicht jetzt schon die Lehre von der sphärischen Trigonometrie angeschlossen ist, erscheint mir nicht recht verständlich. Ihre spätere Entwickelung geht

durchaus auf die Ausdrucks- und Behandlungsweise dieses Abschnittes zurück. Sie verlangt von den andern ihr vorangestellten Abschnitten an und für sich gar nichts bis zur Einführung des astronomischen Dreiecks. Dann aber ist die Entwickelung bereits abgeschlossen, und diese letzten Teile hätten sich naturgemäß dem Abschnitt III angliedern lassen. Der II. Abschnitt enthält zum Schluß noch eine Betrachtung der Ellipse lose angefügt, eine Entwickelung ihrer Gleichung und anschließend auch die Gleichung des Kreises und der Geraden. Dabei vermisse ich sehr eine Definition der Ellipse, die der Verfasser nur durch Zeichnung ihrer einzelnen Punkte entstehen läßt.

Im III. Abschnitt werden die tatsächlichen Grundlagen der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung als Resultate von Astronomie und Geodäsie mitgeteilt. Dadurch werden die einzelnen Koordinatensysteme erläutert, wie auch ihre Beziehungen zu einander. Vielfach wird schon hier auf die später zu verwertenden Verhältnisse aufmerksam gemacht, wie denn z. B. die Fundamentalgleichung der geographischen Längenbestimmung sich von selbst ergibt. Es folgt eine schöne und klare Abhandlung über Zeit und Zeitmessung; sie eignet sich m. E. auch mit einiger Abänderung für die Behandlung dieses Themas auf unsern höheren Schulen.

Nun erst kommt der Verfasser zur Behandlung der sphärischen Trigonometrie. Von einem sphärischen Grunddreieck ausgehend wendet der Verfasser die trigonometrischen Funktionen auf die zugeordnete körperliche Ecke an; die Gültigkeit der entwickelten Formeln wird allmählich auf alle sphärischen Dreiecke ausgedehnt, worauf dann erst der Begriff der zyklischen Vertauschung bei der Bildung der Formeln zur Anwendung kommt. Hierauf wird aus dem allgemeinen Dreieck das rechtwinklige als Spezialfall erhalten und die Napiersche Regel entwickelt. Spätere Umformungen liefern die bekannten Gaußschen Gleichungen und Napierschen Analogien, deren Bedeutung für die praktische Berechnung betont wird. Ich möchte doch glauben, daß gerade auch dem Leserkreis, für den das Buch geschrieben ist, der umgekehrte Weg erwünschter sein müßte.

Der VI. Abschnitt behandelt das Universalinstrument und besonders seine Fehlertheorie. Zugleich wird die Parallaxe, deren Begriff schon früher entwickelt wurde, herangezogen und berücksichtigt. Dann erst wird es möglich, auf die Messungsmethoden selbst einzugehen. Gerade hier zeigt der Verfasser, daß er die Praxis kennt, indem er für die Beobachtung ausführliche Verhaltungsmaßregeln gibt. Drei Aufgaben werden in diesem Abschnitt behandelt: Die Bestimmung der Zeit aus Zenitdistanzen bei bekannter Polhöhe, die Bestimmung der geographischen Breite bei bekannter Zeit und endlich die Bestimmung beider zugleich. Dabei nimmt der Verfasser Gelegenheit, den Wert eines Beobachtungssatzes für die Kompensierung unvermeidlicher Fehler zu betonen. Desgleichen finden Strahlenbrechung und Parallaxe ihre Berücksichtigung. Ausführlich wird auch die Verbesserung der abgelesenen Resultate behandelt für den Fall, daß die Sonne der Beobachtungsgegenstand war. Auch die Bedeutung des Sextanten findet hier gelegentlich eine kurze Würdigung, vielleicht eine zu kurze.

Nun wird anschließend in einem besonderen Abschnitt die Frage behandelt, wie die Wirkung eines Fehlers in den Stücken des astronomischen Dreiecks für die Berechnung von Zeit, Polhöhe und Azimut am kleinsten

gestaltet werden möge. Dieser Abschnitt ist m. E. verfehlt. Es hätten besser die Resultate auch einfach als Resultate der höheren Mathematik angegeben werden sollen. Ihre Begründung kann doch nur scheinbar gelingen. Denn dazu bedarf es des Begriffs „Differential" und des „Taylorschen Satzes". Die Differentiationen können ja doch nicht durchgeführt werden, oder es hätte eine Entwickelung der Differentialrechnung vorausgeschickt werden müssen. Und wenn der Verfasser das für seinen Leserkreis für nötig und möglich gehalten hätte, so hätte er diesen Abschnitt mit dem elften zusammen behandeln sollen; dort wird schließlich doch zugestanden, daß es sich um Aufgaben handelt, die den Rahmen des Buches überschreiten. Um so seltsamer muten uns diese Abschnitte an, als sie getrennt sind durch eine Besprechung des nautischen Jahrbuches und eine Anweisung zum Gebrauch fünfstelliger Logarithmen.

Im X. Abschnitt finden sich in dankenswerter Weise einige Beispiele für die numerische Berechnung durchgeführt.

Zum Schluß kommt der Verfasser auf die allgemeine Gleichung der Längenbestimmung zurück und gibt die wichtigsten Methoden an, die für Forschungsreisende in Betracht zu ziehen seien. Daß er dabei die klassische Methode der Monddistanzen streicht, ist wohl berechtigt. Besonders empfiehlt er diejenige der Zeitübertragung, die in den meisten Fällen möglich und dann mit den geringsten Anforderungen verknüpft sein wird.

Möge das Buch im Kreise der Leser, für die es bestimmt ist, die ihm gebührende Verbreitung finden; möge es recht viele von ihnen, der Absicht des Verfassers entsprechend, zu weiteren Studien anregen.

Fr. Bradhering.

Fitting. „Das Rösselsprungproblem in neuer Behandlung." Leipzig, G. Fock, G. m. b. H.

Mit Benutzung eines auf jedes Rundreise-Problem anwendbaren Prinzipes wird gezeigt, wie man zu allen Rösselsprüngen des 36-feldrigen quadratischen Brettes und des Schachbrettes gelangen kann, wobei eine geeignete Notation zur Fixierung der Einzelergebnisse gewonnen wird. — Die Felder des ersteren Brettes werden mit Ausnahme des inneren Quadrates zu 4 in sich geschlossenen Reihen aneinander geordnet, die zu klarerer Veranschaulichung auch als nebeneinander liegende Kreise und weiterhin in Täfelchenform dargestellt werden; hierauf wird gezeigt, wo man diese Reihen zu unterbrechen hat, um die fehlenden Felder und Springerzüge so einzuschalten, daß sie sich zu geschlossenen Rösselsprüngen des Brettes zusammenfügen. Diese werden sämtlich aufgestellt, und 10298 Einzelfälle gefunden. — In analoger Weise werden auch die 48 Randfelder des Schachbrettes in 4 geschlossene Reihen gebracht. Vereinigt man nun die 16 Felder des inneren Quadrates in beliebiger Weise durch Springerzüge zu 2 bis 16 „Ketten" (der Begriff der Kette wird auch auf einzelne Felder ausgedehnt), so wird die Aufsuchung der passenden Stellen für die Einschiebung dieser Ketten zwischen die Felder jener geschlossenen Reihen durch Rundreisen auf einfacheren Figuren bewirkt. Diese Figuren brauchen nur aus einer Tabelle ergänzt resp. erweitert zu werden, um auch sämtliche geschlossene Rösselsprünge zu finden, welche neben den Ketten noch bis dahin unberücksichtigte

Springerzüge zwischen den Randfeldern aufweisen. Da die Methode neben den Rösselsprüngen auch alle Anordnungen der Felder in zwei oder mehr geschlossene Reihen liefert, so muß, wenn nur die Aufstellung der ersteren beabsichtigt wird, jeder Einzelfall der Prüfung durch ein einfaches Kriterium unterzogen werden. Das Ganze wird an einer Reihe von Beispielen entwickelt, und an diesen dargetan, wie das Verfahren sich im einzelnen gestaltet; dabei tritt auch von neuem zu Tage, wie unabsehbar groß die Anzahl aller Rösselsprünge auf dem Schachbrett sein muß. Schließlich werden noch die geschlossenen Rösselsprünge, bei welchen nicht alle Felder des inneren Quadrates berührt werden sollen, in Kürze gestreift. — Der letzte Abschnitt endlich handelt von der Ableitung der ungeschlossenen Rösselsprünge aus den bis dahin allein betrachteten geschlossenen, wobei sich zeigt, daß durch Verwendung des früheren, nur passend modifizierten Verfahrens im Rahmen einer beliebig herausgegriffenen kleineren Gruppe auch diese vollzählig gefunden werden können.

M.-Gladbach. FITTING.

A. Börsch und **L. Krüger. Lotabweichungen.** Heft II. Geodätische Linien südlich der Europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite. Veröffentlichung des Königl. Preußischen Geodätischen Institutes. Neue Folge No. 10. Mit 3 lithographierten Tafeln. 204 S. Berlin 1902, P. Stankiewicz.

Im Jahre 1896 hat F. R. Helmert der in Lausanne abgehaltenen Konferenz der Permanenten Kommission der Internationalen Erdmessung den Plan zur Berechnung eines zusammenhängenden Lotabweichungssystems in Zentraleuropa vorgelegt. Dieses System soll gewissermaßen ein Netz erster Ordnung von astronomisch-geodätischen Punkten bilden, an das später das Detailstudium der Erdgestalt in kleineren Gebieten angeschlossen werden kann. Das vorliegende Heft verwirklicht einen Teil des Helmertschen Planes, der die geodätischen Linien südlich der Europäischen Längengradmessung in 52° Breite umfaßt. Der Inhalt des Werkes gliedert sich in drei Abschnitte, von denen der erste die geodätischen Linien in der Nähe von Bonn südlich der genannten Gradmessung behandelt. Der zweite bezieht sich auf die geodätischen Linien in der Nähe des Pariser Parallels westlich von Straßburg und der dritte auf die, welche in der Nähe des Meridians von Wien und ebenfalls südlich von der genannten Gradmessung liegen.

Jeder Abschnitt bringt zunächst die Ergebnisse der astronomischen Bestimmungen und dann die berechneten geodätischen Linien und relativen Lotabweichungen; im dritten Abschnitt geht noch ein Kapitel voran, das die Anschlüsse von vier der benutzten astronomischen Stationen an die Hauptdreiecke enthält. Die Anlage und Ausführung der Rechnungen basiert auf den von Helmert in „Lotabweichungen. Heft I. Berlin 1886" entwickelten Methoden; die benutzten Formeln sind auf Seite 27 und 28 kurz zusammengestellt. Als Grundlage für die Rechnungen sind die Besselschen Elemente des Erdellipsoids gewählt.

Auf eine definitive Ausgleichung des ganzen Netzes ist vorläufig noch verzichtet worden, da die notwendigen astronomisch-geodätischen Bestimmungen noch nicht überall vorhanden und zum Teil noch zu unsicher sind.

Poppelsdorf bei Bonn. PH. FURTWÄNGLER.

Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke. Nachträge, herausgegeben von **M. Nöther** und **W. Wirtinger.** Leipzig 1902, B. G. Teubner. 8°. 116 S.

Das Heft enthält Auszüge aus drei mathematischen Vorlesungen Riemanns, von denen Nachschriften zur Verfügung standen (Allgemeine Theorie der Integrale algebraischer Differentialien, Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Verzweigungspunkt, Hypergeometrische Reihe), ferner einzelne mathematische Noten aus dem Nachlaß und endlich „Berichte“. — Die auf S. 113 unter der Überschrift „Persönliches“ gegebenen Mitteilungen und das Verzeichnis der von Riemann angekündigten Vorlesungen mag hier besonders hervorgehoben werden.

Leipzig. H. Liebmann.

F. Enriques, Vorlesungen über projektive Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Fleischer. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 8°. 374 S.

In dem vorausgeschickten Einführungswort betont Herr Klein, daß ein derartig systematisch aufbauendes, zugleich durchsichtig dargestelltes und vollständiges Lehrbuch projektiver Geometrie in Deutschland fehlt und daher gewiß zahlreiche Freunde finden wird. In der Tat gehen die deutschen Lehrbücher entweder fast ganz abstrakt vor, mit beinahe vollständiger Verschmähung der Metrik, oder aber sie sind aus der Steinerschen Schule erwachsen und lassen, reich an einer Fülle von geometrischen Einzelheiten, alle Prinzipienfragen mehr oder minder außer acht.

Der Verfasser hält die goldene Mittelstraße ein: Die Erörterung der Prinzipienfragen macht er durch psychologische Momente lebendig — wir erwähnen die Durchführung des Unterschiedes zwischen visuellen und metrischen (tastbaren) Eigenschaften in der Einleitung, die mehrfach verwendet wird, z. B. S. 191 bei Erörterung der Formen der Kegelschnitte, die feine Analyse des Stetigkeitsbegriffs S. 69 und den daraus sich ergebenden Beweis des Fundamentalsatzes, daß eine projektive Zuordnung von einstufigen Gebilden durch drei Paare entsprechender Elemente gegeben ist.

Im übrigen werden nicht nur die metrischen Sätze projektiv abgeleitet, sondern auch allen projektiven Beziehungen metrische Eigenschaften abgewonnen — eine gelegentlich in anderen Werken vernachlässigte Seite der projektiven Geometrie. Als ein Beispiel dieser innigen Durchdringung von metrischer und projektiver Geometrie — sie ist auf S. 169 in klarer Form ausgesprochen — hätte etwa noch der elegante Beweis des Herrn Tresse (B. S. M. F. **28**, 1900, S. 131—136) aufgenommen zu werden verdient, daß die Kollineationen der Kegelschnitte wieder Kegelschnitte sind, ein Beweis, der von der Steinerschen Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel nicht Gebrauch macht.

Hervorgehoben sei noch besonders die historische Notiz S. 357—367 über die Fundamentalbegriffe, die übersichtliche Einteilung und das sehr vollständige Sachregister.

Leipzig. H. Liebmann.

V. und K. Kommerell, Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. I u. II. 8°. 144 S. u. 212 S. Sammlung Schubert XXIX u. XLIV. Leipzig 1903, Göschen. Ladenpreis 4,80 *M.* u. 5,80 *M.*

Die beiden Bändchen stellen eine wertvolle Bereicherung der Sammlung Schubert dar; sie bringen auf kleinem Raum eine Darstellung, die, mit den Elementen beginnend, bis zu den modernsten Untersuchungen über Strahlensysteme fortschreitet.

Zur Orientierung sei eine kurze Inhaltsangabe vorausgeschickt, wobei besonders hervorzuhebende Entwicklungen ausdrücklich erwähnt werden.

Band I: Erster Abschnitt: Raumkurven (Krümmung, Torsion usw. abwickelbare Flächen, Minimalkurven, 21 Aufgaben). — Zweiter Abschnitt: Untersuchung einer Fläche in der Form $F(xyz) = 0$ (Krümmung, Indikatrix usw., sphärische Abbildung, konfokale Flächen zweiten Grades, geodätische Linien; 41 Aufgaben).

Band II: Erster Abschnitt: Untersuchungen von Flächen in der Parameterform (Fundamentalformeln, die charakteristischen Kurven auf den Flächen, Differentialparameter; 51 Aufgaben). — Zweiter Abschnitt: Spezielle Flächen, Strahlensysteme (W-Flächen, Minimalflächen, Flächen konstanten Krümmungsmaßes, Regelflächen, dreifach orthogonale Flächensysteme, Strahlensysteme; 33 Aufgaben).

Wir betonen außer der reichen Aufgabensammlung noch einen andern Umstand, der die Brauchbarkeit der Bändchen erhöht: das Bestreben, in einem so leicht zu wildem Formelwust verführenden Gebiet möglichst weit mit geometrischen Betrachtungen vorzudringen. Genannt sei als Beleg hierfür die Aufstellung der natürlichen Gleichungen einer Kurve (I, S. 29), die Betrachtung über den Aufbau und die Grundeigenschaften der abwickelbaren Flächen (I, S. 37—43), der — in dieser Weise schon von Leibniz angebahnte — Nachweis, daß die Schmiegungsebenen der kürzesten Linien die Flächennormale enthalten (I, S. 113), die geometrische Analyse der Verbiegung des Katenoïdes (II, S. 75), endlich der Einblick in die nichteuklidische Geometrie (II, S. 140).

Aber auch jene Art geometrischer Betrachtungsweise, die eine Errungenschaft französischer Mathematiker ist, und die eine Seite von Lies Forschungsrichtung darstellte, finden wir hier vertreten (wohl mit nach dem Vorgang von Scheffers). Wir meinen — mit Klein zu reden — das freie rücksichtslose Operieren mit imaginären Gebilden. Wir finden eine Behandlung der Minimalkurven und die von Gauß herrührende, von Lie ausgesprochene Verwertung dieses Begriffs für die konforme Abbildung (II, S. 45). Übrigens hätte auch der von Lie gegebene Zusammenhang zwischen Minimalflächen und Minimalkurven leicht in Band 2, § 24 Platz finden können.

Der Namen von Lie ist seltsamerweise bei der Besprechung der Minimalkurven nicht genannt, wie denn vielleicht auch an anderen Stellen die Literaturnachweise etwas ungleichmäßig gehandhabt sind. So sei, was den Inhalt der Anmerkung II, S. 150 angeht, auf Lobatschefskijs Abhandlung vom Jahre 1830 (Übersetzung von F. Engel, Leipzig 1898 S. 22) verwiesen.

Noch einmal sei schließlich die reiche Aufgabensammlung hervorgehoben, die außer Übungsbeispielen auch wirklich neue im Text nicht dargestellte Sätze bringt.

Sie allein würde wohl genügen, den beiden Bändchen einen größeren Leserkreis zu verschaffen, als man nach dem Preis vielleicht befürchten muß.

Leipzig. H. Liebmann.

Fischer, Der Gang des Menschen. V. Teil: Die Kinematik des Beinschwingens. VI. Teil: Über den Einfluß der Schwere und der Muskeln auf die Schwingungsbewegung des Beins. (Des XXVIII. Bandes der Abhandlungen der mathem.-phys. Klasse der kgl. Sächs. Ges. der Wiss. No. V u. VII.) Leipzig 1904, B. G. Teubner. 100 u. 88 S. 5 u. 4 *M.*

Diese Abhandlungen bilden die Fortsetzung einer Reihe anderer, durch welche der Verfasser die mechanischen Grundlagen einer Theorie des menschlichen Ganges gewonnen hat. In den vorliegenden gelangt derselbe zu einer Differentialgleichung für die Bewegung jedes der drei Abschnitte des Beines von der Form: das Trägheitsmoment jedes Abschnittes multipliziert mit seiner Winkelbeschleunigung ist gleich der Summe der Drehungsmomente, welche die Schwerkraft, die Effektivkräfte und die inneren, d. h. in der Hauptsache die Muskelkräfte auf das Glied ausüben. Von den einzelnen hier vorkommenden Größen bis auf die letzten gelingt es, durch die Beobachtungen eine zahlenmäßige Darstellung zu erhalten. Die Methode dieser sowie die für die Berechnung der Trägheitsmomente und der Drehungsmomente der Schwerkraft nötigen praktischen Fundamente seiner Theorie hat der Verfasser in den vorigen Abhandlungen besprochen und auch in dem in dieser Zeitschrift (III. Reihe 7 (1 u. 2) S. 110 ff.) abgedruckten interessanten Vortrage dargestellt. Indem er die in den Bewegungsphotogrammen gelieferten Daten für die Orte der Schwerpunkte und die Richtungen der einzelnen Glieder nicht bloß für die einzelnen Momente der Bewegung tabuliert, sondern noch graphisch darstellt, gelingt es ihm immer auf graphischem Wege die Beträge für die linearen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Schwerpunkte und auch für die Winkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen der einzelnen Glieder des Beines zu erlangen, so daß in jenen Gleichungen als unbekannt nur die zuletzt genannten Drehungsmomente der inneren Kräfte übrig bleiben und nunmehr bestimmt werden können. Bekanntlich hatten die Gebrüder Weber die Ansicht ausgesprochen, daß diese sich auf Null reduzieren und die Bewegung des Beines eine reine Schwingungsbewegung unter dem Einflusse der Schwerkraft sei. Das Resultat des Verfassers ist von dieser Ansicht das konträre Gegenteil. Der Anteil, welchen die Muskelkräfte an der Bewegung des Gehens haben, ist mehrmals größer als derjenige der Schwerkraft, und so ist hiermit die Frage dahin entschieden, daß der Gang in der Hauptsache durch Muskelkontraktion zustande kommt. Die Einwendungen, die man dem Verfasser gegen die Grundlage dieses Ergebnisses machen könnte, werden von ihm selbst bereits widerlegt. Man könnte vor allem auf die geringe Anzahl der Beobachtungen hinweisen, auf welche die Arbeit sich stützt. Aber die Übereinstimmung zwischen diesen allerdings geringzähligen Messungen ist eine so ausgezeichnete, daß man die Richtigkeit des Resultates kaum bezweifeln kann. Auch hat der Verfasser — zum Überfluß möchte man meinen — durch Beobachtungen von etwa 100 ver-

schiedenen Individuen den praktischen Beweis erbracht, daß bei der gewöhnlichen Gangart die Grundgrößen, nämlich die Schrittlängen, die Anzahl der Schritte in der Minute, die Geschwindigkeit, soweit dieselbe ohne chronophotographische Aufnahmen festzustellen sind, im wesentlichen übereinstimmen.

Nebenbei ergibt die Untersuchung auch die Größen des kinetischen Druckes im Hüft-, Knie- und Fußgelenk. Nachdem der Verfasser noch darauf hingewiesen hat, daß die Elastizität der Bänder nur von ganz verschwindendem Einflusse auf den Gang sein kann, daß vielmehr die inneren Kräfte wirklich im wesentlichen Muskelkräfte sein müssen, beginnt er die Frage, welche Muskeln in den einzelnen Momenten eines Schrittes kontrahiert sein und so auf den Gang einwirken können, einer Diskussion zu unterziehen; indessen sieht er selbst diesen Teil der Untersuchung als noch nicht abgeschlossen an.

Die Abhandlungen zeigen, was geschickte Ausnutzung der experimentellen Hilfsmittel mit einem erstaunlichen Fleiße bei der Bearbeitung der gewonnenen Messungsergebnisse für die Entscheidung wichtiger theoretischer Fragen zu leisten imstande sind.

Charlottenburg. H. Samter.

Dacqué. Wie man in Jena naturwissenschaftlich beweist. Stuttgart, Max Kielmann 1904. 28 S. Preis 60 Pf.

Vor 120 Jahren zeigte Kant in der Kritik der reinen Vernunft, daß alle kosmologischen oder physikoteleologischen Beweise für die Existenz übernatürlicher Kräfte irrig sind, da sich aus der großen Reihe von Ursachen, die wir kennen, nicht auf eine erste Ursache, noch auch aus der scheinbaren Zweckmäßigkeit uns bekannter Dinge auf diejenige des Weltganzen schließen lasse. Neuerdings aber tritt versteckt oder offen wieder das Bestreben hervor, in der Form der Lebenskraft oder kosmischer Intelligenzen zweckbestimmende Faktoren einzuführen, die, wenn sie auch innerhalb der gegebenen Naturgesetze wirken sollen, doch über den natürlichen Kräften stehend, deren Spiel als „Dominanten" beherrschen. Solche Ideen hat z. B. Reinke an verschiedenen Stellen ausgeführt. Diese Gedanken werden von Vertretern der Häckelschen Schule scharf angegriffen während dessen ebenso unbeweisbare Hypothese über die erste Entstehung des Lebens durch Urzeugung energisch verteidigt wird. Der Verfasser wendet sich gegen die Begründung dieser durch Heinrich Schmidt. Uns will es scheinen, daß es keinen Zweck hat, die noch nicht ausgefüllte Lücke in der kosmogonischen Theorie zum wilden Tummelplatz unbeweisbarer Hypothesen zu machen, sondern daß man lieber immer wieder versuchen soll, ob sich nicht durch das Experiment Fortschritte in diesem dunklen Gebiete machen lassen. Der geringste experimentale Fortschritt ist für die Frage, ob das Leben ewig oder durch Urzeugung entstanden ist, wichtiger als alle Hypothesen.

Charlottenburg. H. Samter.

Mahler, Physikalische Formelsammlung. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1903, G. J. Göschen. 190 S. Preis geb. 0.80 *M.*

Daß dieses Büchlein in hervorragender Weise brauchbar ist, zeigt der Umstand, daß nach kurzer Zeit eine neue Auflage davon notwendig wurde.

Es eignet sich nicht allein zum Nachschlagen der wichtigsten Formeln der Physik, sondern gibt auch kurze Ableitungen derselben, soweit solche mit Hilfe der elementaren Mathematik durchführbar sind, und auch eine Anzahl von wichtigen Gedankenreihen, die nicht gerade in einer Formel ihr Endziel haben, wie z. B. diejenigen, welche die Geschwindigkeit des Lichtes finden gelehrt haben. Für die neue Auflage sind eine Anzahl geschickt gewählter Beispiele für Schwerpunkts- und Trägheitsmomentbestimmungen hinzugekommen, sowie die Gesetze der Drehbewegung mit Anwendungen auf das physische Pendel, die Entstehung des Regenbogens, die Berechnung der Feldstärke eines Stabmagnetes und eines magnetischen Blattes.

Etwas weiter hätte vielleicht hierauf und auf die elektrische Induktion noch eingegangen werden können, um wenigstens die Fundamente der Berechnung von stromliefernden Maschinen vor Augen zu führen. Aber auch trotz dieser Lücke, die bei der dritten Auflage vielleicht zu stopfen wäre, erscheint das Buch in hohem Grade empfehlenswert.

Charlottenburg. H. Samter.

Jochmann. Grundriß der Experimentalphysik und Elemente der Chemie sowie der Astronomie und mathematischen Geographie. Herausgegeben von Hermes und Spieß. 15. vollständig neubearbeitete Auflage. Berlin 1903, Winckelmann und Söhne. XX u. 524 S. Preis geb. 5,50 Mk.

Seitdem für die Bearbeitung der 14. Auflage dieses Lehrbuches der an zweiter Stelle genannte Herausgeber gewonnen war, hat dasselbe in zwei Hinsichten bedeutende Abänderungen erfahren. Einmal ist den modernen Tatsachen und Begriffen, insbesondere in der Elektrizitätslehre, ohne die ein eindringender Unterricht kaum mehr denkbar erscheint, insbesondere dem Potentialbegriff der Zugang eröffnet worden, und seine Einführung durch das Experiment entspricht durchaus den Anforderungen, die der Unterricht stellt. Andererseits ist an vielen Stellen neben die deduktive Behandlung des Gesetzes, die dasselbe mathematisch aus Prämissen ableitet, auch die induktive Ableitung durch das Experiment getreten, ein Weg, der dem Wesen des Physikunterrichtes mehr angepaßt erscheint. Dies konnte geschehen, ohne daß der Umfang des Buches wesentlich vermehrt wurde, da viele von den das Buch unnötig belastenden Nebensachen mit Recht weggelassen wurden. Auch bei der neuen Auflage ist das Bestreben sehr anzuerkennen, dem Schüler das Verständnis auch schwierigerer Gesetze zu vermitteln. So finden wir eine eingehende Darstellung des 2. Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. Dem Verleger gebührt Dank für die Vermehrung der Abbildungen, von denen die Spektrentafel und die Tafel zur Erläuterung des Dreifarbendruckes hervorgehoben seien.

Charlottenburg. H. Samter.

Abraham, Recueil d'expériences élémentaires de physique. Première partie. Paris 1904, Gauthier-Villars. XII u. 247 S. Preis ungebd. 3,75 fr., gebunden 5 fr. Seconde partie XII u. 454 S. Preis ungebd. 6,25 fr., gebd. 7,50 fr.

In der französischen Literatur gab es bisher kein Werk, welches die im Elementar-Unterricht der Physik nötigen Experimente für den Ge-

brauch des Lehrers zusammengefaßt hätte. Während der deutsche Physiklehrer längst in Fricks Physikalischer Technik, in Weinholds Vorschule und für einen weitergehenden Unterricht in den Demonstrationen desselben Autors die für die Vorbereitung auf die Versuche nötigen Anleitungen hatte, ist das vorliegende Buch erst auf Anregung des Vorstandes der französischen physikalischen Gesellschaft entstanden, und zwar veranlaßt durch die Einführung eines Praktikums in den Schulen. Der Herausgeber hat dazu die Mitarbeit einer großen Anzahl von Physikern herangezogen, die durch Beschreibung von Versuchen und durch bibliographische Hinweise ein sehr nützliches Werk zusammengetragen haben. Unter denselben bemerken wir von Deutschen Behn (Frankfurt), Fischer (München), Looser (Essen) und v. Öttingen (Leipzig). Unter den Quellen ist von den oben genannten deutschen Büchern nur das letzte benutzt, außerdem sind die Bücher für das physikalische Praktikum von Kohlrausch und Wiedemann und Ebert herangezogen. Die reichen Schätze von Schulversuchen, die im Müller-Pouillet und besonders in der Zeitschrift von Poske sich finden, sind aber nicht herausgeholt worden. Trotzdem wird die Sammlung, die uns vorliegt und die im ersten Bande Mechanik und Wärmelehre betrifft, wohl für die meisten Lehrer genügendes Material enthalten. Wir vermißten z. B. Versuche über das Sieden bei Überdruck (außer dem Papinschen Topf) und über Geisererscheinungen. Ein Teil der angeführten Versuche geht in seinen Urquellen, die nicht angeführt sind, sehr weit zurück: so ist Versuch 72 auf Galilei zurückzuführen (Discorsi 3. Tag). Für den Lehrer ist es eine große Erleichterung, daß die Dimensionen der Apparate überall genau angegeben sind. Sehr reich und dem Referenten zum Teil neu ist das Material über Oberflächenspannung, sowie über die Grundtatsachen der technisch so wichtigen Festigkeitslehre. Den Experimenten vorangeschickt ist ein Kapitel über Arbeiten in der Werkstatt mit Metall, Holz und Glas sowie eine große Anzahl von chemischen Rezepten, die der Physiklehrer brauchen kann.

Auch die im 2. Kapitel (Geometrie und Mechanik) vorangestellten Anweisungen für die Messung der Längen von geraden und krummen Linien, der Dicken, Oberflächen und Volumina enthält manches Neue, und die dazu gehörige Einleitung über zufällige und systematische Fehler sowie über das Gesetz der großen Zahlen wird denjenigen Lehrern, die Schülerübungen veranstalten, manchen nützlichen Wink geben. Den Schluß bildet eine Reihe von numerischen Tabellen, der für denselben Zweck sehr brauchbar sich erweisen werden, die freilich in ungefähr demselben Umfange auch Kohlrauschs praktischer Physik beigegeben sind. Auch dem deutschen Lehrer ist das Kompendium sehr zu empfehlen.

Seit Abschluß des Berichtes hat der Referent eine Anzahl von Versuchen nach Angaben des Buches ausgeführt und bei Schülerübungen erprobt und zum größten Teile für recht gut befunden. Ein großer Vorzug ist es, daß dieselben sehr geringe Mittel erfordern und daher auch für Schulen mit kleinem Etat sehr geeignet sind.

Der soeben erschienene 2. Teil teilt die Vorzüge des ersten und zeigt, wie sich schon die neuesten Forschungsergebnisse im Unterrichte, auch demjenigen im Laboratorium nutzbar machen lassen. Daß die Ströme hoher Wechselzahl und starker Frequenz, daß die Telegraphie ohne Draht be-

rücksichtigt sind, wird nicht wunder nehmen, aber es fehlen auch die singende Bogenlampe nicht, noch die Jonisierung der Luft.

Charlottenburg. H. Samter.

Binder. Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des chemischen Unterrichts an deutschen Mittelschulen. 1903. 34 S. Preis 80 Pf.

Günthart. Die Aufgaben des naturkundlichen Unterrichts vom Standpunkte Herbarts. 1904. VIII u. 67 S. 1,50 Mk. (Aus „Sammlung naturwissenschaftlich-pädagogischer Abhandlungen". Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.)

„In dieser Sammlung sollen Abhandlungen erscheinen, die in einer Zeitschrift sich auf mehrere Nummern zersplittern würden und doch zu kurz wären, um ein Buch zu füllen." Von den uns vorliegenden gibt die erste ein in vielen Punkten, auch für Nicht-Chemiker, sehr interessantes Bild der Entwicklung des chemischen Unterrichts in Deutschland, wobei entgegen den üblichen Darstellungen auch die außerpreußischen Länder gebührend berücksichtigt werden. Der etwas kurze Abschnitt über die Geschichte der Lehrbücher könnte zum Nutzen der Lehrer, für die ja das Werkchen hauptsächlich bestimmt ist, bei einer späteren Auflage vielleicht erweitert werden.

Theoretische Betrachtungen über die Praxis des Unterrichtes, wie sie die zweite Abhandlung enthält, sind a priori nicht denkbar; sie schöpfen aus der didaktischen Erfahrung, aus der sie induktiv entwickelt sind, wie die Geometrie aus der Anschauung, und suchen doch den Anschein zu erwecken, als ob sie aus einer Anzahl von Axiomen heraus das Bild eines allein weise machenden Unterrichtes deduzieren könnten. Für die Richtigkeit der Schlußfolgerungen müssen die praktischen Anwendungen der Theorie maßgebend sein. Wir zweifeln z. B., ob die über die Stellung des Experimentes im Unterrichte gemachten Schlüsse die allgemeine Anerkennung der Lehrer finden werden, und glauben auch nicht, daß die Herbartschen, für den Anfänger wohl brauchbaren Prinzipien mit Notwendigkeit zu diesen Folgerungen führen.

Charlottenburg. H. Samter.

Rosenberg, Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen und verwandter Lehranstalten. Wien und Leipzig 1904, Alfred Hölder. VIII u. 488 S. Preis gebunden 5.20 *M.*

Dieses Buch hat alle Vorzüge eines guten Lehrbuches: Es sondert das Wichtige aus und läßt die sonst noch vielfach in Lehrbüchern zu findenden, für den Unterricht ganz nutzlosen Stoffe beiseite, ohne irgendwo die Tatsachen vermissen zu lassen, die für die Praxis von Belang sind. Es trennt durch verschiedenen Druck den Lernstoff von den bei der Durchnahme desselben helfenden Betrachtungen, von den Anwendungen und den mit Sorgfalt ausgewählten Rechenaufgaben, die zumeist — wie die Denkaufgaben — nur schnell wirkende Prüfsteine für das Verständnis sind und nur selten eine längere Ausarbeitung erfordern. Es zeichnet sich aus durch klare Sprache, Sorgfalt und Anschaulichkeit im Ausdruck, wie in den beigefügten, vielfach

für das Buch besonders hergestellten Zeichnungen. Es ist ausführlich genug, um auch dem Lehrer eine Stoffauswahl möglich zu machen, und bringt z. B. eine klare, gewiß nicht zu kurze Auseinandersetzung der Polarisationserscheinungen des Lichtes, wählt für die Phänomene des magnetischen Feldes und natürlich auch der stromliefernden Maschinen durchaus die Betrachtung der Kraftlinien, die obgleich so grob sinnlich, das Verständnis der Erscheinungen wie kein anderes Mittel zu fördern geeignet sind. Ein den Grundlehren der Astronomie gewidmeter Abschnitt fällt ebenfalls vorteilhaft auf durch Anschaulichkeit der Sprache und der Zeichnungen, bedarf aber freilich für die Prima unserer Schulen einer Ergänzung unter Zuhilfenahme der sphärischen Trigonometrie. Der Zusatzabschnitt über Chemie wird für Gymnasien durchaus genügen. Es fehlen nicht eine Reihe historischer Notizen, wie wir sie zur Belebung des Unterrichts für sehr angebracht halten. Dieselben sind freilich nicht gleichmäßig durchgearbeitet. So fehlt Heron ganz; während von Hughes erwähnt wird, wieviel er wohltätigen Stiftungen vermacht hat, wird das, was Siemens den Interessen der Technik und Wissenschaft geopfert hat, nicht erwähnt; und wenn wir Lavoisiers trauriges Schicksal erfahren, so hätten wir den Anspruch, auch von Galileis Geschick etwas zu vernehmen.

Jedenfalls bietet das schön ausgestattete Buch für den billigen Preis so vieles Gute, daß wir seine Einführung auch in norddeutschen Schulen durchaus empfehlen können.

Charlottenburg. H. Samter.

Maurice Godefroy, Théorie élémentaire des séries. Paris, 1903. Gauthier-Villars.

Nach Einführung der Irrationalzahlen (unter Anlehnung an Dedekind) wird eine Reihe von Sätzen über Grenzwerte bewiesen, wie sie sich in Cauchys klassischem „Cours d'analyse algébrique" finden. Mit Méray nennt der Verfasser eine Größe, die eine Funktion des ganzzahligen, positiven Index n ist, Variante. Die Formulierung der einzelnen Theoreme wird durch Benutzung dieses sehr zweckmäßigen Terminus wesentlich vereinfacht. Den Schluß des 1. Kapitels bilden einige Sätze über stetige Funktionen; auch werden die Begriffe „Derivierte" und „Differential" erklärt.

Das 2. Kapitel behandelt die unendlichen Reihen mit konstanten Gliedern. Es wird (für Reihen mit positiven Gliedern) das Kummersche Konvergenzkriterium abgeleitet, aus dem durch Spezialisierung die Regeln von d'Alembert und von Raabe hervorgehen, für die übrigens noch besondere Beweise erbracht werden. Die Cauchysche Regel, welche sich auf die Betrachtung von $\sqrt[n]{u_n}$ gründet, wird mit der d'Alembertschen verglichen. Eine von E. Cahen herrührende Verfeinerung der Raabeschen Regel erweist sich als nützlich bei der Ableitung des von Gauß in seiner Arbeit über die hypergeometrische Reihe angegebenen Konvergenzkriteriums. Nach Erledigung der alternierenden Reihen wendet sich die Darstellung den absolut konvergenten Reihen zu. Es wird die Unzerstörbarkeit ihrer Konvergenz und die Unveränderlichkeit ihrer Summe bei Umrangierungen der Glieder bewiesen und gezeigt, daß man bei den semikonvergenten Reihen durch geeignete Umrangierungen der Glieder nicht nur den Wert der Summe beliebig ändern, sondern auch die Konvergenz aufheben kann. Da man

ferner bei jeder konvergenten Reihe benachbarte Glieder in eines zusammenfassen darf, ohne daß die Summe sich ändert, so verhalten sich die absolut konvergenten Reihen hinsichtlich ihrer Summe durchaus wie Aggregate einer endlichen Anzahl von Gliedern. Eine Ergänzung hierzu liefert die Betrachtung der Doppelreihen, indem sie zeigt, daß man bei der Gruppierung der Glieder einer absolut konvergenten Reihe auch unendlich viele zu einer Gruppe vereinigen darf. Gerade darin liegt ein mächtiges analytisches Hilfsmittel. Als Beispiel wird die Clausensche Transformation behandelt und zur Summierung der Lambertschen Reihe benutzt. Zum Schluß wird die Multiplikation zweier konvergenter Reihen, von denen die eine absolut konvergiert, nach Mertens auseinandergesetzt.

Im 3. Kapitel beschäftigt sich der Verfasser mit Reihen, deren Glieder Funktionen einer Veränderlichen sind. Hier steht natürlich der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz im Vordergrund. Als Beispiel für ungleichmäßige Konvergenz wird die von P. du Bois-Reymond in seinem „Antrittsprogramm" angegebene Reihe

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x}{(x+1)(2x+1)}+\cdots\cdots+\frac{x}{(\overline{n-1}\,x+1)(nx+1)}+\cdots\cdot$$

benutzt. Sie konvergiert, wenn $a>0$ ist, in dem Intervall $(0, a)$, aber nicht gleichmäßig. Es wird der Satz bewiesen, daß die Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe von stetigen Funktionen wiederum stetig ist, und unter Berufung auf das Cantorsche Beispiel

$$\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}\right]$$

hervorgehoben, daß auch eine ungleichmäßig konvergente Reihe stetiger Funktionen eine stetige Summe haben kann. Den meisten Raum nehmen in diesem Kapitel, wie es auch sein muß, die Potenzreihen ein. Den Kernpunkt bildet hier das Abelsche Theorem, daß eine für $x = x_0$ konvergente Potenzreihe für $|x| < |x_0|$ absolut konvergiert und in dem Intervall $(0, x_0)$ gleichmäßig konvergent ist. Es wird die Beziehung zwischen der Potenzreihe und den durch gliedweise Differentiation entstehenden Reihen erörtert und eine Anwendung auf die Integration der Differentialgleichung $y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0$ gemacht für den Fall, daß f und g durch Potenzreihen darstellbar sind. Dann folgen Betrachtungen über die Binomialreihe, die Kugelfunktionen, die hypergeometrische Reihe, die Taylorsche und Maclaurinsche Formel, die Entwicklung des Quotienten zweier Potenzreihen.

Bis hierher reicht der allgemeine Teil des Buches. Die drei letzten Kapitel bieten spezielle Untersuchungen über die Exponentialfunktion, die Kreisfunktionen und die Gammafunktion.

Die Exponentialfunktion wird zunächst als die Summe der bekannten Potenzreihe definiert, daraus die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ gewonnen und diese nach dem Muster von Cauchy diskutiert, woraus sich dann die Berechtigung zur Benutzung des Symbols e^x ergibt. Der Leser erfährt in diesem Kapitel, was Besselsche Funktionen, Bernoullische Zahlen und Polynome sind. Er findet hier sogar den schönen von Gordan

und Hurwitz (im Anschluß an Hilbert) entwickelten Beweis für die Transzendenz von e. $\cos x$ und $\sin x$ werden rein analytisch durch die zugehörigen Potenzreihen definiert, woraus sich dann die Formeln für $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$ ergeben. Die erstere liefert für $y = -x$ die Relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Die Zahl $\pi/2$ wird eingeführt als die einzige Wurzel der Gleichung $\cos x = 0$ in dem Intervall $(0, 2)$, woraus $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ folgt. Nunmehr läßt sich mit Hilfe der Additionstheoreme die Periodizität der beiden Funktionen nachweisen, und π gewinnt die neue Bedeutung, der halben Periode gleich zu sein. Faßt man $\cos x$ und $\sin x$ als rechtwinklige Koordinaten auf, so ergibt sich die geometrische Bedeutung von x, $\cos x$, $\sin x$, die in der Trigonometrie den Ausgangspunkt bildet. Insbesondere zeigt sich, daß 2π der Umfang des Einheitskreises ist. Die unendlichen Produkte für $\cos x$ und $\sin x$ dürfen natürlich in diesem Kapitel nicht fehlen, und es werden die damit zusammenhängenden Potenzreihen für $\log\frac{\sin x}{x}$, $\log\cos x$, $\log\frac{\tan x}{x}$, $x\cot x$, $\tan x$ usw. mit aller Sorgfalt abgeleitet, ebenso die Partialbruchzerlegungen für $\cot x$, $\tan x$, $\sec x$ und $\operatorname{cosec} x$. Über trigonometrische Reihen wird auch einiges gesagt, und spezielle Reihen dieser Art werden behandelt, z. B. die wichtige Reihe für $\log(1 - 2x\cos\vartheta + x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Endlich wird die berühmte Weierstraßsche Reihe

$$f(x) = \cos\pi x + r\cos a\pi x + r^2\cos a^2\pi x + \cdots \quad (0 < r < 1),$$

wo a eine ungerade ganze Zahl und größer als $1/r$ ist, untersucht und mit voller Strenge bewiesen, daß die stetige Funktion $f(x)$ unter der Bedingung $ar \geqq 1 + \frac{3\pi}{2}$ nicht differenzierbar ist. Das Kapitel schließt mit eleganten Entwicklungen über die inversen Kreisfunktionen und die hyperbolischen Funktionen.

Der Abschnitt über die Gammafunktion ist dem Verfasser glänzend gelungen. Da er eine Monographie über diese Funktion geschrieben hatte (La fonction gamma; théorie, histoire, bibliographie. Paris, 1901. Gauthier-Villars), so befand er sich hier in seinem Element. Ich will auf die Einzelheiten dieses Kapitels nicht eingehen.

Das Buch enthält am Schlusse jedes Abschnitts Übungen und zahlreiche literarische Nachweise, die mit großer Sorgfalt zusammengetragen sind. Wir können, besonders im Interesse der Studierenden, dem Verfasser für sein gewissenhaft und gründlich abgefaßtes Werk nur dankbar sein.

Greifswald. G. Kowalewski.

A. Fouët. Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. Première Partie (Chap. I à V.) Paris 1902, Gauthier-Villars. 8°. 330 S.

Das Werk, von dem der vorliegende erste Teil leider noch kein Register enthält, soll eine elementare Einleitung in die moderne Theorie der analytischen Funktionen geben. Zugleich ist es ein trefflicher Wegweiser für den, der sich über die neuesten Errungenschaften dieses Gebiets orientieren will, die sich an die Namen Borel, Hadamard, Hilbert, Mittag-Leffler,

Poincaré, Pringsheim u. a. knüpfen. Aus der Doppelnatur ergeben sich manche Widersprüche, oder es folgt doch eine gewisse Disharmonie.

Elementare Teile, wie die bekannte konforme Abbildung durch die linear gebrochene Funktion sind breit behandelt, während schwierigere Auseinandersetzungen, z. B. die Cantorsche Mengenlehre in der Einleitung (S. 12—28), Hilberts Entwickelung einer Funktion nach Polynomen (S. 323), Mittag-Lefflers Darstellung einer Funktion im „sternfömigen Gebiet" (S. 324) kurz erledigt werden.

Die durch die Absicht, weite Ausblicke zu geben, geforderte Anordnung bringt es auch mit sich, daß wir einer Erörterung des Begriffs „Integral" erst später begegnen, im vierten Kapitel (S. 253—270). Schon vorher aber ist die gliedweise vorgenommene Integration unendlicher Reihen (S. 125), die Summation divergenter Reihen nach Borel mit Hilfe von Exponentialintegralen (S. 162) — die Theorie der Exponentialfunktion folgt dieser Anwendung (S. 169—177) — das Eulersche Integral zweiter Gattung (S. 189—192), der Vergleich der Konvergenz von Doppelreihen (S. 205) und mehrfachen Reihen (S. 209) mit Doppelintegralen und mehrfachen Integralen mehr oder weniger ausführlich besprochen.

Die Behandlung der elementareren Teile, z. B. der Riemannschen Flächen bei algebraischen Funktionen (S. 100—112), der Konvergenz der Potenzreihen mit Angabe des Konvergenzkreises (Cauchy-Hadamardscher Satz S. 136) ist sorgfältig und elegant.

Besondere Erwähnungen verdient das Kapitel V: Die analytische Fortsetzung nach Weierstraß, wo wir eine Übersicht der neuesten Arbeiten finden, so u. a. ein Eingehen auf die Frage, wann der Konvergenzkreis zugleich die natürliche Grenze ist (S. 307).

Dem Zweck des Buches entsprechend, zeichnen sich die Literaturangaben durch große Vollständigkeit aus, und der Verfasser weiß von jeder zitierten Abhandlung kurz das Wesentliche hervorzuheben.

So ist denn zwei Arten von Lesern gedient: Dem Anfänger, der die Grundlagen erlernen will, sich aber nicht durch die vielen Hinweise auf schwierigere Gebiete verwirren lassen darf, und dem Fortgeschrittenen, dem das Buch viel Nachschlagen und Suchen ersparen wird.

Greifswald. G. Kowalewski.

Ernesto Pascal, I gruppi continui di trasformazioni (parte generale della teoria). Milano, 1903. Ulrico Hoepli.

Das Büchlein gibt unter Benutzung der großen Werke von Lie-Engel und Lie-Scheffers eine kurze Einführung in die Liesche Gruppentheorie und ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verfasser an der Universität Pavia gehalten hat.

Der erste Abschnitt behandelt im wesentlichen die drei Fundamentalsätze der Theorie der endlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen. Dann folgt die Lehre von den Invarianten, invarianten Gleichungssystemen, sowie den invarianten vollständigen Systemen und invarianten Scharen infinitesimaler Transformationen, die bei einer Gruppe auftreten können. Hier werden auch die Bedingungen für die Ähnlichkeit zweier Gruppen entwickelt, für den Fall, daß diese durch ihre infinitesimalen Transformationen gegeben

sind. Im dritten Abschnitt kommen einige Fragen zur Sprache, die sich auf die Zusammensetzung der Gruppen beziehen. Im vierten werden gewisse Gruppen betrachtet, zu denen eine vorgelegte Gruppe Veranlassung gibt (z. B. die adjungierte Gruppe, die Parametergruppen, die reziproke einer einfach transitiven Gruppe). Den Schluß bildet die wichtige Theorie der Erweiterung einer Gruppe, wozu die Theorie der Differentialinvarianten und invarianten Systeme von Differentialgleichungen gehört.

Der Verfasser hat mit großem Geschick das Wichtigste ausgewählt und in gefälliger Form dargestellt. Die Berührungstransformationen hat er ganz beiseite gelassen, was durchaus zweckmäßig ist. Herr Pascal hat auch eigene Untersuchungen über die Lieschen Fundamentalsätze angestellt, über die er zum Teil in den beigefügten Noten und Zusätzen referiert. Wegen ihrer Beurteilung verweise ich auf die Besprechungen von Engel im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik".

Greifswald. G. Kowalewski.

G. Humbert, Cours d'Analyse professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. (Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques.) Paris, 1903. Gauthier-Villars.

Das Buch setzt Leser voraus, die mit dem Inhalt des sogenannten „Cours de Mathématiques spéciales" vertraut sind. Es sind das ungefähr die Kenntnisse, die unsere Studenten in den Vorlesungen über „Einleitung in die höhere Analysis" erwerben, einschließlich der Elemente der analytischen Geometrie.

In den ersten Paragraphen gibt der Verfasser kurz einige Definitionen und Sätze, die sich auf den Begriff des Limes und den des Maximums (Minimums) einer nach oben (unten) beschränkten Wertmenge beziehen. Er unterscheidet „obere (untere) Grenze" und „Maximum (Minimum)" einfach in der Weise, daß er im ersteren Falle von einem „maximum non atteint" spricht. Es folgen weiter einige Theoreme über stetige Funktionen, wobei die (von Herrn Painlevé herrührenden) Beweise an Eleganz und Strenge nichts zu wünschen übrig lassen. Nach Auseinandersetzung der fundamentalen Begriffe „Ableitung" und „Differential" (für Funktionen von einer und von mehreren Veränderlichen) wird in einem ziemlich umfangreichen Kapitel sogleich eine Reihe von geometrischen Beispielen vorgeführt. Vom pädagogischen Gesichtspunkt ist dieses möglichst frühe Heranziehen der Infinitesimalgeometrie nur zu loben. Der Studierende sieht, daß mit den neuen Begriffen, die er sich eben angeeignet hat, wirklich etwas geleistet werden kann.

Im übrigen weicht dieses durchweg mit meisterhafter Klarheit geschriebene Werk seinem Inhalt nach nicht wesentlich von anderen Lehrbüchern ab. Die Existenz und die Grundeigenschaften des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion werden nach einem sehr schönen und einfachen Verfahren von Painlevé abgeleitet.

Greifswald. G. Kowalewski.

J.-A. Serret. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweite, durchgesehene Auflage, herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Dritter Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. XII u. 479 S. 33 Figuren. 8°. Leipzig, B. G. Teubner 1904.

Die Vorzüge des klassischen Serretschen Lehrbuches besonders hervorheben, hieße, nichteuklidische Geometrien nach Göttingen tragen. Dem vorliegenden dritten Bande, der die totalen und partiellen Differentialgleichungen sowie die Variationsrechnung behandelt, ist es zugute gekommen, daß der eine der beiden Herausgeber der neuen Auflage auf dem Gebiete der Lieschen Transformationen und geometrischen Methoden, der andere auf dem Gebiete der Variationsrechnung wohl bewandert ist. Der auf dem verhältnismäßig kleinen Raum von c. 450 Seiten behandelte äußerst reichhaltige Stoff ist im großen und ganzen der alte geblieben; wesentlich geändert aber ist die Disposition und infolge dessen auch vielfach die Form und Anordnung der Darstellung. Ganz neu bearbeitet ist das Kapitel über Variationsrechnung; natürlich konnte in dem zur Verfügung stehenden Raume keine systematische Darstellung dieser Disziplin auf moderner Grundlage geboten werden; vielmehr wurde wie bisher als erreichbares Ziel festgehalten die Aufstellung der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen für den Fall einfacher Integrale unter Berücksichtigung solcher Nebenbedingungen, die in den praktisch wichtigen Fällen vorzugsweise in betracht kommen; dagegen wurde auf die Behandlung der Doppelintegrale sowie auf die Theorie der zweiten Variation und überhaupt der hinreichenden Kriterien grundsätzlich verzichtet und für dieselben auf das Lehrbuch von Kneser verwiesen.

Bei den Differentialgleichungen erster Ordnung haben die Herausgeber sich leider wieder mit den alten formalen, auf Quadraturen basierenden Theorien begnügt, hier allerdings einiges, z. B. die Lösung der Jacobischen Differentialgleichung, mustergültig dargestellt und auch die geometrischen Transformationsmethoden Lies wenigstens in großen Zügen angedeutet. Dagegen haben sie den „neueren“, d. h. eigentlich längst bekannten funktionentheoretischen Entwicklungen gar keine Rechnung getragen. Es ist die alte Klage des Ref.: die Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung ist und bleibt das Stiefkind der meisten Lehrbücher, die dieses Gebiet behandeln (z. B. Schlömilch, Pascal, Liebmann u. a.; eine rühmliche Ausnahme machen neuerdings Picard in seinem Traité, Schlesinger in der Schubert-Sammlung und Forsyth). Die klassischen Untersuchungen von Briot und Bouquet, Hermite und Fuchs über die Differentialgleichungen erster Ordnung mit eindeutigen Integralen, die prinzipiell wichtige Unterscheidung zwischen festen und beweglichen Verzweigungspunkten, die Hamburgerschen grundlegenden Resultate über die singulären Lösungen, Poincarés geometrische Arbeiten über die singulären Punkte dürfen auch in einem einführenden Lehrbuch nicht mehr ganz fehlen; zum mindesten wäre doch — schon der Vollständigkeit halber — ein Hinweis auf dieselben angebracht gewesen; vielleicht entschließen die Herausgeber sich dazu, in einer neuen Auflage durch ein besonderes Kapitel die gerügte Lücke des sonst recht brauchbaren Lehrbuches auszufüllen. — Dagegen ist im 6. Kapitel die Darstellung der funktionentheoretischen Untersuchung der

linearen Differentialgleichungen erweitert worden. Hier wird zunächst die Existenz eines Fundamentalsystems an einer regulären Stelle durch Reihenentwicklung bewiesen und sodann durch das analoge Verfahren auch die Existenz einer Partikularlösung an einer singulären Stelle der Bestimmtheit; das Auftreten von Logarithmen wird wenigstens durch Beispiele erläutert.

In einem Anhang ist zunächst aus der alten Auflage die Harnacksche Note über das Existenztheorem in der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen wieder abgedruckt; es folgen dann wie bei den beiden ersten Bänden Schlußbemerkungen mit Literaturnachweisen und ein Register für den dritten Band. — Alles in allem kann auch der vorliegende dritte Band zum einführenden Studium empfohlen werden; die Beweise der Existenztheoreme sind in einfacher und doch strenger Form dargestellt; insbesondere aber seien die geometrischen Deutungen sowie die zahlreichen, vollständig durchgeführten Beispiele rühmend hervorgehoben.

Berlin. Georg Wallenberg.

H. Fenkner. Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Erster Teil: Ebene Geometrie. 4. umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin, Salle. 1903. VIII u. 224 S. geh. 2,20 *M.*

K. Schwering und **W. Krimphoff. Ebene Geometrie.** Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. Vierte Auflage. Freiburg im Breisgau. Herdersche Verlagshandlung. 1902. VI u. 136 S. geh. 1,60 *M.*

Emil Müller. Lehr- und Übungsbuch der ebenen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Lehrsatz und Konstruktionsaufgabe für Gymnasien und Realschulen. Berlin, Winckelmann u. Söhne. 1903. VI u. 172 S. geh. 1,80 *M.*

E. Wienecke. Der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten zum Gebrauch in allen Lehranstalten. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner. 1904. IV u. 98 S. geb. 2,20 *M.*

Dem Inhalte nach umfassen Fenkner und Schwering-Krimphoff das geometrische Pensum aller höheren Lehranstalten gemäß den Lehrplänen von 1901, wenn auch für die Oberstufe der realen Vollanstalten nicht durchweg in ausreichendem Maße. Müller bestimmt sein Buch für die Gymnasien und Realschulen und hat eine geeignete Stoffauswahl getroffen. Wienecke will eine Darstellung des propädeutischen geometrischen Vorkursus für den Gebrauch an allen Lehranstalten geben. Er bringt weitaus zu viel für höhere Lehranstalten, bei denen für eine so umfangreiche Ausgestaltung des Vorkursus kein Platz ist. Aber auch in den Volksschulen, oder wo sonst mehr Zeit für den propädeutischen Kursus zur Verfügung steht, hält es Ref. für bedauerlich, wenn geometrische Sätze mit ganz ungeometrischer Herleitung den Schülern dargeboten werden (etwa der Satz über die Winkelsumme im Dreieck gestützt auf wiederholte Messungen).

In den Grundzügen der Anordnung und Darbietung des Stoffes stimmen die ersten drei Lehrbücher überein. Während Fenkner auf die besondere

Vertiefung des Beweisverfahrens Wert legt, betonen Schwering-Krimphoff und Müller, deren Bücher sich noch durch recht gute Figuren auszeichnen, mehr die Aufgabenbehandlung und den Zusammenhang der Aufgaben mit den Lehrsätzen. Fenkner und Schwering-Krimphoff, welche in der 5ten resp. 4ten Auflage erscheinen, sind altbewährt und bedürfen einer besonderen Empfehlung nicht mehr. Müllers Buch ist in der geometrischen Schulbuchliteratur eine neue Erscheinung, die bestens empfohlen werden kann.

Bei Wienecke ist die Darstellung, zumal in der als „Allgemeines" bezeichneten Einleitung breit. Das Buch gehört eher in die Hand des Lehrers, wo es dem Anfänger gewiß manche Anregung geben kann, als in die des Schülers. Die Figuren sind, trotzdem Wienecke selbst auf S. 5 hervorhebt: „Je vollkommener die Zeichnung, je intensiver die durch sie vermittelte Anschauung", mehrfach nicht sorgfältig genug gezeichnet. Auffallende Beispiele sind schon die Netze der Figuren 1 bis 3.

Schöneberg. E. Kullrich.

Robert Glaser. Stereometrie. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 66 Figuren. Sammlung Göschen Nr. 97. Leipzig 1903, Göschensche Verlagshandlung. 140 S. geb. 0.80 *M*.

Das Werkchen, von welchem im Archiv 1901 S. 195 die erste, 1899 erschienene, Auflage warm empfohlen werden konnte, ist nach kaum vier Jahren in zweiter Auflage erschienen. Es wurde dabei ein Abschnitt über Parallelprojektion eingeschaltet, ferner fanden Kugel und Prismatoide eingehendere Behandlung, und eine ganze Reihe interessanter Aufgaben wurde neu hinzugefügt. Die Figurenzahl wuchs von 44 auf 66. Die Erweiterungen sind dankbar zu begrüßen.

Schöneberg. E. Kullrich.

J. Pionchon. Grandeurs Géométriques. Bibliothèque de l'Élève Ingénieur. Mathématiques IV. Paris 1903, Gauthier-Villars. 128 S. geh. 3.50 Fr.

Der Verfasser, Direktor des elektrotechnischen Instituts der Universität Grenoble, will den jungen Studierenden der technischen Wissenschaften grundlegende theoretische und praktische Kenntnisse übermitteln als Ausgangspunkt für ihre Studien. Das, was bei der Beschäftigung mit der Technik sozusagen berufsmäßig immer parat sein muß, und was der Anfänger zumeist eben doch nicht parat hat, soll in den fünf Abteilungen: Mathématiques, Mécanique, Physique industrielle, Électricité industrielle und Économie industrielle der Bibliothèque de l'Élève zusammengestellt werden. Das vierte Heft des mathematischen Teils soll im besondern zur Klarlegung der geometrischen Größenbegriffe und ihrer numerischen Auswertung dienen; die einzelnen Kapitel handeln von Längen, Winkeln, Krümmungen, Flächen und Körpern und das letzte von der Bedeutung der Wahl der Einheiten. Zwei angehängte Noten geben noch einige Verallgemeinerungen.

Die klare Darstellung ist reizvoller als sonst in solchen Handbüchern, so bezüglich der Einführung homogener Linien, Flächen und Körper oder bezüglich der Benutzung der Schraubenlinie mit variablem h und r als Bindeglied zwischen den verschiedensten Größen. Im letzten Kapitel gibt

die Behandlung der Homogenität der geometrischen Formeln Gelegenheit, noch einige einfache planimetrische Formeln anzuführen.

Das Buch bietet auch für Lehrer aus solchen Kreisen, für die es nicht in erster Linie bestimmt ist, eine interessante Lektüre. Die Ausstattung ist eine vortreffliche.

Schöneberg. E. Kullrich.

Karl Schwering. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Zweite verbesserte Auflage. Erster Lehrgang 1902. Zweiter Lehrgang 1903. XVI u. 148 S. Freiburg im Breisgau, Herdersche Verlagshandlung. geb. 1.10 u. 1.50 ℳ.

Die vorliegende zweite Auflage — die erste wurde im LVIII. Literaturbericht des XV. Heftes des Archivs besprochen — hat sich bezüglich der Stoffanordnung, wenn man den ersten Lehrgang der *U*III zuweisen soll, den neuen Lehrplänen nicht vollständig angepaßt. Die negativen Größen, deren Behandlung schon in *U*III stattfinden soll, werden erst im zweiten Lehrgang eingeführt. Weniger störend ist es, wenn die Gleichungsaufgaben nicht ihren Platz bei den einzelnen Rechnungsarten finden, sondern erst zuletzt dargeboten werden, da es sich dabei nur um eine Umstellung innerhalb desselben Lehrganges handelt.

Schwering fesselt durch seine Aufgaben vielfach das Interesse, freilich zum Teil mehr das des Lehrenden als das des Lernenden, so z. B. wenn er die magischen Quadrate berücksichtigt oder die Reste geometrischer Reihen und die Potenzreste für verschiedene Moduln. Zu rühmen sind die eingekleideten Aufgaben. Bei der Auflösung von Gleichungen wird die Probe, deren Bedeutung Ref. durchaus nicht verkennt, doch wohl zu hoch eingeschätzt, wenn sie S. 35 allgemein als „ein *wesentlicher* Teil der Auflösung" bezeichnet wird. Es dürfte vielmehr ratsam sein, von vornherein zu unterscheiden, wann die Probe nur empfehlenswert, und wann sie notwendig ist.

Schöneberg. E. Kullrich.

Proell. Rechentafel „System Proell". Deutsches Reichs-Patent Nr. 133265. Dresden. Putscher. Komplett Mk. 3,00.

Die Bestandteile der in den verschiedensten Ländern patentierten Rechentafel sind: Die Untertafel aus Karton, die Obertafel aus Glimmer, die Gebrauchsanweisung (Vergl. auch Zeitschr. f. Math. u. Phys. **46** S. 218) und ein praktisches Futteral. Die graphische Darstellung der Logarithmenreihe in der erheblichen Länge von 1,2 m ist in 10 gleiche Teile zerschnitten und auf den Tafeln reihenweise untereinander angeordnet, auf der durchsichtigen Obertafel in entgegengesetztem Richtungssinn wie auf der Untertafel. Einspunkte auf der Untertafel erleichtern die Benutzung.

Der billigere Preis im Vergleich mit den linealförmigen Rechenschiebern ist ein Vorzug, die Raumersparnis dürfte nicht erheblich ins Gewicht fallen. Bei der Benutzung erscheint das Bezeichnen einer Stelle der Obertafel mit einer Nadel weniger praktisch und zuverlässig als das durch den Läufer bei den Rechenstäben. Auch wird so trotz des größeren Maßstabes die Genauigkeit nicht entsprechend größer.

Wenn man beim Unterricht das Prinzip der logarithmischen Rechenapparate erläutern will, ist Proells Rechentafel recht empfehlenswert. Eine durchsichtige Untertafel würde die Benutzung des Projektionsapparates gestatten.

Schöneberg. E. Kullrich.

Schwanzer. Repetitorium der Elementarmathematik. Zum Gebrauche für die Schüler der humanistischen Gymnasien und Realschulen sowie für Privatstudierende. Mit 28 Figurentafeln. München 1903. Max Kellerer. 142 S. geb. Mk. 3,00.

Das Buch soll vor allem dem praktischen Zwecke dienen, für Schüler höherer Lehranstalten ein Hilfsmittel bei den Repetitionen zu bilden, besonders in der Zeit der Vorbereitung auf die Reifeprüfung. Diesem Zwecke wird es gerecht. Wenn es dabei in der Algebra vielfach auch numerische Beispiele enthält und außer den positiven Angaben wiederholt Hinweise auf das Falsche bringt, so zeigt das, wie das Repetitorium aus der praktischen Erfahrung herausgewachsen ist.

Die Figuren hätten zum Teil sorgfältiger gezeichnet werden sollen, besonders Fig. 23, 27 und 31 der letzten Tafel. Auch bei der praktischen Tendenz des Buches liegt kein Grund vor, Parallelprojektionen — solche sollen es doch wohl sein — regulärer Körper falsch zu zeichnen und bei dem Netz des Ikosaeders die Dreiecke nicht gleichseitig.

Schöneberg. E. Kullrich.

Raoult, F. M., Cryoscopie. Scientia, Octobre 1901.

Das vorliegende, im Verlage von C. Naud, jetzt Gauthier-Villars, erschienene französische Werkchen ist nach dem Tode des Verfassers von einem seiner Schüler R. Lespieau herausgegeben. Es bringt auf insgesamt 106 Seiten eine möglichst vollständige Übersicht aller bisher auf dem Gebiete der Gefrierpunktserniedrigung erschienenen Arbeiten, wobei von vornherein rühmend hervorgehoben werden muß, daß gerade auch die deutschen Arbeiten ihre gebührende Anerkennung gefunden haben. Im ersten Teile werden die Grundlagen und allgemeinen Gesichtspunkte behandelt. Im zweiten folgen die Beobachtungsmethoden. Hier werden die verschiedenen von den einzelnen Beobachtern benutzten oder konstruierten Apparate beschrieben. Ausgehend von den älteren einfachen Anordnungen folgen Apparate für genaueste Bestimmungen. Den Schluß bildet ein Präzisionskryoskop des Verfassers mit genauen Angaben über die bei der Beobachtung innezuhaltenden Vorsichtsmaßregeln. Im dritten Abschnitte werden organische und nichtorganische Nichtelektrolyte und im vierten endlich die Elektrolyte besprochen. Die klare übersichtliche Gliederung des Stoffes, die ausgiebige Quellenangabe und leicht verständliche Ausdrucksweise werden dem physikalischen Chemiker, für dessen Gebrauch das Buch wohl in erster Linie bestimmt ist, leicht eine große Anzahl von Freunden erwerben, so daß es wohl wünschenswert wäre, wenn eine deutsche Übersetzung es auch den Kreisen zugänglich machen würde, die beim Studium die fremde Sprache lästig empfinden.

Berlin. H. Boas.

E. Study, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit 46 in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. Leipzig 1903, B. G. Teubner. XIII u. 603 S. gr. 8⁰. Preis: geh. Mk. 21.—, in Halbfranzband Mk. 23.—.

Nur zögernd entschließt man sich, ein Werk von dem Umfange und der Eigenart des vorliegenden, das eine Fülle schöner allgemeiner Gedanken enthält und zahlreiche neue Forschungsrichtungen eröffnet, trotz längeren Studiums zuzuklappen und nun auf wenigen Seiten über seinen Inhalt zu berichten. Denn zur richtigen Beurteilung dieses dem Andenken S. Lies gewidmeten Werkes wäre erforderlich, in einer Anzahl mathematischer Disziplinen wie Invarianten-, Gruppen- und Funktionentheorie ebenso heimisch wie der Verfasser zu sein, was Referent von sich leider nicht behaupten kann.

Von den drei Abschnitten des Werkes ist der erste[1]), zu dessen Verständnis nur wenige Vorkenntnisse, aber doch Vertiefung in den Gegenstand erforderlich sind, der Zusammensetzung der auf einen starren Körper wirkenden Kräfte und Kräftesysteme mittels verschiedenartiger Darstellung durch geometrische Gebilde und der Darlegung von Zusammenhängen dieser Gebilde mit den endlichen Bewegungen des Raumes gewidmet. Gewöhnlich wird eine auf einen starren Körper wirkende Kraft durch einen *Stab* dargestellt, d. h. durch eine an eine gerade Linie gebundene gerichtete Strecke (Vektor). Wird die bekannte Zusammensetzung zweier auf denselben Punkt wirkenden Kräfte als geometrische Addition der entsprechenden Stäbe bezeichnet, so zeigt der Verfasser auf sehr hübsche Weise, daß das ein Kräftesystem darstellende Stabsystem, wie es H. Grassmann zuerst gelehrt, formal als Summe der einzelnen Stäbe betrachtet werden darf, ferner daß jede solche Stabsumme (oder *Dyname*) $\mathfrak{S}$ auf eine einzige Weise in der *Normalform* $\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$ dargestellt werden kann, wo $\mathfrak{S}'$ einen Stab und $\mathfrak{S}''$ ein in einer dazu senkrechten Ebene liegendes Stäbepaar bezeichnet. Das aus der Geraden von $\mathfrak{S}'$ und der uneigentlichen Geraden der Ebene von $\mathfrak{S}''$ bestehende „*Linienkreuz*" heißt der Träger der Dyname, jede die beiden Achsen (Haupt- und Nebenachse) des Linienkreuzes schneidende Gerade eine *Querlinie* des Linienkreuzes. Eine Kraft läßt sich aber auch, worauf der Verfasser zuerst in den Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1899 aufmerksam gemacht hat, noch durch andere Figuren vorteilhaft darstellen. Zwei Ebenen φ, φ', die nicht aufeinander senkrecht stehen, aber parallel sein dürfen, in einer bestimmten Reihenfolge genommen, sollen *Keil* $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'}$, das durch die Schnittlinie der Ebenen bestimmte Linienkreuz sein Träger und $\mathrm{tg}(\varphi\varphi')$ seine *Öffnung* heißen. Zwei Keile werden dann und nur dann gleich gesetzt, wenn sie denselben Träger besitzen und der eine aus dem andern durch eine Drehung um die Hauptachse des Trägers hervorgeht. Jedem Stabe, mithin auch jeder Kraft, kann man ein-eindeutig jenen Keil zuordnen, der denselben Träger besitzt und dessen Öffnung der Länge des Stabes gleich ist. Unter der Summe von Keilen durch einen Punkt versteht man nun jenen Keil, der durch die Summe der zugeordneten Stäbe bestimmt wird. Die Summation zweier solcher Keile kann auch ohne Zu-

1) Die beiden ersten Abschnitte sind schon im Jahre 1901 als erstes Heft des ganzen Werkes erschienen.

hilfenahme der Stäbe durch eine eigene Figur, das *Keiltrapez*, geschehen, die eingehend untersucht wird. Jede Keilsumme läßt sich auf die Normalform $\mathfrak{K}_{\varphi}^{\varphi'} + \mathfrak{K}_{\psi}^{\psi'}$ bringen, wo φ und φ' einen von Null und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel ϑ einschließen, ψ und ψ' hingegen parallele und zu $[\varphi\varphi']$ senkrechte Ebenen bezeichnen. Der Abstand η dieser Ebenen heißt die *Sperrung* des ein Kräftepaar darstellenden Keiles $\mathfrak{K}_{\psi}^{\psi'}$.

Denkt man sich nun den Raum aufeinanderfolgend an den Ebenen φ, φ', ψ, ψ' gespiegelt, so ist die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an φ und φ' identisch mit einer Drehung um $[\varphi\varphi']$ um den Winkel 2ϑ und die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an ψ und ψ' identisch mit einer Schiebung um 2η längs $[\varphi\varphi']$. Die Zusammensetzung der vier Spiegelungen ist also identisch mit einer Schraubung um den Träger der Keilsumme. Jeder Stab- oder Keilsumme ist somit eine *endliche* Bewegung ein-eindeutig zugeordnet[1]); beide haben denselben Träger, 2ϑ ist der Drehungswinkel, 2η die Schiebungsgröße der Bewegung. Der geometrischen Addition von Keil- oder Stabsummen entspricht dann die *lineare Superposition* von Bewegungen, die nicht mit der gewöhnlichen Zusammensetzung endlicher Bewegungen vertauscht werden darf und durch folgenden Satz verständlicher wird. Eine Bewegung führt jeden Punkt x in einen Punkt x' über und bestimmt hierdurch eindeutig die Mitte $\bar{x}$ der Bewegungssehne $\overline{xx'}$. Umgekehrt ist jeder Punkt des Raumes für eine vorgegebene Bewegung Mitte einer einzigen Bewegungssehne. Bezüglich der den Stabsummen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3, \ldots$ zugeordneten Bewegungen wird daher ein beliebiger Punkt Mitte von Sehnen $\overline{x_1x_1'}$, $\overline{x_2x_2'}$, $\overline{x_3x_3'}, \ldots$ und bezüglich der der Summe $\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3 + \ldots$ zugeordneten Bewegung Mitte einer Sehne $\overline{xx'}$ sein. *Der Stab xx' geht dann aus den Stäben x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3', $\cdots$ durch geometrische Addition hervor.*

Versteht man unter $\{\varphi\varphi'\psi\psi'\}$ die durch aufeinanderfolgende Spiegelungen an den Ebenen hervorgehende Schraubung, so folgt mittels der Bemerkung, daß die Spiegelungen an zwei orthogonalen Ebenen vertauschungsfähig sind, $\{\varphi\varphi'\psi\psi'\} = \{\varphi\psi\varphi'\psi'\} = \{\varphi\psi\}\{\varphi'\psi'\}$. Die durch die beiden Klammern bezeichneten Operationen sind Umwendungen um die Geraden $[\varphi\psi] = \mathfrak{X}$ u. $[\varphi'\psi'] = \mathfrak{Y}$, die die Schraubenachse orthogonal schneiden, den Winkel ϑ einschließen und die kürzeste Entfernung η haben. Die Figur zweier in bestimmter Folge genommenen eigentlichen geraden Linien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, die sich nicht unter rechtem Winkel schneiden oder kreuzen, heißt ein *Motor* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$, $\operatorname{tg}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ seine *Öffnung*, die kürzeste Entfernung der Geraden $\operatorname{dist}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ seine *Länge* und das Linienkreuz, von dem $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ Querlinien sind, sein *Träger*. Für $\operatorname{tg}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = 0$ heißt der Motor ein *Translator* und für $\operatorname{dist}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = 0$ ein *Rotor*, weil die zugeordneten Bewegungen dann Schiebungen bezw. Drehungen sind. Gleich heißen zwei Motoren dann und nur dann, wenn die zugeordneten Bewegungen äquivalent sind, d. h. wenn die Motoren denselben Träger, gleiche Öffnung und gleiche Länge besitzen. Jeder Motor

---

1) Auf die Darstellung einer Schraubung durch eine Stabsumme weist schon H. Grassmann in seiner Ausdehnungslehre vom Jahre 1862, Anm. zu § 347 hin, nur soll nach ihm, wenn wie oben $\mathfrak{S}' + \mathfrak{S}''$ die Normalform einer Stabsumme ist, $\mathfrak{S}'$ die Schiebung und $\mathfrak{S}''$ die Drehung „repräsentieren", was wohl zeigt, daß er sich nicht eingehender mit dieser Darstellung beschäftigt hat.

stellt auch eine Dyname, ein Translator insbesondere eine Einzelkraft dar. Sind dementsprechend die Motoren $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ den Stabsummen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ zugeordnet, und ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, so heißt $\mathfrak{M}$ die geometrische Summe von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Die interessante konstruktive Durchführung dieser Summation, die sich immer auf den Fall zweier Motoren mit derselben Anfangslinie zurückführen läßt, wird eingehend behandelt.

Schließlich stellt der Verfasser die Kraft noch durch einen *Quirl* dar. Darunter versteht er die Zusammenstellung eines Punktes ξ und einer Ebene ψ, die nicht vereinigt liegen, in bestimmter Folge. Die aus ξ auf ψ gefällte Lotlinie ist die Hauptachse des Quirlträgers und die Länge dieses Lotes die Länge des Quirls. Wird jedem Quirl ein Stab desselben Trägers zugeordnet, dessen Länge der Quirllänge reziprok ist, so läßt sich die Quirlsumme analog wie früher definieren. Dabei wird man auch auf *uneigentliche Quirle* geführt, bestimmt durch eine Ebene ω und einen unendlich fernen Punkt ξ, der aber nicht in der zu ω senkrechten Richtung liegt. Die zur Addition von Quirlen benutzte Figur ist das *Quirltrapez*. Der Addition von Quirlsummen entspricht die *korrelative Superposition* von Bewegungen. Mit ihr hängt der vom Motor nur in den Grenzfällen verschiedene Begriff des *Impulsors* zusammen.

Außer der obigen geometrischen Addition von Motoren wird noch eine *stereometrische Addition* betrachtet. Bezeichnet man nämlich als *Sperrung eines Motors* $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{Y}}$ die Größe

$$\frac{\operatorname{dist}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{\cos^2 \operatorname{ang}(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}$$

und ordnet jeder auf die Normalform gebrachten Keilsumme $\mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$ einen Motor von demselben Träger zu, dessen Öffnung gleich der Öffnung des Keiles $\mathfrak{K}'$ und dessen Sperrung gleich der Sperrung des Keiles $\mathfrak{K}''$ ist — den der Keilsumme *affiliierten* Motor —, so entspricht der geometrischen Addition von Keilsummen die stereometrische Addition der Motoren und dieser die *stereometrische Superposition* von Bewegungen. Bezeichnen $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Y}}$ zwei Motoren mit derselben Anfangslinie $\mathfrak{O}$, so erhält man die Endlinie $\mathfrak{Z}$ ihrer stereometrischen Summe $\mathfrak{N}_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{Z}}$, unter $\widehat{\mathfrak{O}\mathfrak{X}}$ die $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{X}$ senkrecht schneidende Gerade verstehend, auf folgende Art: Man konstruiert $\mathfrak{X}_1 = \widehat{\mathfrak{O}\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{Y}_1 = \widehat{\mathfrak{O}\mathfrak{Y}}$; $\mathfrak{X}_2 = \widehat{\mathfrak{O}\mathfrak{X}_1}$, $\mathfrak{Y}_2 = \widehat{\mathfrak{O}\mathfrak{Y}_1}$; $\mathfrak{X}_3 = \widehat{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}}$, $\mathfrak{Y}_3 = \widehat{\mathfrak{Y}_2\mathfrak{X}}$, dann ist $\mathfrak{Z} = \widehat{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3}$.

Wird durch eine Bewegung die Gerade $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}'$ übergeführt, so existiert eine Umwendung, die auf gleiche Weise $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}'$ überführt, d. h. dieselben Punkte der Geraden zur Deckung bringt; deren Achse $\mathfrak{X}^*$ möge die eigentliche Winkelhalbierende von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}'$ heißen. Für eine zweite Bewegung ist $\mathfrak{X}^*$ eigentliche Winkelhalbierende eines einzigen Paares zugeordneter Geraden $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$. Die durch stereometrische Superposition aus den beiden Bewegungen hervorgehende ordnet zwei solche Geraden $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}'$ mit der Winkelhalbierenden $\mathfrak{X}^*$ einander zu, daß der Motor $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}^*}^{\mathfrak{Z}}$ die stereometrische Summe der Motoren $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}^*}^{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{N}_{\mathfrak{X}^*}^{\mathfrak{Y}}$ ist. Die drei zugeordneten Geraden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}'$ definieren zwei Transformationen von der Eigenschaft, daß, wenn von diesen

Geraden eine das Normalennetz einer geraden Linie (oder ein Parallelbündel) durchläuft, dasselbe die beiden anderen tun.

Für infinitesimale Bewegungen decken sich die geometrische und stereometrische Superposition mit der gewöhnlichen Zusammensetzung.

Der zweite Abschnitt, der sich damit beschäftigt, zu den im ersten gefundenen Sätzen das algebraische Äquivalent aufzusuchen, besteht selbst aus zwei verschiedenen Teilen, von denen ich den ersten bis § 23 rechne. In diesem Teile wird zur algebraischen Begründung der Geometrie der Dynamen die gewöhnliche analytische Geometrie selbst in einer Richtung weiter gebildet, die die Beachtung der Geometer verdient. „Nicht Methoden braucht der Geometer, die alles Mögliche umspannen", sagt der Verfasser (S. 124), „sondern etwas ganz anderes: Algebraische Prozesse, die möglichst eng *seinen* Problemen angepaßt sind; Prozesse, die in einem viel weiteren Umfange, als sogenannte allgemeine Methoden *ausführbar* sind im eigentlichen Sinne des Wortes, indem sie nämlich geschlossene Endformeln liefern; Methoden, die überdies auch möglichst *schnell* zu diesem Ziele führen, wo immer es sich erreichen läßt. Ein wesentliches Erfordernis dazu aber ist, bei umfangreichen Untersuchungen jedenfalls, eine dem besonderen Gegenstande angemessene Formelsprache, ein Kalkül, der es dem Geometer ermöglicht, seine Konstruktionen durch Zeichen auf dem Papier übersichtlich darzustellen." Dieser Kalkül ist mit dem Grassmannschen nahe verwandt, lehnt sich jedoch auch an die in der Invariantentheorie gebräuchliche symbolische Bezeichnungsweise an. Näher darauf einzugehen verbietet der Raum. Allgemeines, von dem vorliegenden Zwecke unabhängiges Interesse hat jedoch der § 17, wo der Zusammenhang der in den ersten Elementen der analytischen Geometrie auftretenden Irrationalitäten mit der Orientierung der Gebilde Erörterung findet.

Ein ganz neuer Gedanke, der alle folgenden Untersuchungen beherrscht, zum größten Teile wohl auch veranlaßt hat, tritt mit § 23 ein. Bezeichnen ξ und η reelle oder gemeine komplexe Zahlen und bildet man daraus unter Benutzung der Einheiten 1 und ε die höheren komplexen Zahlen $\xi + \eta\varepsilon$, für welche die gewöhnlichen Gesetze der Addition und Multiplikation, ferner das spezielle Gesetz $\varepsilon^2 = 0$ gelten sollen, so heißen diese Zahlen *duale Zahlen*, ξ ihr *skalarer*, η ihr *vektorieller* Bestandteil; sie sollen reelle duale Zahlen genannt werden, wenn ξ und η reell sind. Das Produkt zweier solcher Zahlen kann verschwinden, ohne daß ein Faktor verschwindet. Durch Potenzreihen von $\varphi = \xi + \eta\varepsilon$ werden *synektische Funktionen* der dualen Veränderlichen definiert; insbesondere lassen sich auf diese Art $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ definieren, zwischen denen dieselben Beziehungen wie für gewöhnliche komplexe Argumente bestehen. Bezeichnen weiter $\mathfrak{X}_{01}, \mathfrak{X}_{23}$; $\mathfrak{X}_{02}, \mathfrak{X}_{31}$; $\mathfrak{X}_{03}, \mathfrak{X}_{12}$ zusammengehörige Paare von Plückerschen Koordinaten eines reellen Gewindes (linearen Strahlenkomplexes), so kann man sie in die drei reellen dualen Zahlen

$$X_1 = \mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23}\varepsilon, \quad X_2 = \mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31}\varepsilon, \quad X_3 = \mathfrak{X}_{03} + \mathfrak{X}_{12}\varepsilon$$

zusammenfassen. Multipliziert man diese Größen mit einer beliebigen dualen Zahl von nichtverschwindendem skalaren Bestandteil, so zeigt sich, daß die Bestandteile $\mathfrak{X}'_{ik}$ der neuen Größen die Koordinaten eines koaxialen Gewindes oder Liniengebüsches (= speziellen l. Komplexes) darstellen. Sieht man also

die drei reellen dualen Größen X_1, X_2, X_3 als Verhältnisgrößen in dem Sinne an, daß eine gleichzeitige Multiplikation dieser Größen mit einer dualen Zahl $\varrho = \sigma + \tau\varepsilon$ $(\sigma \neq 0)$ gestattet wird, so können sie als ein System von *Strahlenkoordinaten* aufgefaßt werden, indem sie das ganze koaxiale Büschel, mithin auch dessen Achse bestimmen. Sie sind Koordinaten eines eigentlichen oder uneigentlichen Strahles, je nachdem ihre skalaren Bestandteile wenigstens teilweise von Null verschieden sind oder sämtlich verschwinden. Der Verfasser nennt das durch $X_1 : X_2 : X_3$ bestimmte Gebilde *Strahl* zum Unterschiede von der geraden Linie, weil im imaginären Gebiete diese Koordinaten zu anderen Erweiterungen des Begriffes führen als die Plückerschen Linienkoordinaten. Im reellen Gebiete sind beide Begriffe identisch.

Sowie eine Gerade im Bündel durch drei homogene gewöhnliche Koordinaten bestimmt ist, ist ein Strahl im Raume durch drei homogene duale Koordinaten bestimmt, und da für die dualen Zahlen im allgemeinen dieselben Rechnungsgesetze gelten wie für reelle Zahlen, so wird man geometrische Sätze, die für die Geraden im Bündel gelten, auf die Strahlen im Raume übertragen können. Zufolge dieses merkwürdigen *Übertragungsprinzips* entsprechen einander

im Bündel	im Raume
die Geraden eines Büschels;	die Querlinien eines Linienkreuzes (Normalennetz einer Geraden);
der gemeinsame Strahl zweier Büschel;	der gemeinsame Strahl zweier Normalennetze;
zwei rechtwinklige Strahlen;	zwei Strahlen, die sich rechtwinklig schneiden;
zwei Strahlenbüschel in senkrechten Ebenen.	zwei Normalennetze, deren Achsen sich rechtwinklig schneiden.[1])

Setzt man

$$\cos(XY) = \frac{X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2}} = \frac{(XY)}{\sqrt{(XX)}\sqrt{(YY)}},$$

so ist damit der *duale Winkel* zweier Strahlen definiert und es läßt sich eine *Trigonometrie für den Strahlenraum* aufstellen.

Von besonderer Wichtigkeit ist noch der Satz, daß jede lineare Transformation

$$X_i' = \mathfrak{a}_{i1} X_1 + \mathfrak{a}_{i2} X_2 + \mathfrak{a}_{i3} X_3, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

zwischen deren dualen Koeffizienten dieselben Bedingungsgleichungen wie für eine orthogonale Transformation im Bündel bestehen, die *allgemeinste Bewegung* im Raume (in Strahlenkoordinaten) darstellt.

Dritter Abschnitt. Als Ziel dieses Abschnittes wird vom Verfasser die Untersuchung der linearen Mannigfaltigkeiten von Dynamen oder der linearen Scharen von infinitesimalen Bewegungen hingestellt, wobei das Augenmerk besonders auf die von den Hauptachsen der Dynamen gebildeten geometrischen Örter gerichtet werden soll. In dieser Hinsicht wurden durch

1) Vgl. hierzu E. Müller, Ein Übertragungsprinzip des Herrn E. Study. Diese Zeitschrift (3), 5 (1903), S. 104—118.

die vorliegenden Untersuchungen viele Lücken ausgefüllt, indem alle Degenerationsfälle eine genaue Untersuchung erfuhren. Trotz des großen Interesses, das diese Untersuchungen an und für sich besitzen, dürfte für die Geometrie noch wichtiger die Entwicklung der Grundzüge neuer Arten von Liniengeometrien sein, die im Sinne von F. Kleins Erlanger Programm durch Transformationsgruppen definiert werden.

Denkt man sich die Mannigfaltigkeit aller Strahlen doppelt überdeckt[1]) (jeden Strahl zweimal) und bezeichnet die homogenen dualen Koordinaten eines Strahles, je nachdem er zur ersten oder zweiten *Schicht* gerechnet wird, mit X_1, X_2, X_3 oder U_1, U_2, U_3, dann soll die lineare Transformation mit beliebigen dualen Koeffizienten $\mathfrak{a}_{ik}$

$$X_i' = \mathfrak{a}_{i1} X_1 + \mathfrak{a}_{i2} X_2 + \mathfrak{a}_{i3} X_3, \qquad (i=1,2,3)$$

wo der skalare Teil von $\Delta = |\,\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}\,|$ ungleich Null ist, eine *duale Kollineation* und, wenn $\mathfrak{b}_{ik} = \frac{\partial \Delta}{\partial \mathfrak{a}_{ik}}$ ist,

$$U_i' = \mathfrak{b}_{i1} U_1 + \mathfrak{b}_{i2} U_2 + \mathfrak{b}_{i3} U_3 \qquad (i=1,2,3)$$

die dazu *kontragrediente* Transformation heißen. Diese Transformationen bilden eine Gruppe G_{16}.

Die wichtigste Eigenschaft dieser Transformationen besteht darin, daß sie Normalennetze eigentlicher Strahlen in ebensolche überführen, entsprechend der Eigenschaft der gewöhnlichen Kollineationen im Bündel, Strahlenbüschel wieder in solche überzuführen. Durch Zusammensetzung dieser Transformationen mit derjenigen, die jeden Strahl erster Schicht mit dem darüber liegenden zweiter Schicht vertauscht, erhält man die *dualen Korrelationen*. Die Gruppe der Bewegungen ist in der Gruppe G_{16} als Untergruppe enthalten und dadurch charakterisiert, daß sie das Übereinanderliegen von Strahlen verschiedener Schichten nicht ändert. Setzt man die dualen Kollineationen noch mit den perspektiven Ähnlichkeitstransformationen aus einem Zentrum zusammen, so erhält man eine Gruppe G_{17}, die Gruppe der *radialen Projektivitäten*. Diese Gruppe besitzt ein besonderes Interesse, weil sie alle Transformationen von Strahlen umfaßt, die aus dem Normalennetz eines eigentlichen Strahles wieder ein solches hervorgehen lassen. Jede der Gruppen G_{16} und G_{17} definiert eine Strahlengeometrie. In der Geometrie der *dualen Projektivitäten* ist das duale Doppelverhältnis von vier Strahlen P, Q, R, S eines eigentlichen Normalennetzes

$$D = \frac{\sin(PR)}{\sin(QR)} : \frac{\sin(PS)}{\sin(QS)}$$

eine Invariante, hingegen nicht in der Geometrie der radialen Projektivitäten. Erstere entspricht völlig der projektiven Geometrie im Strahlenbündel. Wenn die Strahlen zweier Normalennetze einander ein-eindeutig so zugeordnet sind, daß die dualen Doppelverhältnisse entsprechender Strahlen (derselben oder verschiedener Schicht) einander gleich sind, so heißen sie *dual-projektiv;* zwei Normalennetze verschiedener Schicht heißen insbesondere

1) Diese Doppelüberdeckung entspricht der Dualität im Bündel und läßt die Deutung zu, daß jeder Strahl als Träger eines Normalennetzes oder als einfacher Strahl betrachtet werden kann.

dual-perspektiv, wenn jedem Strahle des einen Netzes der ihn normal schneidende des anderen zugeordnet ist. Dual-projektive Beziehungen zweier Normalennetze können durch Einschaltung von Normalennetzen, deren jedes zum vorhergehenden perspektiv liegt, konstruktiv hergestellt werden. Durch vier Paare zugeordneter Strahlen ist eine duale Kollineation (oder Korrelation) im Raume bestimmt; die Konstruktion des einem fünften Strahle zugeordneten geschieht dann durch wiederholte Anwendung derselben Konstruktion, nämlich des Ziehens der gemeinsamen Normalen zu zwei Strahlen (was nach dem Übertragungsprinzip der Aufsuchung der Schnittlinie zweier Ebenen entspricht).

Wie der Verfasser zeigt, ist es unmöglich, durch stetige Änderung der Koordinaten X_i ein Strahlenkontinuum zu erklären, dessen Eigenschaften denen des Punktkontinuums der projektiven Geometrie oder des Plückerschen Linienkontinuums vergleichbar wäre; wenn man nämlich auf einer eindimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit unserer Strahlen (z. B. schon bei einem Parallelenbüschel) von eigentlichen zu uneigentlichen Strahlen übergeht, so gelangt man stets zu einem *unbestimmten* uneigentlichen Strahl eines gewissen Büschels. Das durch die Koordinaten X_i definierte Kontinuum heißt deshalb ein *irreguläres Strahlenkontinuum*. Zur Ergänzung der im Endlichen verlaufenden eigentlichen Strahlen durch uneigentliche zu einem abgeschlossenen Kontinuum werden *Strahlenkoordinaten 2. Art* durch die Gleichungen

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_{01}, \quad \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_{02}, \quad \mathfrak{X}_3 = \mathfrak{X}_{03}$$

$$\mathfrak{X}_{11} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{02} & \mathfrak{X}_{31} \\ \mathfrak{X}_{03} & \mathfrak{X}_{12} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{X}_{22} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{03} & \mathfrak{X}_{12} \\ \mathfrak{X}_{01} & \mathfrak{X}_{23} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{X}_{33} = \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_{01} & \mathfrak{X}_{23} \\ \mathfrak{X}_{02} & \mathfrak{X}_{31} \end{vmatrix}$$

eingeführt. Die in diesen Koordinaten das Normalennetz eines Strahles darstellenden Gleichungen behalten auch dann einen Sinn, wenn der Strahl ins Unendliche rückt. Sie stellen dann alle Strahlen eines gewissen Parallelbündels dar, welche Figur *Punktstrahl* genannt wird. Man kann sich die Vorstellung bilden, daß ein Strahl, der in einem Parallelenbüschel ins Unendliche rückt, im Grenzfall zu einem Punkt zusammenschrumpft. Diese ∞^2 „Punktstrahlen" verhalten sich gegenüber den radialen Kollineationen wie die „Punkte" der unendlich fernen Ebene gegenüber gewöhnlichen Kollineationen in dieser Ebene. Dem Normalennetz eines eigentlichen Strahles gehört *ein* eigentlicher Punktstrahl an, während jedem Parallelenbündel ∞^1 Punktstrahlen eines uneigentlichen Strahles in der unendlich fernen Ebene zugerechnet werden müssen. Die Gesamtheit der ∞^4 eigentlichen und der ∞^2 Punktstrahlen bildet nun ein abgeschlossenes Kontinuum, das *erste natürliche Strahlenkontinuum*, das den weiteren Untersuchungen gewöhnlich zugrunde liegt.

Diese Untersuchung gibt ein typisches Beispiel für das an vielen Stellen ausdrücklich betonte Bestreben des Verfassers, auch in der Geometrie alle eingeführten Begriffe genau zu umgrenzen, das Augenmerk nicht bloß auf den „allgemeinen Fall", sondern auch auf die möglichen Ausartungen zu richten, damit der Geltungsbereich eines ausgesprochenen Satzes stets völlig bestimmt sei. Diese Anregung wird gewiß ihre Früchte tragen, hätte sie vielleicht aber auch dann getragen, wenn der Herr Verfasser mit den armen Geometern nicht gar so scharf ins Gericht gegangen wäre.

Über eine dritte Art von Strahlenkoordinaten, die eingeführt werden, gehe ich hinweg; ebenso über die Betrachtung der imaginären, d. h. durch komplexe duale Zahlen X_i definierten Strahlen, in deren Gebiet es eigentliche Strahlen gibt, die nicht zugleich als imaginäre gerade Linien oder bestimmte gerade Linien angesehen werden können (*akzessorische Strahlen* und *Minimalstrahlen*).

Die Klassifikation der linearen Systeme von Gewinden erfolgt hinsichtlich derjenigen Gruppe Γ_{18} (und gewisser Untergruppen) von Gewindetransformationen, die koaxiale Büschel wieder in solche transformieren. Die Örter der Gewindehauptachsen dieser Systeme, durch gewisse irreduzible Grenzmannigfaltigkeiten zu abgeschlossenen Kontinuis ergänzt, werden als *Ketten* bezeichnet, besonders untersucht und in ihren Spezialfällen aufgezählt. Die *eindimensionale* Kette deckt sich, soweit reelle Figuren in Betracht kommen, mit den Erzeugenden eines *Cayleyschen Zylindroids* oder mit den Strahlen eines Strahlbüschels, welche beiden Gebilde durch reelle duale Kollineationen ineinander überführbar sind. Die *zwei-* und *dreidimensionalen Ketten* sind im allgemeinen Falle die *aplanare Kettenkongruenz* und der *Kettenkomplex*, während die vierdimensionale Kette das ganze Strahlenkontinuum umfaßt. Von den umfangreichen Untersuchungen über diese interessanten Raumgebilde sollen nur wenige leichter verständliche Sätze erwähnt werden, die aber durchaus keine Vorstellung von der Reichhaltigkeit geben können. Legt man durch den ein Normalennetz (eine spezielle planare Kettenkongruenz) definierenden eigentlichen Strahl einen Rotationszylinder, so sind dessen Punkte ein-eindeutig auf die Strahlen des Netzes so bezogen, daß den Punkten einer Ellipse auf dem Zylinder die Strahlen einer Kette im Normalennetz perspektiv zugeordnet sind. *Jeder Kollineation, die den Zylinder in Ruhe läßt, ist dann eine radiale Projektivität im Netze zugeordnet und umgekehrt* (S. 348). Fällt man aus einem Punkte $\mathfrak{O}$ allgemeiner Lage auf die Strahlen einer ein- oder zweidimensionalen Kette Lote, so ist der Ort der Fußpunkte eine Kurve 2. Ordnung, bezw. eine *Steinersche Fläche* (p. 346). Bewegt sich ein Strahl derart, daß er einen Durchmesser eines Rotationsparaboloides senkrecht schneidet und außerdem das Paraboloid berührt, so beschreibt er ein Zylindroid (eine Kette) (p. 366).

Deutet man die aus den Strahlenkoordinaten 2. Art gebildeten Größen $\mathfrak{X}_1^2$, $\mathfrak{X}_2^2$, $\mathfrak{X}_3^2$, $\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_3\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_{11}$, $\mathfrak{X}_{22}$, $\mathfrak{X}_{33}$ als homogene Punktkoordinaten eines R_8, so wird das erste natürliche Strahlenkontinuum auf eine Punktmannigfaltigkeit M_4 (6. Ordnung) dieses Raumes abgebildet. Von den vielen aus dieser Abbildung hergeleiteten Folgerungen (§§ 27, 32, 33) sei nur die wichtigste erwähnt. Betrachtet man die aplanare Kettenkongruenz als Element des Strahlenraumes, so besteht zwischen der Euklidischen Geometrie und der dual-projektiven ein ähnliches Verhältnis wie zwischen der projektiven Geometrie in einer einfach-ausgedehnten und der projektiven Geometrie in einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit (S. 401).

Schließlich soll noch kurz des Anhanges (S. 555—594) gedacht werden, in dem der Verfasser die Grundzüge einer neuen Methode der *Kinematik* skizziert, da diese Methode sich allem Anscheine nach als besonders fruchtbar erweisen dürfte. Vier reelle duale Zahlen X_0, X_1, X_2, X_3, deren skalare Teile nicht sämtlich verschwinden, können immer als homogene Koordinaten der Lage eines starren Körpers, eines *Soma*, betrachtet werden.

Den starren Körper darf man sich durch ein rechtwinkliges Achsenkreuz, auf dessen Achsen die positiven Richtungen fixiert sind, ersetzt denken. Zwei Somen heißen *parallel,* wenn sie durch eine Schiebung, *hemisymmetral*, wenn sie durch eine Umschraubung, *symmetral,* wenn sie durch eine Umwendung auseinander hervorgehen. Zwei Somen U und X sind dann und nur dann symmetral, wenn ihre Koordinaten der dualen Gleichung

$$U_0 X_0 + U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$$

genügen, also einer Gleichung, die mit der für das Ineinanderliegen eines Punktes und einer Ebene in der projektiven Geometrie identisch ist. Wie in dieser Geometrie alle linearen Transformationen das Ineinanderliegen ungeändert lassen, so lassen hier alle *dual-projektiven* Transformationen

$$X_i' = \mathfrak{a}_{i0} X_0 + \mathfrak{a}_{i1} X_1 + \mathfrak{a}_{i2} X_2 + \mathfrak{a}_{i3} X_3, \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$
$$\text{wo } \mathfrak{a}_{ik} = a_{ik} + \alpha_{ik}\varepsilon \quad \text{und} \quad |a_{00} a_{11} a_{22} a_{33}| \neq 0 \text{ ist,}$$

zusammengesetzt mit den Ähnlichkeitstransformationen, die symmetrale Lage zweier Somen ungeändert. Diese *projektiven Somentransformationen* bilden eine Gruppe $\mathcal{G}_{31}$ mit 31 wesentlichen Parametern.

Lassen sich die skalaren und vektoriellen Bestandteile der X_i als lineare homogene Funktionen von $r + 1$ Parametern ausdrücken, so heißt die dadurch bestimmte Mannigfaltigkeit von ∞^r Somen eine *r-dimensionale Somenkette* (C_r). Lassen sich die X_i insbesondere als lineare *synektische* Funktionen von ϱ Parametern ausdrücken, so heißt die Kette *synektisch.* Hierzu gehören die *gerade* und die *ebene* Kette (C_2 bzw. C_4). Die Mannigfaltigkeit aller Somen wird doppelt überdeckt gedacht, entsprechend den kontragredienten dual-projektiven Transformationen. Die symmetrale oder hemisymmetrale Lage zweier Somen verschiedener Schicht werden durch somatische Projektivitäten nicht geändert. Die Ketten ordnen sich zu Paaren als *reziprok* an, indem jede von beiden aus Somen besteht, die zu sämtlichen der anderen symmetral oder hemisymmetral sind. Drei Somen U_1, U_2, U_3 z. B. bestimmen *eine* ebene Kette $(U_1 U_2 U_3 U) = 0$ und diese ein reziprokes Soma X. Es gibt also zu drei Lagen eines starren Körpers immer eine vierte, die aus den dreien durch *Umwendungen* hervorgehen (Konstruktion von C. Stephanos). Die Ketten werden (hinsichtlich der Gruppe $\mathcal{G}_{31}$) klassifiziert und auch konstruiert.

Unter den somatischen Projektivitäten sind insbesondere jene von Wichtigkeit, die die duale quadratische Form

$$(XX) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

nur um einen dualen Faktor ändern; sie werden *orthogonal-somatisch* genannt. Die Geometrie dieser Gruppe ($\mathcal{G}_{12}$) ist im wesentlichen identisch mit der nichteuklidischen Geometrie im Raume konstanter positiver Krümmung. Geht das Soma X in das Soma Y durch eine Schraubung mit dem Drehungswinkel 2ϑ und der Schiebungsgröße 2η über, so heißt $\vartheta + \eta\varepsilon$ die *duale Entfernung* der beiden Somen. Eine einfache Rechnung zeigt dann, daß

$$\overset{\bullet}{\text{arc}} \cos \frac{(XY)}{\sqrt{(XX)}\sqrt{(YY)}} = \vartheta + \eta\varepsilon$$

ist, daß also die duale Entfernung zweier Somen eine analoge Bedeutung wie die Entfernung zweier Punkte im Raume konstanter positiver Krümmung hat, vor allem als Invariante gegenüber den orthogonal-somatischen Transformationen. Zwei bezüglich $\mathfrak{G}_{12}$ äquivalente Somenmannigfaltigkeiten sind kongruent, und es entsprechen ihnen in mechanischem Sinne äquivalente Bewegungen. Die Spiegelung an einem Soma kehrt die Bewegung um. Daraus erkennt man, daß jedem Satze der nichteuklidischen Geometrie ein kinematischer Satz an die Seite gestellt werden kann. Damit ist die nichteuklidische Geometrie in ein völlig neues Licht gerückt und ein neues merkwürdiges Beispiel für das Vorkommen logisch-gleicher Schlußfolgen in verschiedenen mathematischen Disziplinen gefunden.

Zu den ziemlich zahlreichen neuen Begriffsbildungen, über die man sich mittels des angefügten alphabetischen Inhaltsverzeichnisses leicht zu orientieren vermag, wurde der Verfasser nach eigener Angabe geführt, indem er von der nichteuklidischen Geometrie ausging. Vielleicht hätte er einem großen Leserkreis einen Gefallen erwiesen, wenn er auch bei der Darstellung diesen weniger elementaren, aber Überblick gewährenden Weg eingeschlagen hätte. Der Hauptteil des Werkes zeigt, von welchem Nutzen Systeme komplexer Größen innerhalb begrenzter Gebiete geometrischer Untersuchungen sein können, und berechtigt den Verfasser gegenüber einer vielverbreiteten Meinung zu dem Ausspruch (S. 596): „Keine Art der Urteilsbildung erheischt wohl größere Vorsicht, als die Abschätzung des zukünftigen Ertrages irgend einer Forschungsrichtung". Trotz dieser Mahnung zur Vorsicht mag ich die Meinung nicht unterdrücken, daß das vorliegende Werk den Ausgangspunkt mancher neuen wissenschaftlichen Arbeit bilden wird und die Beachtung weiter mathematischer Kreise verdient. Diese Meinung dürfte die Länge des Referates entschuldigen.

Wien, im März 1904. E. Müller.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

121. Die hyperbolische Spirale und alle Zykloiden können als besondere Fälle der Kurve angesehen werden, welche in kartesischen rechtwinkligen Koordinaten der folgenden Parameterdarstellung fähig ist:

$$x = a + \frac{(a - R\cos\varphi)\,h\varphi}{h\varphi - c}, \quad y = b + \frac{(b - R\sin\varphi)\,h\varphi}{h\varphi - c}.$$

Diese neue Kurve soll erforscht werden.

Genova. Gino Loria.

122. Wenn die Plückerschen Koordinaten zweier sich kreuzenden Geraden gegeben sind, so soll man diejenigen der Geraden berechnen, welche dieselben rechtwinklig schneidet.

Genova. Gino Loria.

123. Die den unendlich fernen Punkt der x-Achse enthaltende Hyperbel, welche den Einheitskreis im oberen Scheitel $(0, 1)$ und in den Scheitelprojektionen der drei Punkte $(\cos\frac{2\pi}{7}, 0)$, $(\cos\frac{4\pi}{7}, 0)$, $(\cos\frac{6\pi}{7}, 0)$ schneidet, hat im entgegengesetzten Scheitel $(0, -1)$ einen Brennpunkt, die Asymptotenneigung $b : a = 3 : 2$ und den Parameter $b^2 : a = 1$.

Holzminden. G. Kober.

---

124. Wenn man von einem Kegelschnitte in einem seiner Punkte P die Richtung der Tangente PT und in dem Mittelpunkte O die Richtungen der Achsen OA und OB kennt, so kann auf der Normalen PN der Krümmungsmittelpunkt K rein linear[1]) auf folgende Weise gefunden werden:

$$(OA, PB) = A', \qquad (OB, PN) = K'',$$
$$(OB, PA) = A'', \qquad (QK'', PB) = K',$$
$$(A'A'', PT) = Q, \qquad (OK', PK'') = K.$$

Holzminden, Februar 1905. G. Kober.

---

125. Den Satz zu beweisen: Sind die Elemente a_{ik} jeder Vertikal- oder Horizontalreihe einer Determinante sechster Ordnung durch bilineare Beziehungen der Form

$$a_{i1}a_{i4} + a_{i2}a_{i5} + a_{i3}a_{i6} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

verbunden, so bestehen auch zwischen den zugehörigen Unterdeterminanten α_{ik} Relationen der Form

$$\alpha_{i1}\alpha_{i4} + \alpha_{i2}\alpha_{i5} + \alpha_{i3}\alpha_{i6} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Wie lautet die Verallgemeinerung dieses Satzes?

Berlin. E. Jahnke.

---

126. In Erweiterung eines Steinerschen Satzes, der für das Viereck gilt (Ges. W. I, 162), die folgende Formel für das Fünfeck zu beweisen:

$$3(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{51}^2) = a_{13}^2 + a_{24}^2 + a_{35}^2 + a_{41}^2 + a_{52}^2 + 4(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2),$$

wo die m_i die Verbindungsstrecken der Diagonalmitten bedeuten; und zwar bezieht sich m_1 auf die beiden Diagonalen A_2A_4, A_3A_5, usw.

Berlin. E. Jahnke.

---

127. Es wird ein einfacher Beweis des folgenden Satzes gewünscht: Wenn drei unendlich benachbarte Punkte einer Parabel, darunter der Scheitelpunkt, gleichzeitig einer gemeinen Zykloide angehören, so ist die Scheiteltangente der Zykloide auch eine Tangente der Parabel.

Breslau. M. Peche.

---

[1]) Die Konstruktion von Steiner nimmt ein drehbares Achsenkreuz, mithin stillschweigend einen Kreis zu Hilfe.

B. Lösungen.

Zu **105** (Bd. VIII, S. 82) (P. Epstein). — Die Krümmung und die Torsion einer Raumkurve sind gegeben durch

$$(1)\qquad \frac{1}{r}=\frac{d\sigma}{ds},\quad \frac{1}{\varrho}=\frac{d\tau}{ds}.$$

Bezeichnet man die Koordinaten eines Punktes der Kurve mit x, y, z und die Richtungscosinus der zugehörigen Tangente und Binormale mit α, β, γ und u, v, w, so gelten die Gleichungen

$$(2)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad u^2+v^2+w^2=1,$$

$$(3)\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=x'^2+y'^2+z'^2,\ \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2,\ \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2=u'^2+v'^2+w'^2.$$

Gegeben sind die Koordinaten u, v, w, p der Schmiegungsebene als Funktionen von t; man hat also noch ds und $d\sigma$ als Funktionen von t zu berechnen.

Um ds zu berechnen, stellen wir die Bedingung dafür auf, daß der Punkt (x, y, z) drei benachbarten Schmiegungsebenen angehört:

$$(4)\qquad \begin{cases} ux+vy+wz-p=0,\quad u'x+v'y+w'z-p'=0,\\ \qquad\qquad u''x+v''y+w''z-p''=0.\end{cases}$$

Durch Differentiation hat man noch die Gleichungen:

$$(5)\qquad ux'+vy'+wz'=0,\quad u'x'+v'y'+w'z'=0,$$

$$(6)\qquad u''x'+v''y'+w''z'=-(u'''x+v'''y+w'''z-p''').$$

Wegen (5) sind die Größen $\lambda x', \lambda y', \lambda z'$ gleich den Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} u & v & w\\ u' & v' & w'\end{vmatrix}$. Setzt man die Werte von x', y', z' in (6) ein, so erhält man für die linke Seite von (6) den Ausdruck Δ/λ; die rechte Seite von (6) ist wegen der Gleichung (4) gleich D/Δ. Hierbei bedeutet Δ die aus den u, v, w und ihren 2 ersten Ableitungen, D die aus den u, u, w, p und ihren 3 ersten Ableitungen gebildete Determinante. Es ist daher $1/\lambda = D/\Delta^2$. Bildet man die Quadrate der x', y', z' und addiert sie, so folgt, da $uu'+vv'+ww'=0$ ist:

$$(7)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2=x'^2+y'^2+z'^2=\frac{D^2}{\Delta^4}(u'^2+v'^2+w'^2).$$

Um $d\sigma$ zu berechnen, stellen wir die Bedingung dafür auf, daß die Tangente α, β, γ zwei benachbarten Schmiegungsebenen angehört:

$$(8)\qquad \alpha u+\beta v+\gamma w=0,\quad \alpha u'+\beta v'+\gamma w'=0.$$

Hieraus folgt noch:

$$(9)\quad \alpha'u+\beta'v+\gamma'w=0,\quad \alpha'u'+\beta'v'+\gamma'w'=-(\alpha u''+\beta v''+\gamma w'').$$

Aus der ersten Gleichung (9) und aus der Gleichung $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$ folgt, daß $\varkappa\alpha', \varkappa\beta', \varkappa\gamma'$ gleich den Determinanten der Matrix $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma\\ u & v & w\end{vmatrix}$ sind. Die Größen α, β, γ sind nach (8) und (2) gleich den Determinanten

der Matrix $\frac{1}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix}$. Setzt man die Werte α, β, γ und α', β', γ' in die zweite der Gleichungen (9) ein, so folgt

$$\frac{1}{\varkappa}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = -\frac{\Delta}{\sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$\varkappa^2 = \frac{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}{\Delta^2}.$$

Hieraus und aus (9) folgt:

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 = \frac{1}{k^2} = \frac{\Delta^2}{(u'^2+v'^2+w'^2)^2}.$$

Setzt man endlich die gefundenen Werte in (1) ein, so ergibt sich

$$(10)\qquad \frac{1}{r} = \frac{\Delta^3}{D(u'^2+v'^2+w'^2)^{3/2}},\quad \frac{1}{\varrho} = \pm\frac{\Delta^2}{D}.$$

Da die Krümmung eine positive Größe sein muß, so hat man die Quadratwurzel in dem Ausdruck für $1/r$ so zu bestimmen, daß diese Bedingung erfüllt ist. Wenn wir ferner annehmen, daß ds für wachsendes t positiv ist, so haben wir in dem Ausdruck

$$\frac{ds}{dt} = \frac{D}{\Delta^2}(u'^2+v'^2+w'^2)^{1/2} \qquad \text{(s. Gl. 7)}$$

der Quadratwurzel das Vorzeichen der Größe D zu geben. Setzt man noch fest, daß die Torsion dasselbe Vorzeichen wie der Torsionswinkel $d\tau = (u'^2+v'^2+w'^2)^{1/2}dt$ haben soll, so hat man in (10) zu schreiben: $1/\varrho = \Delta^2/D$. Die Torsion hat dann das Vorzeichen der Größe D. Das Vorzeichen dieser Größe hängt davon ab, ob man dem von den 4 konsekutiven Schmiegungsebenen gebildeten Tetraeder positiven oder negativen Inhalt zuschreibt.

In dem Ausdruck für die Torsion $1/\varrho$ ist das Vorzeichen noch unbestimmt. Bezeichnet man den 6 fachen Inhalt des von vier konsekutiven Schmiegungsebenen gebildeten Tetraeders mit I, so hat man

$$I = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dabei sind x_i, y_i, z_i $(i = 1, \cdots 4)$ die Koordinaten der den vier konsekutiven Ebenen gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders. Nun läßt sich zeigen, daß $D = -k \cdot I^3$ ist, wobei k eine positive Konstante bedeutet. Ferner läßt sich zeigen, daß unter Voraussetzung eines positiven (d. h. rechtshändigen) Koordinatensystems I positiv (negativ) ist, wenn die Kurve links (rechts) gewunden ist. Es ist daher $D \gtrless 0$, je nachdem die Kurve rechts oder links gewunden ist. Soll also die Torsion für die rechts (links)

gewundenen Kurven positiv (negativ) sein, so haben wir in der Formel für $1/\varrho$ das positive Vorzeichen zu wählen.

Stuttgart. E. Rath.

Zu **107** (Bd. VIII S. 173) (M. Peche). Der Satz ist eine Folge dieser Eigenschaften der logarithmischen Spirale[1]):

1. *Der Radiusvektor ist der Bogenlänge vom Auge O an gerechnet proportional.*

2. *Der Winkel zwischen Tangente und Radiusvektor ist konstant, also auch der Winkel zwischen dem Radiusvektor und einer die Kurve stets unter gleichem Winkel treffenden Linie.*

3. *Die Kurven* $\varrho = ae^{b\omega}$ *und* $\varrho_1 = ke^{b\omega_1}$ *sind identisch (kongruent):* denn setzt man $\log \left|\sqrt[b]{\frac{x}{a}}\right| = \bar{\omega}$, so ist $\varrho_1 = ae^{b(\omega_1+\bar{\omega})}$, unterscheidet sich also nur in der Phase von $\varrho = ae^{b\omega}$.

Aufgrund von (1) ist im Dreieck $OPQ: OP = \varrho$, $PQ = c\varrho$, nach (2) $\sphericalangle\, O\widehat{P}Q = \alpha$ für variables P konstant, folglich sind alle Dreiecke OPQ ähnlich und $\sphericalangle\, P\widehat{O}Q = \beta$ und $\sphericalangle\, P\widehat{Q}O = \gamma$ sind ebenfalls konstant. Nach dem Kosinussatze ist

$$OQ \equiv \varrho_1 = \sqrt{\varrho^2(1 + c^2 - 2c\cos\alpha)} = d\varrho,$$

wo d von ϱ unabhängig ist; d. h. es ist

$$\varrho_1 = ade^{b\omega} = fe^{b\omega} = ke^{b(\omega-\beta)} = ke^{b\omega_1},$$

woraus nach (1) bis (3) die Richtigkeit der Behauptungen des Lehrsatzes folgt: $\varrho_1 = ke^{b\omega_1}$ *ist eine zu* $\varrho = ae^{b\omega}$ *kongruente logarithmische Spirale, hat auch O zum Pol und schneidet die Geraden PQ unter konstantem Winkel.*

Potsdam, den 25. September 1904. Otto Meissner.

Zu **107** (Bd. VIII S. 173) (Peche). Je considère la question à un point de vue un peu plus général. Soit O un point fixe dans le plan d'une courbe (P). Je fais tourner les rayons vecteurs OP, autour des points P, d'un même angle $\widehat{P}$, et sur chacun d'eux je prends une longueur PQ proportionnelle à PO. Quel est le lieu des points Q? Il est évident que le triangle OPQ reste semblable à lui-même, d'où il suit que l'angle $\widehat{O}$, dans ce triangle, a une valeur constante, et que OQ varie proportionnellement à OP. Il suffit donc de faire tourner de $\widehat{O}$ la courbe (Q) autour de O, pour que les rayons OQ coïncident avec les rayons correspondants OP, et pour s'apercevoir que *la courbe* (Q) *est semblable à* (P). Dès lors il est évident que la tangente à (Q), même dans la position primitive de la courbe (Q), est inclinée sur le rayon vecteur OQ du même angle θ, qui mesure l'inclinaison de la tangente à (P) sur OP. Lorsque (P) est une

---

1) s. z. B. Gino Loria, Spezielle Kurven der Ebene (Teubner 1902) S. 448ff.

spirale logarithmique, ayant O pour pôle, θ est constant, de sorte que PQ a une inclinaison *constante* $\pi - \theta - \widehat{P}$ sur la tangente à (P). On sait d'ailleurs que OP est proportionnel à la longueur de l'arc OP. On retrouve ainsi la construction de la courbe (Q), indiquée dans l'énoncé, et l'on voit immédiatement que (Q) est semblable, *et*, *par suite*, *congruente à* (P), en vertu d'une propriété, bien connue, de la spirale logarithmique. En outre l'inclinaison de (Q) sur PQ a la valeur *constante* $\theta - \widehat{Q}$. E. Cesàro.

Zu **107** (Bd. VIII, S. 173) (Peche). O sei der Pol, P ein Punkt der logarithmischen Spirale; PQ soll dem Spiralenbogen OP proportional sein und mit der Spirale einen konstanten Winkel bilden. Nun ist bei der logarithmischen Spirale der Winkel zwischen Tangente und Fahrstrahl OP konstant; ferner ist die Länge OP des Fahrstrahls der Bogenlänge OP proportional. In dem Dreieck OPQ ist daher der Winkel bei P und das Verhältnis der beiden Seiten OP und PQ konstant. Während P die Spirale beschreibt, bleibt das Dreieck OPQ ähnlich, und Q beschreibt eine zur Kurve P ähnliche Kurve. Der Winkel, den die Tangente der Kurve Q mit OQ bildet, muß gleich dem entsprechenden Winkel der Kurve P sein; die Kurve Q ist somit eine der gegebenen Spirale kongruente Spirale. Natürlich ist auch der Winkel zwischen der Spirale Q und PQ konstant.

Stuttgart. E. Rath.

Eine ähnliche Lösung ist noch von Herrn W. Stegemann, Prenzlau, eingegangen. Red.

Zu **108** (Bd. VIII, S. 173) (W. Franz Meyer). *Bezeichnet* $\left(\frac{p}{q}\right)$ *das Legendresche Symbol im Falle zweier ungeraden Primzahlen* p *und* q, *und setzt man:*

$$(1) \qquad q^{\frac{p-1}{2}} - \left(\frac{q}{p}\right) = ap; \quad p^{\frac{q-1}{2}} - \left(\frac{p}{q}\right) = bq,$$

so sollen $\left(\frac{a}{q}\right)$ *und* $\left(\frac{b}{p}\right)$ *durch* $\left(\frac{p}{q}\right)$ *ausgedrückt werden.* — Zunächst ist klar, daß

$$(2) \qquad a \not\equiv 0 \pmod{q}; \quad b \not\equiv 0 \pmod{q}$$

ist. Ferner ist $\left(\frac{p}{q}\right) = \pm 1$, also $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1$, somit:

$$(3) \qquad (ap)^2 \equiv 1 = 1^2 \pmod{q}; \quad (bq)^2 \equiv 1 = 1^2 \pmod{p},$$

d. h. es ist:

$$(4) \qquad \left(\frac{ap}{q}\right) = 1; \quad \left(\frac{bq}{p}\right) = 1.$$

Da nun a und q, b und p nach (2) teilerfremd sind, ist:

$$(5) \qquad \left(\frac{ap}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right); \quad \left(\frac{bq}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{q}{p}\right).$$

Multipliziert man die Gleichungen mit $\left(\frac{p}{q}\right)$ und berücksichtigt, daß

$$(6) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\pi},$$

so folgt hieraus und aus (4):

$$(7) \qquad \left(\frac{a}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right); \quad \left(\frac{b}{p}\right) = (-1)^{\pi}\left(\frac{p}{q}\right),$$

und eine solche Darstellung war verlangt.

Potsdam, den 27. September 1904. OTTO MEISSNER.

Zu **109** (Bd. VIII, S. 173) (W. Franz Meyer). *Ist* $p = 8n + 5$ *eine Primzahl und* $D^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$ *(mod. p), so sind* $\xi_{1,2} = \pm D^{\frac{p+3}{8}}$ *die Lösungen der Kongruenz* $x^2 \equiv D$ *(mod. p); ist* $D^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1$ *(mod. p), so sind die Lösungen* $\xi_{1,2} = \pm D^{\frac{p+3}{8}} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)!$.

1. Es sei $D^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$. Angenommen, $\xi_1 = D^{\frac{p+3}{8}}$ wäre eine Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv D$, so wäre $\xi_2 = -\xi_1$ die zweite. Dann müßte also sein

$$\xi_1^2 = \xi_2^2 = D^{\frac{p+3}{4}} \equiv D;$$

diese Kongruenz erhält man aber aus $D^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$ durch Multiplikation mit D. ξ_1 und ξ_2 sind also die Lösungen der Kongruenz $x^2 \equiv D$.

2. Es sei $D^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1$. Nach Wilson ist $\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}$. Wäre also $\xi_1 = \left(\frac{p-1}{2}\right)! D^{\frac{p+3}{8}}$ eine Lösung von $x^2 \equiv D$, so müßte sein:

$$\xi_1^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 D^{\frac{p+3}{4}} \equiv D,$$

oder, da $\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 \equiv -1$:

$$\xi_1^2 \equiv -D^{\frac{p+3}{4}} \equiv D.$$

Diese Kongruenz folgt aber aus $-D^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$ durch Multiplikation mit D. ξ_1 und $\xi_2 = -\xi_1$ sind also die Lösungen der Kongruenz $x^2 \equiv D$ (mod. p).

Potsdam, den 25. September 1904. OTTO MEISSNER.

Zu **113** (Bd. VIII, 262) (Kasimierz Cwojdziński). *Zieht man in einem einfachen Vierecke die 4 Höhenpaare, so ist das Produkt von 4 passend gewählten Höhen gleich dem der 4 übrigen.* — Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken, $A_1 A_2 = a_1$, $A_2 A_3 = a_2$, $A_3 A_4 = a_3$, $A_4 A_1 = a_4$ die Seiten des Vierecks; die von A_ν auf a_μ gefällte Höhe soll mit $h_{\nu\mu}$ bezeichnet werden. Dann ist $h_{12} = a_1 \sin A_2$, $h_{23} = a_2 \sin A_3$, $h_{34} = a_3 \sin A_4$, $h_{41} = a_4 \sin A_1$, also:

$$h_{12} \cdot h_{23} \cdot h_{34} \cdot h_{41} = a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \sin A_4.$$

Ferner ist $h_{13} = a_4 \sin A_4$, $h_{24} = a_1 \sin A_1$, $h_{31} = a_2 \sin A$ und $h_{42} = a_3 \sin A_3$, somit auch

$$h_{13} \cdot h_{24} \cdot h_{31} \cdot h_{42} = a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 \sin A_4,$$

d. h. es ist

$$h_{12} \cdot h_{23} \cdot h_{34} \cdot h_{41} = h_{13} \cdot h_{24}\, h_{31} \cdot h_{42}, \text{ w. z. b. w.}$$

Potsdam, den 13. Dezember 1904. OTTO MEISSNER.

Eine ähnliche Lösung mit Angabe der auf das n-Eck verallgemeinerten Relation ist von Herrn E. Rath, Stuttgart, und Herrn stud. math. Max Mayer, München, gegeben worden. Red.

2. Anfragen und Antworten.

25. *Verallgemeinerung eines — bisher unbewiesenen — Primzahlsatzes.* — Es handelt sich im folgenden nur um natürliche Zahlen. Man nehme *willkürlich* zwei Zahlen m und n und betrachte das Intervall:

$$m,\ m+1,\ \ldots,\ m+n.$$

Gibt es dann ein zweites Intervall

$$m_1,\ m_1+1,\ \ldots,\ m_1+n,$$

das dem ersten in folgender Weise entspricht: für jede Primzahl $m+\nu\,(0 \leqq \nu \leqq n)$ des *ersten* Intervalles ist auch die entsprechende Zahl $m_1+\nu$ des *zweiten* Intervalles prim? Und wenn es ein solches Intervall gibt, gibt es ihrer mehrere? Kann es unendlich viele geben?

Im allgemeinen gibt es natürlich *kein* zweites Intervall, das dem ersten auf die geschilderte Art entspräche; nämlich sicher nicht, wenn man n „*zu groß*“ annimmt. Es handelt sich aber gerade darum, was man hier unter „*zu groß*“ zu verstehen hat.

Der Fall: $m > 1$, sonst beliebig, $n = 1$, wird durch den Euklidischen Beweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen erledigt.

Was den Fall $m > 1$, $n = 2$ angeht, so *vermutet* man bekanntlich nur, daß es unendlich viele *Primzahlpaare* gibt. Eine gleiche Vermutung könnte man wohl noch für *Primzahlquadrupel*, dem Falle $m = 10$, $n = 10$ entsprechend ($m_1 = 100$, $m_2 = 190$ etc.) aussprechen.

Dem Intervall $3 \cdots 13$ entspricht, wie man sich leicht überzeugen kann, *kein zweites*.

Potsdam, den 20. November 1904. OTTO MEISSNER.

26. Unter „natürlicher Grenze“ versteht man eine Linie in der Ebene des Argumentes einer analytischen Funktion, über die hinaus die Funktion nicht analytisch fortsetzbar ist; dabei wird, meines Wissens meist stillschweigend, vorausgesetzt, daß die „wesentlich singuläre“ Linie, welche eben die natürliche Grenze bildet, im Endlichen oder im unendlich fernen Punkte geschlossen ist. Gibt es auch ungeschlossene singuläre Linien? Wird man, falls sie existieren, auch sie als natürliche Grenzen bezeichnen? (Die Worte „geschlossen“ und „ungeschlossen“ beziehen sich im Falle mehrdeutiger

Funktionen natürlich auf die zur Funktion gehörige Riemannsche Fläche [oder, wenn man will, Neumannsche Kugel], nicht auf eine einfache Ebene.)

Potsdam, den 2. Januar 1905. OTTO MEISSNER.

Zu **18** (Bd. VIII, 268) (O. Gutsche). — Der Satz gilt für jedes beliebige Viereck; er kann also lauten: „Wenn man über den Seiten eines Vierecks $ABCD$ nach außen Quadrate konstruiert, so bilden ihre Mitten A', B', C', D' die Ecken eines Vierecks, dessen Diagonalen gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. Die *Ecken* beider Vierecke haben denselben Schwerpunkt." Ein Beweis dieses Satzes, jedoch ohne die den Schwerpunkt betreffende Behauptung, ist in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht als Aufgabe No. 1378 gefordert worden. Unter den später in der Zeitschrift Bd. 27, S. 30 veröffentlichten Beweisen kommt vor allem der sechste in Betracht; denn in ihm wird unter anderm auch bewiesen, daß die Diagonalenmitten E, F des Vierecks $ABCD$ und E', F' des Vierecks $A'B'C'D'$ ein Quadrat bilden, in dem EF und $E'F'$ die Diagonalen sind, und damit ist, wenn es auch nicht ausdrücklich ausgesprochen ist, tatsächlich der Beweis geliefert, daß die Ecken der Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einen gemeinsamen Schwerpunkt haben, nämlich den Mittelpunkt des Quadrates $EE'FF'$.

Diese Verallgemeinerung des Collignonschen Satzes schließt die Erweiterung des Herrn Gutsche aus, d. h. wenn das Viereck $ABCD$ beliebig ist, so fallen in den beiden Vierecken $ABCD$ und $A'B'C'D'$ wohl die Schwerpunkte der *Ecken*, nicht aber die der *Flächen* zusammen. Das letztere ist nur der Fall, wenn schon $ABCD$ ein Viereck ist, in dem die Diagonalen gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. Einen einfachen geometrischen Beweis hierfür erhält man, wenn man mit dem auf ein beliebiges Viereck bezogenen Collignonschen Satze den folgenden bekannten, u. a. von F. Caspary (Nouv. Ann. (3) **17**, 395, 1898) gefundenen Satz verbindet: „In jedem Viereck liegen der Diagonalenschnittpunkt E, der Schwerpunkt S der Ecken und der Schwerpunkt S' der Fläche in einer Geraden, und zwar liegt S zwischen E und S' so, daß $ES = 3SS'$ ist."

Prenzlau. W. STEGEMANN.

Zu **19** (Bd. VIII, 268) (O. Gutsche). Die Aufgabe „Ein Dreieck aus dem Inkreisradius ϱ, der Differenz d zweier Seiten und der Mitteltransversale t_c nach der dritten Seite herzustellen" kann durch folgende einfache und elegante Konstruktion gelöst werden:

Man zeichne den Kreis (O, ϱ). Auf der in dem bliebigen Peripheriepunkte D an diesen Kreis gelegten Tangente trage man $DE = d$ ab. Um die Mitte F von DE schlage man den Kreis mit dem Radius t_c. Sodann verbinde man F mit O und ziehe durch E die Parallele zu FO, die den Kreis (F, t_c) in den Punkten C und C' schneidet. Ist C der Schnittpunkt, der auf derselben Seite der Geraden DE liegt wie O, und treffen die von C aus an den Kreis (O, ϱ) gezogenen Tangenten die Gerade DE in A und B, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Nimmt man statt des Punktes C den Punkt C', und treffen die von hier aus an den Kreis (O, ϱ) gezogenen Tangenten die Gerade DE in A' und B', so ergibt sich ein zweites Dreieck $A'B'C'$, das den gegebenen Bedingungen ebenfalls genügt, nur daß die Strecke ϱ nicht Radius des Inkreises, sondern Radius des der Seite C anbeschriebenen Kreises wird. Durch die hier angegebene Konstruktion wird also nicht bloß die obige Aufgabe, sondern gleichzeitig auch die Aufgabe „Ein Dreieck aus ϱ_c, $d = a - b$, t_c zu zeichnen" gelöst.

Prenzlau. W. STEGEMANN.

Auf dieselbe Konstruktion kommt diejenige hinaus, welche Herr Henke, Dresden, eingesandt hat unter Verweisung auf seine Bearbeitung von Schlömilchs Handbuch der Math. 2. Aufl. Leipzig 1904, Barth, I, 371 ff., Fig. 165.

Die Lösung beruht auf dem Satze: Die Verbindungslinie einer Dreiecksecke mit dem Punkte, wo die Gegenseite von dem zugehörigen Ankreise berührt wird, ist der Geraden parallel, welche die Mitte dieser Dreiecksseite mit dem Inkreismittelpunkt verbindet (vgl. Spieker, Geometrie 1890, S. 180). Red.

Zu **23** (Bd. VIII, S. 331) (A. Cappilleri). — Der Satz findet sich als Übungsaufgabe — wenn auch nicht ganz wörtlich — in älteren Lehrbüchern der Elementargeometrie, von denen mir augenblicklich nur J. H. van Swinden, Elemente der Geometrie, deutsch von C. F. A. Jacobi (Jena, 1834) zur Hand ist. Bezeichnet man das Dreieck mit ABC, die Punkte, welche auf BC, AC, AB Stücke von $\frac{m}{n}$ der Seitenlängen abschneiden, der Reihe nach mit D, E, F, die Punkte, in denen AD, BE, CF einander schneiden, mit G, H, J, so ist $GJ = \frac{n(n-2m)}{m^2 - mn + n^2} \cdot AD$, analog für GH und HJ, ferner $\triangle' = \frac{(n-2m)^2}{m^2 - mn + n^2} \cdot \triangle$, wo $\triangle'$ den Inhalt von GHJ, $\triangle$ den von ABC bezeichnet. Die vorstehenden Ausdrücke findet man a. a. O. (Anhang zum 4. Buch, S. 151, Aufg. 396,2 und 397,2) fertig ausgerechnet. Beachtet man nur die Beziehung $AD^2 = \frac{a^2m^2 - mn(a^2 - b^2 + c^2) + c^2n^2}{n^2}$ und die beiden analogen, so folgt sogleich der gewünschte Satz. Die a. a. O. (Aufg. 398,4 und 399) aufgestellten Ausdrücke lehren auch noch, daß der Satz für die äußere Teilung gültig bleibt.

Westend, 7. März 1905. P. ZÜHLKE.

Der Quotient aus der Summe der Seitenquadrate und dem Flächeninhalte eines Dreiecks ist gleich der vierfachen Kotangente seines Brocardschen Winkels. Die beiden fraglichen Dreiecke sind also gleich brocardisch. In dieser Form ausgesprochen findet sich der Satz bei A. Emmerich, Die Brocardschen Gebilde, Berlin 1891, § 59, S. 125.

Hamburg, 8. März 1905. GUSTAV BERKHAN.

Der Satz findet sich mit zwei Beweisen in W. Fuhrmann, Synthetische Beweise, Berlin 1890, Simion, S. 148.

Dresden. R. HENKE.

---

3. Kleinere Notizen.

Die Konstruktion des Kreisviereckes aus der Gleichung seiner Ecken

Die durch die Gleichung 4. Grades

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

gegebenen vier festen Lagen des veränderlichen Punktes $x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ · sind die Schnittpunkte des Kreises $x_1 x_3 = x_2^2$ und der Hyperbel $a_0 x$ $a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_2 x_3 + a_4 x_3^2 = 0$. Beide Kurven können aus il Gleichungen rein linear, d. h. als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüs konstruiert werden.

Die beiden Fundamentaleckenstrahlen

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad x_2 - \lambda x_3 = 0,$$

deren Schnittpunkt den Kreis beschreibt, enthalten jedesmal die beiden Pu

$$x_1 - \lambda x_2 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0,$$
$$x_2 - \lambda x_3 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0$$

der dem Parameter $\lambda = 1$ entsprechenden zwei Strahlen, welche in ei Strahle

$$x_1 - \lambda x_3 = 0$$

der dritten Fundamentalecke liegen. Jeder Punkt der Hyperbel aber der Schnittpunkt der beiden Strahlen

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + \mu a_2 x_3 = 0,$$
$$(1 - \mu) a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0,$$

die jedesmal die beiden Punkte

$$x_3 = 0, \quad a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0$$

mit denjenigen Punkten

$$x_1 = 0, \quad a_1 x_2 + \mu a_2 x_3 = 0,$$
$$x_3 = 0, \quad (1 - \mu) a_2 x_1 + a_3 x_2 = 0$$

der dem Parameter $\mu = \infty$ entsprechenden zwei Fundamentalstrahlen x_1 = und $x_3 = 0$ verbinden, welche in einem Strahle

$$(1 - \mu) a_1 a_2 x_1 + a_1 a_3 x_2 + \mu a_2 a_3 x_3 = 0$$

des von den drei Fundamentaleckenstrahlen

$$\mu = 0 \quad : a_2 x_1 + a_3 x_2 = 0,$$
$$\mu = 1 \quad : a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0,$$
$$\mu = \infty : a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0$$

getragenen Punktes liegen.

Um die Beziehung zu vereinfachen, kann man den Einheitskreis $x^2 = (1+y)(1-y)$ zugrunde legen. Die vier Punkte, in denen er von der Hyperbel

$$x + \frac{a_0(1+y)^2 + a_2(1+y)(1-y) + a_4(1-y)^2}{a_1(1+y) + a_3(1-y)} = 0$$

geschnitten wird, genügen dann den Scheitelstrahlen

$$a_0\left(\frac{x}{1-y}\right)^4 + a_1\left(\frac{x}{1-y}\right)^3 + a_2\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{1-y}\right) + a_4 = 0,$$

welche die Achsenpunkte

$$y = 0, \quad a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

projizieren.

Holzminden, November 1904. GEORG KOBER.

Die Asymptoten der Hyperbel, welche den Einheitskreis auf vier durch ihre Gleichung gegebenen Scheitelstrahlen schneidet.

Die vier Punkte des Kreises $x^2 + y^2 = 1$, welche in den vier Scheitelstrahlen $a_0\left(\frac{x}{1-y}\right)^4 + a_1\left(\frac{x}{1-y}\right)^3 + a_2\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 + a_3\left(\frac{x}{1-y}\right) + a_4 = 0$ liegen, sind, wie die Elimination von x^2 beweist, die Schnittpunkte einer Hyperbel:

$$x + \frac{a_0(1+y)^2 + a_2(1+y)(1-y) + a_4(1-y)^2}{a_1(1+y) + a_3(1-y)} = 0,$$

die auf den neuen Fundamentalstrahlen die Punkte

$$A_1 \cdots 1 - y = 0, \quad a_0(1+y) + a_1 x = 0$$
$$A_4 \cdots 1 + y = 0, \quad a_3 x + a_4(1-y) = 0$$

und ihnen parallel die Asymptote

$$Y \equiv a_1(1+y) + a_3(1-y) = 0$$

hat. Den Ausdruck für die andere Asymptote findet man, wenn man in der Hyperbelgleichung Zähler und Nenner der gebrochenen Funktion nach y entwickelt und dann die Division zu Ende führt. Schafft man alsdann die Nenner fort und setzt:

$$(a_1 - a_3)(a_0 - a_4) - a_3(a_0 - a_2 + a_4) \equiv a_3', \quad (a_1 - a_3)^2 \equiv a_2'$$
$$(a_1 - a_3)(a_0 - a_4) - a_1(a_0 - a_2 + a_4) \equiv a_1', \quad a_3'(1+y) + a_2' x + a_1'(1-y) \equiv X,$$

so ist

$$XY + 4(a_0 a_3^2 - a_3 a_2 a_1 + a_1^2 a_4) = 0$$

die Asymptotengleichung und $X = 0$ die Gleichung der zweiten Asymptote.

Erzeugt wird die Hyperbel von den Strahlenbüscheln

$$a_0(1+y) + a_1 x + \lambda a_2(1-y) = 0$$
$$(1-\lambda)a_2(1+y) + a_3 x + a_4(1-y) = 0,$$

welche die beiden Schnitte

$$1 + y = 0, \quad a_1 x + \lambda a_2(1-y) = 0$$
$$1 - y = 0, \quad (1-\lambda)a_2(1+y) + a_3 x = 0$$

des Strahlenbüschels

$$(1-\lambda)a_1a_2(1+y)+a_1a_3x+\lambda a_2a_3(1-y)=0$$

projizieren. Die Tangenten in A_1 und A_4, d. h. die der Verbindungslinie dieser Punkte

$$a_0a_3(1+y)+a_3a_1x+a_1a_4(1-y)=0$$

entsprechenden zwei Strahlen

$$a_0a_1(1+y)+a_1^2x+(a_1a_2-a_0a_3)(1-y)=0,$$
$$(a_2a_3-a_1a_4)(1+y)+a_3^2x+a_3a_4(1-y)=0$$

sind zwei Strahlen dieses Büchels; ihr Träger ist also der Schnittpunkt:

$$A_{23}\cdots a_1x+a_2(1-y)=0,\quad a_2(1+y)+a_3x=0,$$

dem die Asymptote $Y=0$ in ihrem Büschel harmonisch zugeordnet ist. Mit beiden Asymptoten aber bilden zwei Tangenten der Hyperbel jedesmal ein vollständiges Tangentenvierseit, von dessen Diagonalstrahlen der eine ein Durchmesser, die beiden anderen also parallel sind. Die zweite Asymptote $X=0$ ist daher die zweite Diagonale desjenigen Trapezes, dessen Mittellinie A_1A_4 und dessen nichtparallele Seiten A_1A_{23} und $A_{23}A_4$ sind.

Holzminden, Dezember 1904. Georg Kober.

Zur ägyptischen Mathematik.

Im 35. Band der Lepsiusschen Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde, 1897, S. 150, gibt der bekannte Ägyptologe L. Borchardt nach einer der von Griffith erklärten Kahunpapyri den Inhalt der Halbkugel als Funktion des Durchmessers. Es handelt sich, wie auch bei den Aufgaben des Papyrus Rhind, um die Ausmessung von Fruchthaufen. Das Maß ist eine zehntel Kubikelle, und es ergibt sich für π der Wert 3,2. B. sagt mit Recht, daß diese Annahme, da es sich um Getreidekörner, die hohl liegen, handelt, praktisch völlig genügend sei. Er fügt hinzu, daß die Methode auf praktischem Wege durch Ausmessung von halbkugligen Haufen mit dem Hohlmaß gefunden sei.

Ich möchte mir über den Näherungswert der Ägypter für π, wonach der Kreis gleich $(\frac{8}{9}d)^2$, d der Durchmesser, die Konjektur erlauben, daß er ebenfalls auf praktischem Wege gefunden. Ein zylindrisches Maß mit dem Durchmesser d des Grundkreises wurde mit Wasser gefüllt und dann in ein Maß mit quadratischer Grundfläche geleert, dabei ergab sich aus der Gleichung $\pi d^2h=d^2\eta$ der Wert $\eta=\frac{64}{81}$; also $\pi=256:81=3{,}1605$, was eine auffällige Annäherung an das indische $\sqrt{10}=3{,}1623$ ist. — Nachdem Griffith in „the Petri Papyri", London, 1898, aus den Kahuner Papyri, Tafel 8, das erste Beispiel einer quadratischen Gleichung mitgeteilt, hat Schack im Berliner Papyrus 6619 ein zweites gefunden in der Aufgabe: 100 Quadratellen auf zwei Quadrate zu verteilen, deren Seiten sich wie $1:\frac{3}{4}$ verhalten. Die Lösung geschieht mit der regula falsi (man vgl. die Polemik von L. Rodet im Journal asiatique gegen Cantor). Man setzt die Seiten 1 und $\frac{3}{4}$, die Quadratsumme ist $\frac{25}{16}$, und die Wurzel $\frac{5}{4}$ —

es findet sich schon ein Ausdruck für die Quadratwurzel — muß mit 8 multipliziert werden, um 10 zu geben, woraus sich die richtigen Lösungen 8 und 6 ergeben. Wir haben also jetzt die beiden Beispiele $x^2 + y^2 = 100$ $x:y = 1:\frac{3}{4}$ und das frühere $xy = 12$, $x:y = 1:\frac{3}{4}$. Beide beziehen sich auf das Dreieck 3, 4, 5.

Ich füge hinzu, daß Borchardt bereits 1893 überzeugend nachgewiesen, daß Skd (Seqt nach Cantor) nicht Kosinus oder Kotangente, sondern nur die Kotangente des Böschungswinkels bedeutet, l. c. 1893, S. 9, und daß er 1896 S. 69 Aufriß und Grundriß der Säule von Phylae, also die Anfänge der darstellenden Geometrie aufgefunden hat. Alle diese Kenntnisse hatten die Ägypter zur Zeit des mittleren Reiches, also zwischen 2000 und 1700, d. h. zur Zeit des Ahmes.

Straßburg i. E., 26. Januar 1904. MAX SIMON.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu I. I. A. 2. Netto, Kombinatorik.

S. 42. „Trägt man $a_{ii} + z$ statt der a_{ii} ein und setzt die entstehende symmetrische *D.* gleich Null, dann hat diese Gleichung in z nur reelle Wurzeln.“ Dieses Resultat setzt stillschweigend voraus, daß die a_{ik} reelle Größen sind. Auch in der französischen Ausgabe, S. 116, Artikel „Equation séculaire“ fehlt der fragliche Zusatz.

Freiburg i. Br. A. LOEWY.

Berichtigungen und Zusätze zum Artikel: I. I. A. 4., Theorie der gemeinen und höheren komplexen Größen, der Encyklopädie.

S. 149. Art. 2. Nach Zeile 4 einzuschalten:

»Vergleiche die Kritik *J. Bolyai*s an der *Gauß*schen (geometrischen) Darstellung in Nr. 11 der weiter unten zitierten Abhandlung. *Hamilton* hat augenscheinlich die *Gauß*sche Theorie der komplexen Größen nicht gekannt.

Faßt man nicht, wie im Texte, die positiven und negativen Größen zusammen, so muß man vier „Einheiten“ gebrauchen, $(+1)$, (-1), $(+i)$, $(-i)$. So verfährt *Gauß* in den Res. biqu., ebenso, mit etwas umständlicherer Bezeichnung, *J. Bolyai*, aber auch noch *Weierstraß* (in Vorlesungen).«

Anmerkung 3 ist so zu fassen:

»Theoria residuorum biquadraticorum II und die Selbstanzeige von dieser Abhandlung (1831). Werke II, p. 169. Das Zeichen i für $\sqrt{-1}$ wird *Gauß* zugeschrieben, findet sich aber auch schon bei *Euler*, namentlich in einer 1777 der Petersburger Akademie eingereichten Abhandlung „De formulis differentialibus etc.“ (Repr. in Instit. Calculi Integralis, ed. tertia, Petrop. 1845, v. 4 p. 183, bes. p. 184). Vgl. *W. Beman*, Am. Bull. 4 (1898) p. 274.«

Bei Anmerkung 4 ist anzufügen:

»Als Vorläufer *Hamiltons* ist zu nennen: *W. Bolyai* (Tentamen XXXII), während *J. Bolyai* in einer erst neuerdings gedruckten Abhandlung aus dem Jahre 1837 der *Hamilton*schen Darstellung nahe kam. (S. *Stäckel*, Johann Bolyais Theorie der imaginären Größen. Mathem.-naturw. Ber. aus Ungarn. Bd. XVI, 1899). Siehe ferner *De Morgan*, Trigonometry and Double Algebra, London 1849.« [Das letzte Buch habe ich nicht gesehen].

S. 165. Anmerkung 14 ist durch folgende zu ersetzen:

»14. Die unter 8 erklärten Begriffe rühren in der Hauptsache von *Hamilton* und *De Morgan* her; von letzterem stammt im wesentlichen der Begriff der Äquivalenz verschiedener Systeme. Diese Begriffe liegen der unter 9 mitgeteilten Aufzählung der Systeme mit vier Einheiten zugrunde. Die vom Referenten bei Aufstellung dieser Systeme benutzte algebraische Methode wird vereinfacht durch das von *F. Scheffers*, Math. Ann. 39 (1891), p. 293 angegebene Kriterium der Reduzibilität, noch mehr durch Methoden, die schon 1870 *Benjamin Peirce* entwickelt hatte (Linear Associative Algebra, Am. J. 4 (1881), p. 97). Der Inhalt dieser Arbeit ist mit mancherlei Unklarheiten behaftet und ist daher erst neuerdings zur Geltung gekommen. Sie enthält aber alles zur Aufstellung der Systeme mit vier oder fünf Einheiten Wesentliche. S. *E. Hawkes*, Am. J. 24 (1901), p. 87 und Am. Trans. 3 (1902), p. 312. Die zweite dieser Arbeiten enthält eine Weiterbildung der *Peirce*schen Methode.«

S. 167. Anmerkung 17 ist wie folgt abzuändern:

»Fortsetzungen dieser Tafel findet man bei *G. Scheffers*, Math. Ann. 39. (1891), p. 293, *H. Rohr*, Dissertation, Marburg 1890, *H. E. Hawkes*, Am. Trans. 3 (1902), p. 312. Die Methode des letzten Autors ist die einfachste.«

S. 179. Anm. 39. Vergleiche weiter unten die Bemerkung über *Gauß*.

S. 181. Z. 13 v. u. bis Z. 10 v. u. Der Satz: „Ein solches $\cdots e_{r+1} \cdots e_n$.“ ist zu ersetzen durch den folgenden:

»Wenn sich die Einheiten einer geeignet gewählten Basis so auf zwei Gruppen $e_1 \cdots e_r$, $e_{r+1} \cdots e_n$ verteilen lassen, daß die Produkte der Einheiten $e_{r+1} \cdots e_n$ untereinander und mit $e_1 \cdots e_r$ alle durch $e_{r+1} \cdots e_n$ ausdrückbar werden, die Einheiten $e_1 \cdots e_r$ also nur in solchen Produkten vorkommen, die aus eben diesen Einheiten gebildet sind, so kann man aus den Gleichungen

$$e_i e_k = \sum_1^r {}_s \gamma_{iks} e_s + \sum_{r+1}^n {}_s \gamma_{iks} e_s \qquad (i, k = 1 \cdots r)$$

die Multiplikationsregeln eines neues Systems mit nur r Einheiten entnehmen, das ein begleitendes System der gegebenen heißt:

$$\varepsilon_i \varepsilon_k = \sum_1^r {}_s \gamma_{iks} \varepsilon_s \qquad (i, k = 1 \cdots r) .«$$

Zum Nachtrag vgl. *Gauß* Werke. Bd. VIII. S. 357—362.

Seit Abschluß des Artikels sind, soweit dem Referenten bekannt, die [illegible] auf dessen Gegenstand bezüglichen Schriften erschienen:

[illegible] Am. Bull. 1897, p. 156.

[illegible] Ann. de Toulouse 12. 1898.

Hausdorff, Leipz. Ber. 1900, p. 45.
Stephanos, Journ. de Math. [5] **6** (1900), p. 73.
Starkweather, Am. J. **21** (1899), 369; **23** (1901), 378.
Strong, Am. Trans. **2** (1901), 43.
Hawkes, Am. Journal, v. 24 (1901), p. 87. — Am. Trans. v. 3 (1901), p. 312.
Dickson, Am. Trans. v. 4 (1903), p. 21.
Loewy, ib. p. 44, 171.
Frobenius, Berl. Ber. 1903, 1904.
Shaw, Am. Trans. v. 4 (1903), p. 251, v. 5 (1904), p. 326.
Epsteen, Am. Trans. v. 4 (1903), p. 437, v. 5 (1904), p. 105.
Pasch, Arch. d. Math. u. Ph. (3) **7** (1903), 102.
Taber, Am. Trans. v. 5 (1904), p. 509.
Vahlen, Abstrakte Geometrie. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Bonn. E. Study.

Zu I. 1. A. 6. Burkhardt, Endliche diskrete Gruppen.

S. 217. Bei Burkhardt heißt es: „Aus dieser Auffassung hat sich die allgemeine Definition einer Gruppe entwickelt als eines Systems von Elementen, das folgenden Bedingungen genügt:

1. Es ist eine Vorschrift gegeben, nach der je zwei Elemente a, b des Systems ein drittes $ab = c$ eindeutig bestimmen.
2. Diese Komposition (Multiplikation) der Elemente ist assoziativ.
3. Aus $ab = ac$ folgt $b = c$, ebenso aus $ba = ca$."

Nach den folgenden Worten: „Umfaßt die Gruppe nur eine endliche Anzahl Elemente, so heißt sie eine endliche," soll die in der Enzyklopädie mitgeteilte Definition auch allgemein eine unendliche Gruppe definieren. Dies ist aber unzutreffend, wie das einfache Beispiel aller Elemente der Form 2^q zeigt, wobei q alle ganzen positiven Zahlen außer $q = 0$ durchläuft. Inbezug auf die Multiplikation erfüllen die Elemente der Form 2^q die obigen drei Bedingungen, trotzdem bildet das angegebene System der Elemente 2^q keine Gruppe. Da q nur alle ganzzahligen positiven Werte, aber nicht den Wert Null annimmt, so enthält das System weder das Einheitselement noch zu jedem das reziproke. Die in der Enzyklopädie gegebene Definition ist nur dann korrekt, wenn noch als weitere Bedingung *postuliert* wird, daß das System nur eine endliche Anzahl von Elementen umfassen soll. Der Folgesatz müßte also lauten: Wird dem *System* (nicht der Gruppe) noch die weitere Bedingung auferlegt, nur eine endliche Anzahl von Elementen zu umfassen, so *definiert* das System eine endliche Gruppe.

Über Definitionen einer Gruppe (endlichen wie unendlichen), die keine überflüssigen, aber auch nicht zu wenig Voraussetzungen umfassen, ist übrigens zu vergleichen: E. V. Huntington, Simplified definition of a group. Bulletin of the American M. Soc. (2) **8**, 296, sowie die Nachbemerkung in American M. S. Trans. **4**, 30. E. V. Huntington, A second definition of a group. Bulletin of the American M. Soc. (2) **8**, 388. Am Schluß dieses Aufsatzes weist auch Huntington mit Berufung auf das System der ganzen positiven Zahlen, die inbezug auf die Addition die obigen drei Bedingungen erfüllen, darauf hin, daß drei Postulate von der Form 1, 2, 3 nicht zur Definition einer unendlichen Gruppe genügen. Vgl. ferner: E. H.

Moore, A definition of abstract groups. American M. S. Trans. **3**, 485. Die zitierten Aufsätze sind nach Abschluß des Enzyklopädieartikels erschienen.

Freiburg i. Br. A. Loewy.

Zu I. D. 4^b. Bohlmann, Lebensversicherungs.-Mathematik.

S. 853, Z. 6 v. u. „Die deutschen Lebensversicherungsgesellschaften legen ihrem normalen Todesfallgeschäft heutzutage die Tafeln der 17 E. G., die Tafeln M I der 23 D. G. oder andere hier nicht aufgeführte Tafeln zu Grunde.“ Hierzu ist zu bemerken: Die im deutschen Reiche beim normalen Todesfallgeschäft verbreitetste Tafel ist die aus gemeinsamen Beobachtungen an Männern und Frauen konstruierte Tafel M u. W I der 23 D. G. Sie wird von mehr als 30 deutschen Lebensversicherungsgesellschaften benutzt. (Vgl. Jahrbuch f. d. Versicherungswesen im Deutschen Reiche. 1903. Herausgeg. von Dr. C. Neumann. S. 540. Siehe auch A. Loewy, Versicherungsmathematik. (1903). Sammlung Göschen. S. 43.)

Die Tafel 23 D. G. M I wird wohl von keiner deutschen Lebensversicherungsgesellschaft verwandt. Die Tafel 17 E. G. besitzt heute für die deutschen Lebensversicherungsgesellschaften bloß eine untergeordnete Bedeutung: sie kommt zumeist nur noch bei Bestimmung der Prämienreserve für alten Versicherungsbestand in Frage.

In Zusammenhang mit der oben erwähnten Stelle können, wie mir scheint, die Bemerkungen über normale Risiken (S. 864) und besonders die Worte auf S. 868: „Jede bessere Sterbetafel trennt jetzt die Geschlechter (so die 20 E. G. in H. M. u. H. F., die 23 D. G in M u. W, die Grundzahlen der 4 F. G. in H u. F.)“ vielleicht irreführen und zu glauben veranlassen, daß die Lebensversicherungsgesellschaften zumeist Männer und Frauen nach getrennten Tafeln versichern. Über die in Deutschland, England und Frankreich übliche Praxis darf ich mir erlauben, der Kürze wegen auf S. 44 u. 45 meiner schon zitierten kleinen Versicherungsmathematik zu verweisen.

S. 880. Letzte Zeilen in Anm. 76): „Ganz sicher geht man, wenn man annimmt, daß die Todesfälle alle zu Anfang des Sterbejahres stattfinden und A durch $A.\frac{1}{v}$ ersetzt (französischer Usus).“ Hierzu ist zu bemerken: Es war alter französischer Usus, die Formeln so zu berechnen, als wenn die versicherte Summe von seiten des Versicherungsinstitutes schon bei Beginn des Versicherungsjahres, in welchem der Tod erfolgt, zu zahlen wäre. Dieser Gebrauch ist aber schon längere Zeit in Frankreich aufgegeben; man macht dort heute meistens die Annahme, daß der Auszahlungstermin durchschnittlich in die Mitte des Versicherungsjahres fällt (Vgl. Bericht des eidgenössischen Versicherungsamtes über das Jahre 1893, S. 21).

Freiburg i. Br. A. Loewy.

Zu I. F. R. Mehmke, Numerisches Rechnen.

S. 993. Anm. 272). „Bis in die neueste Zeit ist der Irrtum verbreitet gewesen, die von J. Neper in seiner „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ 1614 veröffentlichten Logarithmen seien natürliche, weshalb letztere vielfach Nepersche Logarithmen genannt werden; jedoch hat G. Kewitsch [Zeit-

schr. math. naturw. Unterr. 27 (1896), p. 321, 557] nachgewiesen, daß Nepers Logarithmen der Basis $\frac{1}{e}$ entsprechen, während die Basis e den „roten" (weil rot gedruckten) Zahlen in Joost Bürgis „arithm. u. geometr. Progress-Tabulen ..." Prag 1620, zukommt." Zu der angegebenen Stelle in der Enzyklopädie ist folgender Passus in Lagranges Leçons élémentaires sur les mathématiques, wie ich glaube, nicht ohne Interesse: Conformément à cette idée, si l'on prend pour les deux premiers termes de la progression géométrique les nombres très peu différents 1 et 1,0000001 et pour ceux de la progression arithmétique 0 et 0,0000001, et qu'on cherche successivement, par les règles connues, tous les termes suivants des deux progressions, on trouve que le nombre 2 est, à la huitième décimale près, le 6931472° de la progression géométrique; de sorte que le logarithme de 2 est 0,6931472; le nombre 10 se trouve le 23025851° de la même progression; par conséquent le logarithme de 10 est 2,3025851, et ainsi des autres. Mais Neper, n'ayant pour objet que de déterminer les logarithmes des nombres moindres que l'unité, pour l'usage de la Trigonométrie, où les sinus et les cosinus des angles sont exprimés en fractions du rayon, a considéré la progression géométrique décroissante dont les deux premiers termes seraient 1 et 0,9999999 et il en a déterminé, par des calculs immenses, les termes suivants. Dans cette hypothèse, le logarithme que nous venons de trouver pour le nombre 2 devient celui du nombre $\frac{1}{2}$ ou 0,5, et celui du nombre 10 se rapporte au nombre $\frac{1}{10}$ ou 0,1, ce qui est facile à concevoir par la nature des deux progressions (Oeuvres de Lagrange 7, 195). Die von Lagrange im Schlußsatze gemachte Angabe läßt sich in die Formel kleiden:

$$\overset{N}{\log}\, a = \overset{e}{\log}\, \frac{1}{a},$$

wobei N die Basis der Neperschen Logarithmen bedeutet. Hieraus folgt unmittelbar $N = \frac{1}{e}$. Lagrange wußte also auch, daß den Neperschen Logarithmen nicht die Basis e, sondern $\frac{1}{e}$ zugrunde liegt. In der Neperschen Tafel steht übrigens die Zahl 6931469, nicht 6931472.

S. 1078. Bei der Berichtigung zu S. 984, Anm. 216 findet sich die Stelle: „Hiernach findet sich diese Regel im ersten Kapitel von Oughtred's Clavis mathematicae."

Statt ersten ist zu lesen vierten. In meiner Note im Archiv der Math. (3), **3**, S. 322 heißt es auch richtig im vierten Kapitel. In dem ersten Korrekturabzug der Note, der Herrn Mehmke durch Vermittelung der Redaktion des Archivs wohl nur zur Zeit vorlag, stand ersten statt vierten.

Freiburg i. Br. A. Loewy.

Kewitsch selbst erklärt [Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 27 (1896), p. 577]: „Um so mehr halte ich es für meine Pflicht, auf eine Arbeit von Max Koppe aufmerksam zu machen [Osterprogr. 1893, Berlin Andreasrealgymn.], in der er zu demselben Ergebnis gelangt ist wie ich. Leider habe ich zu spät, erst durch ihn selbst davon Kenntnis erhalten."

Ball [A short account of the history of mathematics. 1888, p. 175] sagt: „The logarithm of a quantity n was what we should now express by the formula $10^7 \log (10^7/n)$."

Cajori [A history of mathematics. New York, 1894, p. 163]: Nap. $\log y = 10^7 \log(10^7/y)$: „It is evident from this formula that Napier's logarithms are not the same as the natural logarithms . . . The notion of a „base" in fact never suggested itself to him. The one demanded by his reasoning is the reciprocal of that of the natural system; but such a base would not reproduce accurately all of Napier's figures, owing to slight inaccuracies in the calculation of the tables."

Paul Tannery [Bull. des sc. math. (2) **20**, p. 82, 1896 in der Anzeige der phototypischen Reproduktion von Nepers Mirifici logarithmorum canonis descriptio]: „Avant tout, il serait essentiel de faire disparaître le malencontreux usage d'employer le terme de *logarithme népérien* comme synonyme de logarithme naturel ou hyperbolique . . . Soit a un sinus, $L(a)$ son logarithme naturel, $N(a)$ le nombre de Napier ($A = 10^7$), on a la relation $N(a) = AL(A/a)$ . . . M. Siegmund Günther ne me paraît pas avoir tenu un compte suffisant des articles de Biot dans le *Journal des Savants*, mars, mai et juin 1835, articles dont le dernier, en particulier, est jusqu' à présent l'étude la plus approfondie qui ait été faite de la *Constructio*."

Wir verweisen außerdem auf die Darstellung in Klügel, Mathematisches Wörterbuch, dritter Teil, p. 533—540, 1808; endlich auf den Artikel von M. Koppe in den Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. **3**, p. 48—52, 1904.

Berlin. E. Lampe.

Zu I. II. C 1. Bachmann, Niedere Zahlentheorie.

S. 577. Die in Anm. 59 erwähnte „Identität von d'Aurifeuille":

$$4^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)$$

ist eine einfache Folge des Satzes von Sophie Germain: $x^4 + 4$ ist nicht prim, sondern

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Man braucht in diese Identität nur $x = 2^{n+1}$ einzusetzen und dann die Gleichung durch $2^2 = 4$ zu dividieren. Es ist also wohl *überflüssig*, obige Identität noch mit einem *besonderen* Namen zu benennen.

Potsdam, 10. Dezember 1904. Otto Meissner.

Zu I. II. C. 2. K. Th. Vahlen, Arithmetische Theorie der Formen.

Herr K. Th. Vahlen hat sub Nr. 2 (1. Bd., S. 601) die Frage erörtert, welcher Art und in wieweit man mit Hilfe der ganzzahligen positiven Auflösungen T und U[1]) der Gleichungen:

$$\frac{T^2 - DU^2}{4} = \pm 1, \tag{1}$$

worin D eine gegebene ganze positive Zahl ist, die ganzzahligen positiven Auflösungen t, u der vier Gleichungen

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = \pm 1, \quad t^2 - Du^2 = \pm 1$$

1) Der Kürze wegen schreibe ich T und U statt T' und U'.

finden kann. Die Beantwortung ist aber in sehr knapper Form gegeben; es sei deshalb, nicht gegen den Willen des Herrn Verfassers, eine spezieller eingehende Darstellung der Resultate gestattet.

Bei der Auflösung der Gl. (1) darf und soll hier U immer als *ungerade* vorausgesetzt werden. Für D sind aber die vier Fälle

$$D \equiv 0, \text{ oder } 1, \text{ oder } 2, \text{ oder } 3 \pmod{4}$$

zu unterscheiden. In den letzten beiden ist die Auflösung der Gl. (1) (für ungerades U) unmöglich, in den ersten beiden erhält man folgende Resultate:

I. $D \equiv 1 \pmod{4}$.

A. T, U seien die kleinsten Auflösungen der Gl.

$$\frac{T^2 - DU^2}{4} = -1. \tag{2}$$

Für $k = 3, 9, 15, 21$ etc. setze man

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^k = t_k + u_k\sqrt{D};$$

dann ist t_k gerade, u_k ungerade, und

$$t_k^2 - Du_k^2 = -1.$$

Für $k = 1, 5, 7, 11, 13, 17$ etc. setze man

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^k = \frac{t'_k + u'_k\sqrt{D}}{2};$$

dann sind t'_k und u'_k ungerade und

$$\frac{t'^2_k - Du'^2_k}{4} = -1.$$

Für $k = 6, 12, 18, 24$ etc. setze man

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^k = t_k + u_k\sqrt{D};$$

dann ist t_k ungerade, u_k gerade und

$$t_k^2 - Du_k^2 = 1.$$

Für $k = 2, 4, 8, 10, 14, 16$ etc. setze man

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^k = \frac{t'_k + u'_k\sqrt{D}}{2};$$

dann sind t'_k und u'_k ungerade und

$$\frac{t'^2_k - Du'^2_k}{4} = 1.$$

B. T und U seien die kleinsten Auflösungen der Gl.

$$\frac{T^2 - DU^2}{4} = 1. \tag{3}$$

Für $k = 3, 6, 9, 12, 15, 18$ etc. setze man

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^k = t_k + u_k\sqrt{D},$$

dann ist für $k = 3, 9, 15, \cdots t_k$ gerade, u_k ungerade, für $k = 6, 12, 18, \cdots t_k$ ungerade, u_k gerade und immer

$$t_k^2 - Du_k^2 = 1.$$

Für $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ etc. setze man

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^k = \frac{t_k'+u_k'\sqrt{D}}{2},$$

dann sind t_k' und u_k' ungerade und

$$\frac{t_k'^2 - Du_k'^2}{4} = 1.$$

II. $D \equiv 0 \pmod 4$, $D = 4D_1$.

A. T, U seien die kleinsten Auflösungen der Gl. (2). Dann muß T gerade sein, $T = 2T_1$, und es sind nur die beiden Möglichkeiten vorhanden: T_1 gerade, D_1 ungerade, oder T_1 ungerade, D_1 gerade.

Für ein *ungerades* k setze man in beiden Fällen

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^k = \frac{t_k'+u_k'\sqrt{D}}{2};$$

dann ist t_k' gerade, u_k' ungerade und

$$\frac{t_k'^2 - Du_k'^2}{4} = -1.$$

Für ein *gerades* k setze man

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^k = t_k + u_k\sqrt{D}.$$

Dann ergibt sich, wenn T_1 gerade ist, t_k ungerade, u_k gerade; wenn T_1 ungerade ist, t_k ungerade, u_k für $k = 2, 6, 10, \cdots$ ungerade, für $k = 4, 8, 12, \cdots$ gerade; immer aber

$$t_k^2 - Du_k^2 = 1.$$

B. T, U seien die kleinsten Auflösungen der Gl. (3). Es bleibt alles wie unter A.[1]), nur daß für ungerades k die Gl.

$$\frac{t_k'^2 - Du_k'^2}{4} = +1$$

gilt.

Königsberg, Oktober 1904. L. Saalschütz.

1) Je nachdem T_1 gerade oder ungerade, ist t_k' durch 4 oder nur durch 2 teilbar. — Ist T_1 ungerade, so ist in A. $D_1 \equiv 2 \pmod 4$, in B. D_1 durch 8 teilbar.

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Annuaire pour l'an 1905 publié par le bureau des longitudes, avec la Notice de M. P. Hatt: Explication élémentaire des marées; deuxième partie. Paris, Gauthier-Villars. IV u. 669 + 74 + 44 S. fr. 1,50.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian institution showing the operations, expenditures, and condition of the institution for the year 1903. Washington, government printing office. 1904. 876 S.

Atti del congresso internazionale di scienze storiche (Roma, 1—9 aprile 1903). Vol. XII, Roma 1904, Tip. Acc. Linc. 330 S.

Baire, R., Leçons sur les fonctions discontinues professées au Collège de France. Paris 1905, Gauthier-Villars. VIII u. 128 S. fr. 3,50.

Baire, R., Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité. Paris 1905, Vuibert et Nony. 59 S.

Bolza, O., Lectures on the calculus of variations. Chicago 1904, the University of Chicago Press. 271 S. $ 4.

Borel, E., Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes professées à l'école normale supérieure. Avec des notes par Paul Painlevé et Henri Lebesgue. Paris 1905, Gauthier-Villars. 162 S. fr. 4,50.

Burg, R., Sammlung algebraischer Aufgaben für gewerbliche und technische Lehranstalten nebst einer Abhandlung über das Stabrechnen. Frankfurt a. M. 1904, Auffarth. 5 Hefte. ℳ 3,50.

Bürklen, O. Th., Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. Leipzig 1904, Göschen (Sammlung Göschen 51). 227 S. ℳ 0,80.

Bützberger, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie mit vielen Aufgaben und Anwendungen für Gymnasien u. techn. Mittelschulen. 3. Aufl. Zürich 1905, O. Füßli.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. Baillaud, H. Bourget. Avec une préface de Emile Picard. Tome I (8 nov. 1882—22 juillet 1889). Paris 1905, Gauthier-Villars. 447 S. fr. 16.

Darboux, G., Etude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au congrès des sciences et des arts à Saint-Louis. Paris 1904, Gauthier-Villars. 34 S. fr. 1,50.

Emch, A., An introduction to projective geometry and its applications, in analytical and synthetic treatment. New York 1905, J. Wiley and sons. 267 S. $ 2,50.

Fenkner, H., Arithmetische Aufgaben. Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Ausgabe A. Teil IIa. Pensum der Obersekunda. 3. vermehrte Auflage. Berlin 1905, O. Salle.

Foerster, W., Astrometrie oder die Lehre von der Ortsbestimmung im Himmelsraume, zugleich als Grundlage aller Zeit- und Raummessung. Erstes Heft: Die Sphärik und die Koordinatensysteme, sowie die Bezeichnungen und die sphärischen Koordinatenmessungen. Berlin 1905, G. Reimer. 160 S. ℳ 4.

Gans, R., Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 98 S.

Gutsche, O., Mathematische Übungsaufgaben. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Haacke, Fr., Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 53 S.

Halbmonatliches Literaturverzeichnis der Fortschritte der Physik, redigiert von K. Scheel und R. Assmann. 1905. Braunschweig, Vieweg u. Sohn.

Haussner, R., Darstellende Geometrie. Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. 2. Aufl. Leipzig 1904, Göschen (Sammlung Göschen 142). 207 S. ℳ 0,80.

Höfler, A., Die humanistischen Aufgaben des physikalischen Unterrichtes. Akadem. Antrittsvorlesung. Braunschweig 1904, Vieweg u. Sohn. 17 S.

Höfler, A., Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie und mit 230 physikalischen Leitaufgaben. Unter Mitwirkung von E. Maiss und F. Poske. Braunschweig 1904, Vieweg u. Sohn. 965 S. ℳ 16.

Kančič, F., Georg Freiherr von Vega. Zweite verbesserte und illustrierte Auflage. Wien 1904, Selbstverlag. 58 S. ℳ 1,00.

Kerntler, F., Die Ermittlung des richtigen elektrodynamischen Elementargesetzes auf Grund allgemein anerkannter Tatsachen und auf dem Wege einfacher Anschauung. Budapest 1905, Druckerei Pester Lloyd-Gesellschaft. 29 S.
Kleiber-Scheffler, Physik für die Oberstufe (mit math. Geographie und Chemie). Ungeteilte Ausgabe. München 1905, Oldenbourg. 490 S. ℳ 4,80.
Klein, F., und Riecke, E., Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik in Göttingen, Ostern 1904. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 198 S.
Laemmel, R., Die Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten. Zürich 1904, E. Speidel. 80 S. ℳ 2.
Lanz-Liebenfels, J., Theozoologie oder die Kunde von den Sodoms-Äfflingen und dem Götter-Elektron. Eine Einführung in die älteste und neueste Weltanschauung und eine Rechtfertigung des Fürstentums und des Adels. Wien, Moderner Verlag. 171 S. ℳ 2,50.
Lindemann, F., Lehren und Lernen in der Mathematik. Rektoratsrede. München 1904. 32 S.
Maillet, E., Essais d'hydraulique souterraine et fluviale. Paris 1905, A. Hermann. 218 u. 48 S. fr. 11.
Manes, A., Versicherungswesen. Leipzig 1905, B. G. Teubner (B. G. Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe). 468 S.
Müller, F., Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben. Nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstraß. Mit einem Bildnis Karl Schellbachs. Leipzig 1905, B. G. Teubner.
d'Ocagne, M., Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et nomogrammes. 2e édition entièrement refondue et considérablement augmentée. Paris 1905, Gauthier-Villars. 225 S.
Perry, Praktische Mathematik. Deutsch von G. Lenke. Wien 1903, Verlag des Allgem. Technischen Vereins. 133 S. ℳ 4.
Picard, E., Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique. Paris 1905, Gauthier-Villars. 167 S. fr. 3,50.
Rotth, A. W. H., Vom Werden und Wesen der Maschine. Genesis der mechanischen Technik in allgemein verständlicher Darstellung. Motoren. Berlin 1905, A. Schall. 304 S.
Schumann, E., Ebene Geometrie für die ersten drei Jahre geometrischen Unterrichts an höheren Schulen. Stuttgart 1904, F. Grub. 202 S. ℳ 2,20.
Schur, F., Johann Heinrich Lambert als Geometer. Rektoratsrede a. d. techn. Hochsch. Karlsruhe 1904. 20 S.
Schüssler, R., Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 170 S.
Sohncke, L. A., Sammlung von Aufgaben aus der Differential- u. Integralrechnung. Erster Teil: Differentialrechnung. Sechste Auflage. Halle a. S. 1903, H. W. Schmidt. 304 S. ℳ 5.
Vahlen, K. Th., Abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 302 S.
Vier- und fünfstellige Logarithmentafeln nebst einigen physikalischen Konstanten, aufgestellt und revidiert von L. Holborn und K. Scheel. Braunschweig 1904, Vieweg u. Sohn. 24 S.
Vonderlinn, J., Schattenkonstruktionen. Leipzig 1904, Göschen (Sammlung Göschen 236). 48 S. ℳ 0,80.
Wehner, M., Die Bedeutung des Experimentes für den Unterricht in der Chemie. Aus der Sammlung naturwissensch.-pädagog. Abhandlungen Band II. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 62 S.
Whittaker, E. F., Analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies. Cambridge 1904, University Press. 414 S.

Berichtigung zu Bd. VIII.

S. 327, Z. 10 v. u. lies x^{-q} statt x^{-qp}.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

E. Eckhardt, J. Edalji, P. Epstein, A. Fleck, A. Gleichen, W. Godt, H. Graf, R. Güntsche, J. Horn, Ed. Janisch, W. Kapteyn, A. Kiefer, G. Kober, P. Kokott, W. Ludwig, L. Matthiessen, O. Meissner, E. Meyer, W. F. Meyer, G. A. Miller, J. Neuberg, J. Reusch, L. Saalschütz, J. Schröder, E. Schultz, E. Schänsler, C. Segre, M. Simon, O. Spieß, H. Stahl, R. Sturm,

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigkirchstraße 6[I]

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

Zur Bildung der symmetrischen Funktionen.

Von Louis Saalschütz in Königsberg i. Pr.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine symmetrische Funktion der Größen $a, b, c \dots$, die wir in üblicher Schreibweise als $\sum a^{p_1} b^{p_2} \dots f^{p_r}$ bezeichnen, nach den Potenzen der Elementarfunktionen oder präziser der Funktionen:

$$A_1 = -\sum a,\; A_2 = \sum ab,\; A_3 = -\sum abc,\; A_4 = \sum abcd \text{ etc.}$$

zu ordnen, so daß wir mit einer Potenz von A_1 (wenn eine solche vorhanden ist) beginnen, dann die wachsenden Potenzen von A_2, in deren Koeffizienten A_1 vorkommt, folgen lassen, dann diejenigen von A_3 mit A_1 und A_2 in den Koeffizienten hinzufügen, und so fort. Die für die Auflösung ersonnene Methode läßt sich nicht immer glatt anwenden; ist es aber der Fall, so besitzt dieselbe mancherlei Vorzüge, wie die Erinnerung an die bekannten Methoden zeigen wird.

Die bisher angewandten Methoden sind im wesentlichen folgende:

I. *Newton-Waringsche* Methode. Nach Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln einer gegebenen Gleichung durch die Koeffizienten derselben (*Newtons* Formeln aus der Arithmetica universalis p. 192, aufgelöst von *Waring* in den Meditat. algebraicae p. 225) kann jede ganze symmetrische Funktion der Wurzeln durch die Potenzsummen und somit durch die Koeffizienten der Gleichung ausgedrückt werden (s. *Serret* Algèbre supér. t. I § 173).

II. *Waringsche* Methode (a. a. O.). Ist $V = \sum a^{p_1} b^{p_2} c^{p_3} \dots$, so bildet man $A_1^{p_1-p_2} A_2^{p_2-p_3} A_3^{p_3-p_4} \dots$, führt die Multiplikationen aus, so daß eine Summe der Form $\sum a^{p_1} b^{p_2} c^{p_3} \dots + C_1 \sum a^{q_1} b^{q_2} c^{q_3} \dots +$ etc. entsteht, und zieht dieselbe von V ab, so daß wieder eine symmetrische Funktion übrig bleibt, und verfährt damit ähnlich (siehe *Serret* a. a. O. § 174). Die Zahlenkoeffizienten können auch nach dem Vorschlag des Herrn *Netto* (Substitutionentheorie, 1882, § 10) durch Beispiele gefunden werden.

III. Die Methode von *Cauchy* (s. *Serret* a. a. O. § 177). In derselben werden die Wurzeln der Gleichung nach und nach durch Divisionen eliminiert.

IV. *Cayleys* und *Brioschis* Methoden mit Hilfe der partiellen Differentialgleichungen. Sie erfordern die Darstellung von V durch die Potenzsummen und die Auflösung gewisser Gleichungssysteme (siehe *Faà di Bruno*, Einleitung in die Theorie der binären Formen, deutsch von *Walter* 1881 § 2).[1])

Alle diese Methoden werden bei Funktionen höheren Grades (oder Gewichtes), abgesehen von einzelnen besonders für sie geeigneten Aufgaben, rasch unbequem und in der Praxis fast undurchführbar und bieten bei *sukzessiver* Berechnung d. h. so, daß zuerst r, dann $r+1$, dann $r+2$ Elemente etc. als vorhanden angenommen werden, keine nennenswerte Erleichterung dar. Das wird bei unserer Methode, bei der das Resultat nach Potenzen des letzten Koeffizienten der Gleichung A_n, bezw. A_{n+1} geordnet wird[2]), gerade erstrebt, und wir glauben als Vorteile derselben den bisherigen gegenüber die folgenden aufführen zu dürfen.

1. Zur Bestimmung der Koeffizienten der Potenzen von A_{n+1} bedürfen wir nur der Koeffizienten der Potenzen von A_n *mit Ausschluß von* A_n^0.

2. Die Berechnung eines Koeffizienten bedarf nicht der gesonderten Aufstellung seiner Bestandteile in litteraler Hinsicht (nach *Waring*) und der dann folgenden Bestimmung ihrer Zahlenfaktoren durch kombinatorische Betrachtungen oder durch Auflösung linearer Gleichungen, deren rechte (bekannte) Seite mit wachsendem n immer unbequemer zu bilden ist, sondern der Differentiation ganzer Funktionen.

3. Die Rechnung wird über ein gewisses n hinaus immer leichter und kürzer.

4. Zur Vereinfachung derselben sind Formeln entwickelt, welche, wenn mehr als zwei Elemente in die symmetrische Funktion eingehen, bis zu Funktionen vom 23. Grade ausreichen.

Immerhin bleibt die Ausführung bei höherem Grad der Funktion langwierig; dies liegt aber in der Natur des Problems, wie die lang

1) In neuerer Zeit hat P. Gordan (Mathem. Ann. **52**, 501 ff.) eine Arbeit allgemeineren theoretisch wertvollen Inhaltes über die symmetrischen Funktionen veröffentlicht, in welcher unter anderem gewisse dieser Funktionen, wie die *Diskriminante* einer algebraischen Gleichung und die *Resultante* zweier Gleichungen, durch Potenzsummen oder damit eng zusammenhängende symmetrische Elementarfunktionen ausgedrückt werden. Diese Abhandlung sowie die sehr interessante Arbeit von K. Th. Vahlen (Acta Mathem. **23**, 91 ff.) über Fundamental-Systeme für symmetrische Funktionen stehen indessen zum Inhalt gegenwärtigen Aufsatzes in keiner engeren Beziehung. Dasselbe gilt auch von anderen, z. B. der umfangreichen Arbeit von Kostka im Journ. f. r. u. a. Math. **93**, 89.

2) Wie es bei der Berechnung der Diskriminante nach *Serret* (s. a. a. O. § 202) geschieht.

gestreckten Resultate zeigen, welche sich durch keine Methode verkürzen lassen.

Der Stoff ist in folgender Art angeordnet worden: 1. Darstellung der Methode. 2. Allgemeine Formeln für $\overset{n+1}{P}_k$. 3. Die Differentiation der $\overset{n}{P}_k$. 4. Schrittweise Verminderung der Rechenoperationen. 5. Beispiele. 6. Ausgeschlossener Fall. 7. Beispiele dafür.

---

1. *Darstellung der Methode.* — Sei V die Bezeichnung für die symmetrische Funktion $\sum a^{p_1} b^{p_2} c^{p_3} \cdots e^{p_{r-1}} f^{p_r}$ der vorhandenen r oder mehr Elemente a, b, c etc., welche aus dem Gliede $a^{p_1} b^{p_2} \cdots e^{p_{r-1}} f^{p_r}$ entsteht, wenn die *nach abnehmender Größe geordneten* Exponenten $p_1 p_2 \cdots p_r$ fest an ihrer Stelle belassen und für das System der Basen nacheinander alle Variationen ohne Wiederholungen $r$ter Klasse der vorhandenen Elemente genommen werden, wobei jedoch die etwaigen gleichlautenden Glieder nur *einmal* zu schreiben sind. Ist n die Anzahl der Elemente ($n \geqq r$), so schreiben wir spezieller:

$$V_n = \sum_{(n)} a^{p_1} b^{p_2} \cdots e^{p_{r-1}} f^{p_r}. \tag{1}$$

Nehmen wir $a, b, c, \cdots$ als gleichartige Größen ersten Grades an, so ist V_n vom Grade (oder Gewichte) $p_1 + p_2 + \cdots + p_r$ und läßt sich, wie bekannt, durch die positiv oder negativ genommenen symmetrischen Elementarfunktionen, d. h. durch:

$$\alpha_1 = -\sum a, \quad \alpha_2 = \sum ab, \quad \alpha_3 = -\sum abc, \cdots, \alpha_n = (-1)^n abc \cdots l, \tag{2}$$

(deren Index zugleich ihren Grad angibt) oder durch die Koeffizienten der Gleichung

$$\xi^n + \alpha_1 \xi^{n-1} + \alpha_2 \xi^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} \xi + \alpha_n = 0, \tag{3}$$

deren Wurzeln $a, b, c, \cdots l$ sein sollen, ausdrücken. Sei dies nach irgend welcher Methode ausgeführt, so ordnen wir V_n, welches wir als Funktion der α_k als $\overline{V}_n$ bezeichnen, nach Potenzen von α_n und stellen uns die Aufgabe, die in gleicher Art gebildete Funktion:

$$V_{n+1} = \sum_{(n+1)} a^{p_1} b^{p_2} \cdots e^{p_{r-1}} f^{p_r}, \tag{4}$$

wo zu den obigen Größen $a, b, \cdots l$ noch die *eine* t hinzukommt, und wo diese $n+1$ Größen der Gleichung

$$x^{n+1} + A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \cdots + A_n x + A_{n+1} = 0 \tag{5}$$

genügen, durch die Koeffizienten derselben und zwar nur mit Hilfe des Ausdrucks für $\overline{V}_n$ auszudrücken.

Die beiden Funktionen V_{n+1} und V_n können wir in folgender Art miteinander in Zusammenhang setzen:

$$(6)\qquad V_{n+1} = V_n + t^{p_r}\sum_{(n)} a^{p_1}\cdots e^{p_r-1} + t^{p_r-1}\sum_{(n)} a^{p_1}\cdots e^{p_r} + \cdots + t^{p_1}\sum_{(n)} a^{p_2}\cdots e^{p_r};$$

andererseits ordnen wir $\overline{V}_{n+1}$ nach Potenzen von A_{n+1}, setzen also, indem wir die unbekannten, A_1 bis A_n enthaltenden Koeffizienten mit $\overset{n+1}{P_k}$ bezeichnen ($k = 0$ bis q):

$$(7)\qquad \overline{V}_{n+1} = \overset{n+1}{P_0} + \overset{n+1}{P_1} A_{n+1} + \frac{1}{2!}\overset{n+1}{P_2} A_{n+1}^2 + \cdots + \frac{1}{q!}\overset{n+1}{P_q} A_{n+1}^q.$$

Hierin ist q die größte in dem Bruch

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_r}{n+1}$$

enthaltene ganze Zahl.

Diese Koeffizienten $\overset{n+1}{P_0}, \overset{n+1}{P_1}, \cdots \overset{n+1}{P_q}$ wollen wir nach der Mac Laurinschen Methode bestimmen, und nehmen zu diesem Zweck $A_1, A_2, \cdots A_n$ als fest gegeben, A_{n+1} als veränderlich an; dann sind die Wurzeln der Gleichung (5) von A_{n+1} abhängig, und *diejenige* Wurzel, welche gleichzeitig mit A_{n+1} verschwindet, bezeichnen wir als t, während die anderen in diesem Spezialfall die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

sind. Hat nun Gleichung (3) dieselben Wurzeln wie Gleichung (5) mit Ausschluß von t, so ändern sich auch die Koeffizienten dieser Gleichung $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ nicht, und zwar bestehen zwischen diesen und den A_k die bekannten Beziehungen:

$$(8)\qquad \alpha_k = A_k + A_{k-1}t + A_{k-2}t^2 + \cdots + A_1 t^{k-1} + t^k. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Denken wir nun in (6) die symmetrischen Funktionen der Wurzeln von (3) als Funktionen ihrer Koeffizienten ausgedrückt, schreiben also:

$$(9)\quad \overline{V}_{n+1} = \overline{V}_n + t^{p_r} f_1(\alpha_1\cdots\alpha_n) + t^{p_r-1} f_2(\alpha_1\cdots\alpha_n) + \cdots + t^{p_1} f_r(\alpha_1\cdots\alpha_n),$$

so wird die Natur der Funktionen $f_1, f_2, \cdots f_r$ durch die Änderung ihrer Argumente nicht berührt.

Wir machen jetzt bezüglich der Exponenten $p_1, p_2, \cdots p_r$ die beschränkende Voraussetzung, daß

$$(10)\qquad q \equiv \left[\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_r}{n+1}\right] < p_r$$

sei.

Nun setzen wir die rechten Seiten der Gleichungen (7) und (9) einander gleich und dann $A_{n+1} = 0$, womit auch $t = 0$ wird, so folgt

$$\overset{n+1}{P}_0 = (\overline{V}_n)_0. \tag{11}$$

Jetzt differenzieren wir nach A_{n+1} und setzen dieses gleich 0, so folgt

$$\overset{n+1}{P}_1 = \left(\frac{d\overline{V}_n}{dA_{n+1}}\right)_0,$$

ebenso ist überhaupt:

$$\overset{n+1}{P}_k = \left(\frac{d^k\overline{V}_n}{dA^k_{n+1}}\right)_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q). \tag{12}$$

Die Differentiationen werden in der Art ausgeführt, daß $\overline{V}_n$ sich infolge der Gleichungen (8) als Funktion von t darstellt, und t vermöge der Gleichung

$$t^{n+1} + A_1 t^n + A_2 t^{n-1} + \cdots + A_n t + A_{n+1} = 0 \tag{13}$$

von A_{n+1} abhängt. Die weiteren Glieder der rechten Seite von (9) bleiben, weil selbst die höchste Anzahl q der Differentiationen wegen (10) kleiner als p_r und $t = 0$ zu setzen ist, ohne Einfluß.

Ehe wir die allgemeinen Formeln entwickeln, nehmen wir, um das Charakteristische der Methode klar zu legen, ein sehr einfaches Beispiel:

$$V = \sum a^3 b^2.$$

Für $n = 2$ ist

$$\overline{V}_2 = -\alpha_1 \alpha_2^2:$$

$$V_3 = V_2 + t^2 \sum_{(2)} a^3 + t^3 \sum_{(2)} a^2.$$

Durch Differentiation von (8) nach t folgt:

$$\left(\frac{d\alpha_k}{dt}\right)_{t=0} = (\alpha'_k)_0 = A_{k-1}$$

und durch Differentiation von (13) mit $n = 2$ nach A_3:

$$(3t^2 + 2A_1 t + A_2)\frac{dt}{dA_3} + 1 = 0, \; \left(\frac{dt}{dA_3}\right)_0 = -\frac{1}{A_2}.$$

Weiter ist

$$q = [\tfrac{5}{3}] = 1, \; p_r = 2,$$

also (10) erfüllt und somit nach (11) und (12):

$$\overset{3}{P}_0 = -A_1 A_2^2$$

$$\overset{3}{P}_1 = -\left(\frac{d}{dt}(\alpha_1 \alpha_2^2)\frac{dt}{dA_3}\right)_0 = A_2 + 2A_1^2$$

$$\overline{V}_3 = -A_1 A_2^2 + (2A_1^2 + A_2)A_3.$$

Wir könnten hieraus in gleicher Art $\bar{V}_4$ und dann $\bar{V}_5$ bilden, welch' letzteres gleich dem allgemeinen V wäre, unterlassen es aber, weil sich später noch eine weitere Erleichterung der Rechnung ergeben wird.[1])

Anmerkung: Es ist weitaus am einfachsten und für unsere Methode charakteristisch, unter t die gleichzeitig mit A_{n+1} verschwindende Wurzel zu verstehen, aber *notwendig* ist es nicht. Verstehen wir unter t eine beliebige Wurzel der Gleichung (13), so müssen wir, im obigen Beispiel, $a^3 + b^3$ und $a^2 + b^2$ durch α_1 und α_2 ausdrücken, in den Differentialquotienten t (von Null verschieden) belassen, und kämen dann schließlich, indem sich alles Überflüssige forthebt, zu demselben Resultat; allgemein ebenso, erforderlichen Falles mit Hilfe der Gleichung:

$$t^{n+1} + A_1 t^n + A_2 t^{n-1} + \cdots + A_n t = 0.$$

2. *Allgemeine Formeln für* $\overset{n+1}{P_k}$. — Um $\overset{n+1}{P_k}$, das ist (siehe (12)) $\left(\frac{d^k \bar{V}_n}{dA_{n+1}^k}\right)$ allgemein bilden zu können, bedürfen wir der höheren Differentialquotienten von $\bar{V}_n$ nach t, derjenigen von t nach A_{n+1}, und zwar beiderlei Ableitungen für t (und A_{n+1}) gleich Null, und der bekannten sie verbindenden Formeln für die höheren Differentialquotienten.

Was das erste betrifft, so ist der Voraussetzung nach $\bar{V}_n$ auf die Form

$$\bar{V}_n = \overset{n}{P_0} + \overset{n}{P_1}\alpha_n + \tfrac{1}{2}\overset{n}{P_2}\alpha_n^2 + \tfrac{1}{6}\overset{n}{P_3}\alpha_n^3 + \cdots \tag{14}$$

gebracht; die Differentialquotienten von $\bar{V}_n$ nach t setzen sich also aus denen der $\overset{n}{P_k}$ nach t und denen der Potenzen von α_n nach t zusammen. Die ersteren hängen von dem besonderen Problem ab, und wir kommen auf dieselben noch einmal zurück (s. **3.**). Die letzteren lassen sich in folgender Art finden. Für die erste Potenz ergibt sich direkt durch Differentiation von (8) für $t = 0$

$$\left(\frac{d^m \alpha_k}{dt^m}\right)_{t=0} = \left(\alpha_k^{(m)}\right)_0 = \begin{cases} m!\,A_{k-m} & \text{für } m < k \\ k! & \text{„} \quad m = k \\ 0 & \text{„} \quad m > k \end{cases} \tag{15}$$

und um die höheren Potenzen von α_k zu differenzieren, benutze man die Formel:

$$\frac{d^h(uvw\ldots)}{dt^h} = \operatorname{symb}(u + v + w + \cdots)^h, \tag{16}$$

1) Siehe die Fußnote zu dem Beispiel $V = \Sigma(abc)^6$ in **5.**

worin die Potenzen durch die entsprechenden Differentialquotienten und insbesondere die 0te Potenz durch die Funktion selbst zu ersetzen ist. Ordnet man dann noch die rechte Seite von (16) nach Summen im Sinne derjenigen in den Gleichungen (1), (2), etc., setzt darin $u, v, w, \ldots$ einander gleich und etwa gleich y, läßt die Summenzeichen fort und fügt statt deren die Permutationszahl der Exponenten als Faktor hinzu, so erhält man den $h$ten Differentialquotienten von y^r, wenn man die Anzahl der Funktionen $u, v, w, \ldots$ gleich r macht. Z. B. ist

$$(u+v+w+z+s)^3 = \sum(u^3v^0w^0z^0s^0) + 3\sum u^2v\,w^0z^0s^0 + 6\sum uvwz^0s^0$$

und demnach

$$\frac{d^3y^5}{dt^3} = 5y'''y^4 + 60y''y'y^3 + 60y'y'y'y^2. \tag{17}$$

In dieser Art erhält man mittels der Gleichungen (15) die auf S. 120 folgenden Formeln (18).

In diesen Gleichungen ist A_0 durch 1 zu ersetzen, während ein A mit negativem Index verschwindet. Mit Hilfe derselben (mit n statt k) können wir die Ableitungen von V_n nach t, für $t=0$, nach Potenzen von A_n ordnen, und wir bezeichnen nun die Koeffizienten derselben mit $D_0 D_1 D_2 \ldots, E_0 E_1 E_2 \ldots$ etc., indem wir setzen:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{dV_n}{dt}\right)_0 &= D_0 + D_1A_n + D_2A_n^2 + D_3A_n^3 + \cdots,\\
\left(\frac{d^2V_n}{dt^2}\right)_0 &= E_0 + E_1A_n + E_2A_n^2 + E_3A_n^3 \cdots,\\
\left(\frac{d^3V_n}{dt^3}\right)_0 &= F_0 + F_1A_n + F_2A_n^2 + F_3A_n^3 + \cdots,\\
\left(\frac{d^4V_n}{dt^4}\right)_0 &= G_0 + G_1A_n + G_2A_n^2 + G_3A_n^3 + \cdots,\\
\left(\frac{d^5V_n}{dt^5}\right)_0 &= H_0 + H_1A_n + H_2A_n^2 + H_3A_n^3 + \cdots,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Die Koeffizienten D_0, D_1, D_2 etc. setzen sich aus den Ableitungen der $\overset{n}{P}_k$ nach t (für $t=0$) und den Größen A_1 bis A_{n-1} zusammen; wir brauchen für die weitere Rechnung nur einen Teil derselben und werden die erforderlichen Werte nachher (in den Gleichungen (23)) angeben.

Um nunmehr die Differentialquotienten von t nach A_{n+1} bilden zu können, brauchen wir bereits die Formeln für die höheren Differentialquotienten, deren fünf erste wir hier folgen lassen. Wenn Y eine

$$
(18)\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{d\alpha_k}{dt}\right)_0 = A_{k-1}, \qquad \left(\frac{d^2\alpha_k}{dt^2}\right)_0 = 2A_{k-2},\\
&\left(\frac{d\alpha_k^2}{dt}\right)_0 = 2A_{k-1}A_k, \qquad \left(\frac{d^2\alpha_k^2}{dt^2}\right)_0 = 4A_{k-2}A_k + 2A_{k-1}^2,\\
&\left(\frac{d\alpha_k^3}{dt}\right)_0 = 3A_{k-1}A_k^2, \qquad \left(\frac{d^2\alpha_k^3}{dt^2}\right)_0 = 6A_{k-2}A_k^2 + 6A_{k-1}^2A_k,\\
&\left(\frac{d\alpha_k^4}{dt}\right)_0 = 4A_{k-1}A_k^3, \qquad \left(\frac{d^2\alpha_k^4}{dt^2}\right)_0 = 8A_{k-2}A_k^3 + 12A_{k-1}^2A_k^2,\\
&\left(\frac{d\alpha_k^5}{dt}\right)_0 = 5A_{k-1}A_k^4, \qquad \left(\frac{d^2\alpha_k^5}{dt^2}\right)_0 = 10A_{k-2}A_k^4 + 20A_{k-1}^2A_k^3,\\
&\left(\frac{d^3\alpha_k}{dt^3}\right)_0 = 6A_{k-3},\\
&\left(\frac{d^3\alpha_k^2}{dt^3}\right)_0 = 12A_{k-3}A_k + 12A_{k-2}A_{k-1},\\
&\left(\frac{d^3\alpha_k^3}{dt^3}\right)_0 = 18A_{k-3}A_k^2 + 36A_{k-2}A_{k-1}A_k + 6A_{k-1}^3,\\
&\left(\frac{d^3\alpha_k^4}{dt^3}\right)_0 = 24A_{k-3}A_k^3 + 72A_{k-2}A_{k-1}A_k^2 + 24A_{k-1}^3A_k,\\
&\left(\frac{d^3\alpha_k^5}{dt^3}\right)_0 = 30A_{k-3}A_k^4 + 120A_{k-2}A_{k-1}A_k^3 + 60A_{k-1}^3A_k^2,\\
&\left(\frac{d^4\alpha_k}{dt^4}\right)_0 = 24A_{k-4},\\
&\left(\frac{d^4\alpha_k^2}{dt^4}\right)_0 = 48A_{k-4}A_k + 48A_{k-3}A_{k-1} + 24A_{k-2}^2,\\
&\left(\frac{d^4\alpha_k^3}{dt^4}\right)_0 = 72A_{k-4}A_k^2 + 144A_{k-3}A_{k-1}A_k + 72A_{k-2}^2A_k + 72A_{k-2}A_{k-1}^2,\\
&\left(\frac{d^4\alpha_k^4}{dt^4}\right)_0 = 96A_{k-4}A_k^3 + 288A_{k-3}A_{k-1}A_k^2 + 144A_{k-2}^2A_k^2\\
&\qquad + 288A_{k-2}A_{k-1}^2A_k + 24A_{k-1}^4,\\
&\left(\frac{d^4\alpha_k^5}{dt^4}\right)_0 = 120A_{k-4}A_k^4 + 480A_{k-3}A_{k-1}A_k^3 + 240A_{k-2}^2A_k^3\\
&\qquad + 720A_{k-2}A_{k-1}^2A_k^2 + 120A_{k-1}^4A_k,\\
&\left(\frac{d^5\alpha_k}{dt^5}\right)_0 = 120A_{k-5},\\
&\left(\frac{d^5\alpha_k^2}{dt^5}\right)_0 = 240A_{k-5}A_k + 240A_{k-4}A_{k-1} + 240A_{k-3}A_{k-2},\\
&\left(\frac{d^5\alpha_k^3}{dt^5}\right)_0 = 360A_{k-5}A_k^2 + 720A_{k-4}A_{k-1}A_k + 720A_{k-3}A_{k-2}A_k\\
&\qquad + 360A_{k-3}A_{k-1}^2,\\
&\left(\frac{d^5\alpha_k^4}{dt^5}\right)_0 = 480A_{k-5}A_k^3 + 1440A_{k-4}A_{k-1}A_k^2 + 1440A_{k-3}A_{k-2}A_k^2\\
&\qquad + 1440A_{k-2}^2A_{k-1}A_k + 480A_{k-2}A_{k-1}^3,\\
&\left(\frac{d^5\alpha_k^5}{dt^5}\right)_0 = 600A_{k-5}A_k^4 + 2400A_{k-4}A_{k-1}A_k^3 + 2400A_{k-3}A_{k-2}A_k^3\\
&\qquad + 3600A_{k-3}A_{k-1}^2A_k^2 + 3600A_{k-2}^2A_{k-1}A_k^2\\
&\qquad + 2400A_{k-2}A_{k-1}^3A_k + 120A_{k-1}^5.
\end{aligned}\right.
$$

Funktion von t, t eine Funktion von v ist, so gelten die Gleichungen

$$(20)\begin{cases}\dfrac{dY}{dv} = \dfrac{dY}{dt}\dfrac{dt}{dv};\\[2ex] \dfrac{d^2Y}{dv^2} = \dfrac{d^2Y}{dt^2}\left(\dfrac{dt}{dv}\right)^2 + \dfrac{dY}{dt}\dfrac{d^2t}{dv^2};\\[2ex] \dfrac{d^3Y}{dv^3} = \dfrac{d^3Y}{dt^3}\left(\dfrac{dt}{dv}\right)^3 + 3\dfrac{d^2Y}{dt^2}\dfrac{dt}{dv}\dfrac{d^2t}{dv^2} + \dfrac{dY}{dt}\dfrac{d^3t}{dv^3};\\[2ex] \dfrac{d^4Y}{dv^4} = \dfrac{d^4Y}{dt^4}\left(\dfrac{dt}{dv}\right)^4 + 6\dfrac{d^3Y}{dt^3}\left(\dfrac{dt}{dv}\right)^2\dfrac{d^2t}{dv^2} + \dfrac{d^2Y}{dt^2}\left\{3\left(\dfrac{d^2t}{dv^2}\right)^2 + 4\dfrac{dt}{dv}\dfrac{d^3t}{dv^3}\right\}\\[2ex] \qquad + \dfrac{dY}{dt}\dfrac{d^4t}{dv^4};\\[2ex] \dfrac{d^5Y}{dv^5} = \dfrac{d^5Y}{dt^5}\left(\dfrac{dt}{dv}\right)^5 + 10\dfrac{d^4Y}{dt^4}\left(\dfrac{dt}{dv}\right)^3\dfrac{d^2t}{dv^2} + 5\dfrac{d^3Y}{dt^3}\left\{3\dfrac{dt}{dv}\left(\dfrac{d^2t}{dv^2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{dt}{dv}\right)^2\dfrac{d^3t}{dv^3}\right\}\\[2ex] \qquad + 5\dfrac{d^2Y}{dt^2}\left\{2\dfrac{d^2t}{dv^2}\dfrac{d^3t}{dv^3} + \dfrac{dt}{dv}\dfrac{d^4t}{dv^4}\right\} + \dfrac{dY}{dt}\dfrac{d^5t}{dv^5}.\end{cases}$$

etc. etc.

Setzen wir die linke Seite der Gleichung (5) gleich Y, $x = t$ und $v = A_{n+1}$, so erhalten wir:

$$\frac{dY}{dA_{n+1}} = \{(n+1)t^n + nA_1t^{n-1} + \cdots + A_n\}\frac{dt}{dA_{n+1}} + 1 = 0,$$

also für $t = 0$

$$A_n\left(\frac{dt}{dA_{n+1}}\right)_0 + 1 = 0.$$

Mittels dieser Gleichung und der vorher mitgeteilten (20), deren linke Seite verschwindet, erhalten wir nun sukzessive die Werte:

$$(21)\begin{cases}\left(\dfrac{dt}{dA_{n+1}}\right)_0 = -\dfrac{1}{A_n}, \quad \left(\dfrac{d^2t}{dA_{n+1}^2}\right)_0 = -\dfrac{2A_{n-1}}{A_n^3},\\[2ex] \left(\dfrac{d^3t}{dA_{n+1}^3}\right)_0 = \dfrac{6A_{n-2}}{A_n^4} - \dfrac{12A_{n-1}^2}{A_n^5},\\[2ex] \left(\dfrac{d^4t}{dA_{n+1}^4}\right)_0 = -\dfrac{24A_{n-3}}{A_n^5} + \dfrac{120A_{n-2}A_{n-1}}{A_n^6} - \dfrac{120A_{n-1}^3}{A_n^7},\\[2ex] \left(\dfrac{d^5t}{dA_{n+1}^5}\right)_0 = \dfrac{120A_{n-4}}{A_n^6} - \dfrac{780A_{n-3}A_{n-1} + 360A_{n-2}^2}{A_n^7} + \dfrac{2520A_{n-2}A_{n-1}^2}{A_n^8}\\[2ex] \qquad - \dfrac{1680A_{n-1}^4}{A_n^9},\end{cases}$$

überhaupt

$$\left(\frac{d^mt}{dA_{n+1}^m}\right)_0 = (-1)^{m-1}\frac{m!\,A_{n-m+1}}{A_n^{m+1}} + \frac{c_1}{A_n^{m+2}} + \cdots + \frac{c_{m-2}}{A_n^{2m-1}},$$

wo die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_{m-2}$ von $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_{n-m+1}$ abhängen und insbesondere

$$c_{m-2} = -2^{m-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2m-3)$$

ist. Setzt man nun in den Gleichungen (20) $\overline{V}_n$ statt Y und A_{n+1} statt v, so erkennt man als Form für irgend einen — etwa den λten — Differentialquotienten von $\overline{V}_n$ nach A_{n+1} die folgende:

$$(22) \qquad \left(\frac{d^\lambda \overline{V}_n}{d A_{n+1}^\lambda}\right)_0 = \frac{(-1)^\lambda}{A_n^\lambda}\left(\frac{d^\lambda \overline{V}_n}{d t^\lambda}\right)_0 + \frac{d_1}{A_n^{s_1}}\left(\frac{d^{\lambda-1} \overline{V}_n}{d t^{\lambda-1}}\right)_0 + \frac{d_2}{A_n^{s_2}}\left(\frac{d^{\lambda-2} \overline{V}_n}{d t^{\lambda-2}}\right)_0 + \cdots,$$

worin die Konstanten $d_1, d_2, \ldots$ von A_{n-1}, A_{n-2} etc. abhängen und sämtliche Exponenten $s_1, s_2, \ldots$ größer als λ sind. Für die Differentialquotienten von $\overline{V}_n$ nach t sind in (19) die Formen angegeben. Nun ist aber die linke Seite der Gleichung (22), das ist $\overset{n+1}{P}_\lambda$ (siehe (12)), eine ganze Funktion aller Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$; *also müssen sich in* (22) *alle Glieder, welche eine negative Potenz von A_n als Faktor haben, gegenseitig zerstören, man braucht also dieselben (außer etwa zur Kontrolle) gar nicht zu berechnen. Daher genügt die Berechnung folgender Größen:*

$$\begin{array}{r} D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 \ldots, \\ E_2 E_3 E_4 E_5 \ldots, \\ F_3 F_4 F_5 \ldots, \\ G_4 G_5 \ldots, \\ H_5 \ldots, \\ \text{etc.} \end{array}$$

Nun folgt z. B. durch zweimalige Differentiation von (14) nach t:

$$\frac{d^2 \overline{V}_n}{dt^2} = \frac{d^2 \overset{n}{P}_0}{dt^2} + \left(\frac{d^2 \overset{n}{P}_1}{dt^2}\alpha_n + 2\frac{d\overset{n}{P}_1}{dt}\frac{d\alpha_n}{dt} + \overset{n}{P}_1 \frac{d^2\alpha_n}{dt^2}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 \overset{n}{P}_2}{dt^2}\alpha_n^2 + 2\frac{d\overset{n}{P}_2}{dt}\frac{d\alpha_n^2}{dt} + \overset{n}{P}_2 \frac{d^2\alpha_n^2}{dt^2}\right) + \text{etc.}$$

also ist für $t = 0$:

$$\left(\frac{d^2 \overline{V}_n}{dt^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2 \overset{n}{P}_0}{dt^2}\right)_0 + \left\{2(\overset{n}{P}_1)_0 A_{n-2} + 2\left(\frac{d\overset{n}{P}_1}{dt}\right)_0 A_{n-1} + \left(\frac{d^2 \overset{n}{P}_1}{dt^2}\right) A_n\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Big\{(\overset{n}{P}_2)_0(2A_{n-1}^2 + 4A_{n-2}A_n)$$
$$+ 4\left(\frac{d\overset{n}{P}_2}{dt}\right)_0 A_{n-1}A_n + \left(\frac{d^2\overset{n}{P}_2}{dt^2}\right)_0 A_n^2\Big\}$$
$$+ \tfrac{1}{6}\{(\overset{n}{P}_3)(6A_{n-1}^2 A_n + 6A_{n-2}A_n^2) + \cdots\} + \text{etc.}$$

folglich erhält man:

$$E_0 = \left(\frac{d^2 \overset{n}{P}_0}{dt^2}\right)_0 + \left(2A_{n-1}\left(\frac{d\overset{n}{P}_1}{dt}\right)_0 + 2A_{n-2}(\overset{n}{P}_1)_0\right) + A_{n-1}^2(\overset{n}{P}_2)_0;$$

$$E_1 = \left(\frac{d^2 \overset{n}{P}_1}{dt^2}\right)_0 + \left(2A_{n-2}(\overset{n}{P}_2)_0 + 2A_{n-1}\left(\frac{d\overset{n}{P}_2}{dt}\right)_0\right) + A_{n-1}^2(\overset{n}{P}_3)_0.$$

In dieser Weise findet man folgende Formeln:

$$(23)\quad \left\{ \begin{array}{l}
D_1 = \left(\frac{d\overset{n}{P}_1}{dt}\right)_0 + A_{n-1}(\overset{n}{P}_2)_0, \qquad D_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\overset{n}{P}_2}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2}A_{n-1}(\overset{n}{P}_3)_0, \\
D_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{d\overset{n}{P}_3}{dt}\right)_0 + \frac{1}{6}A_{n-1}(\overset{n}{P}_4)_0, \; D_4 = \frac{1}{24}\left(\frac{d\overset{n}{P}_4}{dt}\right)_0 + \frac{1}{24}A_{n-1}(\overset{n}{P}_5)_0, \; D_5 = \frac{1}{120}\left(\frac{d\overset{n}{P}_5}{dt}\right)_0; \\
E_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\overset{n}{P}_2}{dt^2}\right)_0 + \left(A_{n-2}(\overset{n}{P}_3)_0 + A_{n-1}\left(\frac{d\overset{n}{P}_3}{dt}\right)_0\right) + \frac{1}{2}A_{n-1}^2(\overset{n}{P}_4)_0, \\
E_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{d^2\overset{n}{P}_3}{dt^2}\right)_0 + \frac{1}{3}\left(A_{n-2}(\overset{n}{P}_4)_0 + A_{n-1}\left(\frac{d\overset{n}{P}_4}{dt}\right)_0\right) + \frac{1}{6}A_{n-1}^2(\overset{n}{P}_5)_0, \\
E_4 = \frac{1}{24}\left(\frac{d^2\overset{n}{P}_4}{dt^2}\right)_0 + \frac{1}{12}\left(A_{n-2}(\overset{n}{P}_5)_0 + A_{n-1}\left(\frac{d\overset{n}{P}_5}{dt}\right)_0\right), \quad E_5 = \frac{1}{120}\left(\frac{d^2\overset{n}{P}_5}{dt^2}\right)_0; \\
F_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\overset{n}{P}_3}{dt^3}\right)_0 + \left(A_{n-3}(\overset{n}{P}_4)_0 + A_{n-2}\left(\frac{d\overset{n}{P}_4}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2}A_{n-1}\left(\frac{d^2\overset{n}{P}_4}{dt^2}\right)_0\right) \\
\qquad + A_{n-1}\left(A_{n-2}(\overset{n}{P}_5)_0 + \frac{1}{2}A_{n-1}\left(\frac{d\overset{n}{P}_5}{dt}\right)_0\right), \\
F_4 = \frac{1}{24}\left(\frac{d^3\overset{n}{P}_4}{dt^3}\right)_0 + \frac{1}{4}\left(A_{n-3}(\overset{n}{P}_5)_0 + A_{n-2}\left(\frac{d\overset{n}{P}_5}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2}A_{n-1}\left(\frac{d^2\overset{n}{P}_5}{dt^2}\right)_0\right), \\
F_5 = \frac{1}{120}\left(\frac{d^3\overset{n}{P}_5}{dt^3}\right)_0; \\
G_4 = \frac{1}{24}\left(\frac{d^4\overset{n}{P}_4}{dt^4}\right)_0 + \left(A_{n-4}(\overset{n}{P}_5)_0 + A_{n-3}\left(\frac{d\overset{n}{P}_5}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2}A_{n-2}\left(\frac{d^2\overset{n}{P}_5}{dt^2}\right)_0 + \frac{1}{6}A_{n-1}\left(\frac{d^3\overset{n}{P}_5}{dt^3}\right)_0\right), \\
G_5 = \frac{1}{120}\left(\frac{d^4\overset{n}{P}_5}{dt^4}\right)_0; \\
H_5 = \frac{1}{120}\left(\frac{d^5\overset{n}{P}_5}{dt^5}\right)_0.
\end{array}\right.$$

Soll nun z. B. $\overset{n+1}{P}_2 = \left(\frac{d^2 \overline{V}_n}{dA_{n+1}^2}\right)_0$ berechnet werden, so ist in der zweiten Gleichung (20) $Y = V_n$, $v = A_{n+1}$ zu setzen; dann wird nach (21) und (19):

$$\begin{aligned}\overset{n+1}{P}_2 &= (E_0 + E_1 A_n + E_2 A_n^2 + E_3 A_n^3 + \cdots)\cdot \frac{1}{A_n^2}\\ &\quad - 2(D_0 + D_1 A_n + D_2 A_n^2 + D_3 A_n^3 + \cdots)\frac{A_{n-1}}{A_n^2}\\ &= (E_2 - 2A_{n-1}D_3) + (E_3 - 2A_{n-1}D_4)A_n + (E_4 - 2A_{n-1}D_5)A_n^2 + \cdots,\end{aligned}$$

indem die gebrochene Funktion:

$$\frac{-2A_{n-1}D_0 + (E_0 - 2A_{n-1}D_1)A_n + (E_1 - 2A_{n-1}D_2)A_n^2}{A_n^2},$$

welche, wie oben bemerkt, verschwinden muß, fortgelassen wird. In gleicher Art erhält man die folgenden Formeln, denen wir noch die Gleichung (11) voranstellen:

$$\overset{n+1}{P}_0 = (\overline{V}_n)_0; \tag{11}$$

$$\begin{cases}\overset{n+1}{P}_1 = -\sum\limits_{k=1} D_k A_n^{k-1},\\ \overset{n+1}{P}_2 = \sum\limits_{k=2} (E_k - 2A_{n-1}D_{k+1})A_n^{k-2},\\ \overset{n+1}{P}_3 = \sum\limits_{k=3} (-F_k + 6A_{n-1}E_{k+1} + 6A_{n-2}D_{k+1} - 12A_{n-1}^2 D_{k+2})A_n^{k-3},\\ \overset{n+1}{P}_4 = \sum\limits_{k=4} (G_k - 12A_{n-1}F_{k+1} - 24A_{n-2}E_{k+1} - 24A_{n-3}D_{k+1}\\ \qquad + 60A_{n-1}^2E_{k+2} + 120A_{n-2}A_{n-1}D_{k+2} - 120A_{n-1}^3D_{k+3})A_n^{k-4},\\ \overset{n+1}{P}_5 = \sum\limits_{k=5} \{-H_k + 20A_{n-1}G_{k+1} + (60A_{n-2}F_{k+1} - 180A_{n-1}^2F_{k+2})\\ \qquad + (120A_{n-3}E_{k+1} - 720A_{n-2}A_{n-1}E_{k+2} + 840A_{n-1}^3E_{k+3})\\ \qquad + (120A_{n-4}D_{k+1} - [780A_{n-3}A_{n-1} + 360A_{n-2}^2]D_{k+2}\\ \qquad + 2520A_{n-2}A_{n-1}^2D_{k+3} - 1680A_{n-1}^4D_{k+4})\}A_n^{k-5}.\end{cases} \tag{24}$$

Die hiermit in Bereitschaft gestellten Gleichungssysteme (23), (11) und (24) sind, abgesehen von den Differentiationen der $\overset{n}{P}_k$, *die einzigen in praxi erforderlichen Formeln, um* V_{n+1} *aus* $\overline{V}_n$ *abzuleiten.*

Ist V eine binäre, ternäre, überhaupt r-näre Funktion, so ist n mindestens bezw. 2, 3, r; also reichen die Formeln (24) aus, *wenn* V *von geringerer als der* $6(r+1)$*ten Dimension ist*, vorausgesetzt, daß die $D_k, \ldots H_k$ hinreichend weit (falls erforderlich[1]) weiter als in (23) angegeben) berechnet sind.

1) Dies Erfordernis tritt nur ein, wenn $r = 2$, und V die 11te Dimension überschreitet.

3. *Die Differentiationen der* $\overset{n}{P}_k$. — Zur Ausführung der für die Benutzung der Gleichungen (23) nötigen Differentiationen der $\overset{n}{P}_k$ nach t (wobei schließlich $t = 0$ zu setzen ist) stehen zwei Wege offen: entweder man differenziert $\overset{n}{P}_k$, welches aus einer Summe von Produkten der Form $\alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r \ldots$ besteht, mittels der gewöhnlichen Regeln für die Differentiation von Produkten (siehe Gleichung (16)) und benutzt dabei die Gleichungen (18), *wobei aber die* $(m+1)$*te Differentiation nicht aus der* m*ten abzuleiten geht, sondern direkt ausgeführt werden muß;* oder man entwickelt $\overset{n}{P}_k$ mittels (8) nach Potenzen von t, wobei man aber nur bis zur $m$ten Potenz zu gehen braucht, wenn nicht mehr als m Differentiationen auszuführen sind.

Wir fügen ein (ziemlich kompliziertes) Beispiel hinzu, damit der Leser sich selbst ein Urteil bilden könne, welche Methode im gegebenen Falle vorzuziehen ist. *Es sollen die drei ersten Differentialquotienten von* $\alpha_3 \alpha_4^3 \alpha_5^2$ *für* $t = 0$ *gebildet werden.*

Erste Methode. Wenn die Akzente Differentiationen nach t bedeuten, so ist

$$\begin{aligned}\frac{d^3(\alpha_3 \alpha_4^3 \alpha_5^2)}{dt^3} &= \alpha_3''' \alpha_4^3 \alpha_5^2 + \alpha_3 (\alpha_4^3)''' \alpha_5^2 + \alpha_3 \alpha_4^3 (\alpha_5^2)''' + 3\alpha_5^2(\alpha_3''(\alpha_4^3)' + \alpha_3'(\alpha_4^3)'') \\ &+ 3\alpha_4^3(\alpha_3''(\alpha_5^2)' + \alpha_3'(\alpha_5^2)'') + 3\alpha_3((\alpha_4^3)''(\alpha_5^2)' + (\alpha_4^3)'(\alpha_5^2)'') \\ &+ 6\alpha_3'(\alpha_4^3)'(\alpha_5^2)',\end{aligned}$$

demgemäß für $t = 0$ mit Benutzung der Gleichungen (18):

$$\begin{aligned}&= 6A_4^3 A_5^2 + A_3 A_5^2(18 A_1 A_4^2 + 36 A_2 A_3 A_4 + 6 A_3^3) + A_3 A_4^3 (12 A_2 A_5 + 12 A_3 A_4) \\ &+ 3 A_5^2(2 A_1 \cdot 3 A_4^2 A_3 + A_2(6 A_2 A_4^2 + 6 A_3^2 A_4)) \\ &+ 3 A_4^3(2 A_1 \cdot 2 A_5 A_4 + A_2(4 A_3 A_5 + 2 A_4^2)) + 3 A_3((6 A_2 A_4^2 + 6 A_3^2 A_4) \cdot 2 A_5 A_4 \\ &+ 3 A_4^2 A_3(4 A_3 A_5 + 2 A_4^2)) + 6 A_2 \cdot 3 A_4^2 A_3 \cdot 2 A_5 A_4\end{aligned}$$

und gehörig zusammengezogen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^3(\alpha_3 \alpha_4^3 \alpha_5^2)}{dt^3}\right)_0 &= 6(6 A_1 A_3 A_4^2 A_5^2 + 2 A_1 A_4^4 A_5 + 16 A_2 A_3 A_4^3 A_5 + 9 A_2 A_3^2 A_4 A_5^2 \\ &+ 3 A_2^2 A_4^2 A_5^2 + A_2 A_4^5 + 5 A_3^2 A_4^4 + 12 A_3^3 A_4^2 A_5 + A_3^4 A_5^2 + A_4^3 A_5^2);\end{aligned}$$

in gleicher Art ist

$$\begin{aligned}\frac{d^2(\alpha_3 \alpha_4^3 \alpha_5^2)}{dt^2} &= \alpha_3'' \alpha_4^3 \alpha_5^2 + \alpha_3 (\alpha_4^3)'' \alpha_5^2 + \alpha_3 \alpha_4^3 (\alpha_5^2)'' + 2\alpha_3'(\alpha_4^3)' \alpha_5^2 + 2\alpha_3' \alpha_4^3 (\alpha_5^2)' \\ &+ 2\alpha_3(\alpha_4^3)'(\alpha_5^2)'\end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2(\alpha_3 \alpha_4^3 \alpha_5^2)}{dt^2}\right)_0 &= 2 A_1 A_4^3 A_5^2 + A_3 A_5^2(6 A_2 A_4^2 + 6 A_3^2 A_4) + A_3 A_4^3(4 A_3 A_5 + 2 A_4^2) \\ &+ 2 A_2 \cdot 3 A_4^2 A_3 A_5^2 + 2 A_2 A_4^3 \cdot 2 A_5 A_4 + 2 A_3 \cdot 3 A_4^2 A_3 \cdot 2 A_5 A_4,\end{aligned}$$

also

$$\left(\frac{d^2(\alpha_3\,\alpha_4^3\,\alpha_5^2)}{dt^2}\right)_0 = 2(A_1 A_4^3 A_5^2 + 6 A_2 A_3 A_4^2 A_5^2 + 3 A_3^3 A_4 A_5^2 + 8 A_3^2 A_4^3 A_5 + A_3 A_4^5$$
$$+ 2 A_2 A_4^4 A_5);$$

und endlich:

$$\left(\frac{d\alpha_3\,\alpha_4^3\,\alpha_5^2}{dt}\right)_0 = A_2 A_4^3 A_5^2 + 3 A_3^2 A_4^2 A_5^2 + 2 A_3 A_4^4 A_5.$$

Zweite Methode. Es ist, immer bis t^3:

$$\alpha_3 = A_3 + A_2 t + A_1 t^2 + t^3,$$
$$\alpha_4^3 = (A_4 + A_3 t + A_2 t^2 + A_1 t^3 + \cdots)^3 = A_4^3 + 3 A_3 A_4^2 t + (3 A_2 A_4^2 + 3 A_3^2 A_4) t^2$$
$$+ (3 A_1 A_4^2 + 6 A_2 A_3 A_4 + A_3^3) t^3 + \cdots$$
$$\alpha_5^2 = (A_5 + A_4 t + A_3 t^2 + A_2 t^3 + \cdots)^2 = A_5^2 + 2 A_4 A_5 t + (2 A_3 A_5 + A_4^2) t^2$$
$$+ (2 A_2 A_5 + 2 A_3 A_4) t^3 + \cdots,$$

hiermit:

$$\alpha_4^3 \alpha_5^2 = A_4^3 A_5^2 + (3 A_3 A_4^2 A_5^2 + 2 A_4^4 A_5) t + (3 A_2 A_4^2 A_5^2 + 3 A_3^2 A_4 A_5^2$$
$$+ 8 A_3 A_4^3 A_5 + A_4^5) t^2 + (3 A_1 A_4^2 A_5^2 + 6 A_2 A_3 A_4 A_5^2 + A_3^3 A_5^2 + 8 A_2 A_4^3 A_5$$
$$+ 5 A_3 A_4^4 + 12 A_3^2 A_4^2 A_5) t^3 + \cdots.$$

Multipliziert man dies noch mit α_3, so ist der Koeffizient von t^3:

$$6 A_1 A_3 A_4^2 A_5^2 + 9 A_2 A_3^2 A_4 A_5^2 + A_3^4 A_5^2 + 16 A_2 A_3 A_4^3 A_5 + 5 A_3^2 A_4^4$$
$$+ 12 A_3^3 A_4^2 A_5 + 3 A_2^2 A_4^2 A_5^2 + A_2 A_4^5 + 2 A_1 A_4^4 A_5 + A_4^3 A_5^2 = C_3,$$

Koeffizient von t^2 gleich $6 A_2 A_3 A_4^2 A_5^2 + 3 A_3^3 A_4 A_5^2 + 8 A_3^2 A_4^3 A_5 + A_3 A_4^5$
$$+ 2 A_2 A_4^4 A_5 + A_1 A_4^3 A_5^2 = C_2,$$

Koeffizient von t gleich $3 A_3^2 A_4^2 A_5^2 + 2 A_3 A_4^4 A_5 + A_2 A_4^3 A_5^2 = C_1$,

also ist

$$\left(\frac{d^3(\alpha_3\,\alpha_4^3\,\alpha_5^2)}{dt^3}\right)_0 = 6 C_3; \quad \left(\frac{d^2(\alpha_3\,\alpha_4^3\,\alpha_5^2)}{dt^2}\right)_0 = 2 C_2; \quad \left(\frac{d(\alpha_3\,\alpha_4^3\,\alpha_5^2)}{dt}\right)_0 = C_1,$$

und diese Ausdrücke stimmen mit den obigen überein.

Ist nun $\overline{V}_n$, auf die Form (14) gebracht, zur Weiterentwickelung vorgelegt, so sind zuerst die Differentialquotienten:

$$\left(\frac{d\overset{n}{P}_k}{dt}\right)_0, \ k \gtreqless 1; \quad \left(\frac{d^2\overset{n}{P}_k}{dt^2}\right)_0, \ k \gtreqless 2; \quad \left(\frac{d^3\overset{n}{P}_k}{dt^3}\right)_0, \ k \gtreqless 3 \text{ etc.}$$

zu berechnen, dann mittels (23) die Größen D_k, E_k, F_k, ... zu bilden, und schließlich sind mit Hilfe der Gleichungen (24) die gesuchten $\overset{n+1}{P}_k$ zusammenzusetzen.

4. *Schrittweise Verminderung der Rechenoperationen.* — Mit wachsendem Index n wird die Dimension von A_n immer größer, also der höchste Exponent von A_ν, bez. von A_{n+1}, immer kleiner; demgemäß wird die Anzahl der Größen $\overset{n}{P}_k$ und $\overset{n+1}{P}_k$ immer geringer und daher die Rechnung von Schritt zu Schritt immer kürzer. Ist man hierbei zu einem $n = \nu$ gelangt derart, daß die Dimension von A_n^2 bereits größer als diejenige von V ist, so wird die weitere Rechnung sehr einfach. Dann ist nämlich $\overset{n}{P}_2$ bereits Null, also geht die erste (23) in

$$D_1 = \left(\frac{d\overset{n}{P}_1}{dt}\right)_0$$

und die erste (24) in

$$\overset{n+1}{P}_1 = -D_1$$

über; dann ist also

$$(25) \qquad \begin{cases} \overset{n+1}{P}_1 = -\left(\frac{d\overset{n}{P}_1}{dt}\right)_0, \\ \overline{V}_{n+1} = \overline{V}_n + \overset{n+1}{P}_1 A_{n+1}. \end{cases} \qquad (n \gtreqless \nu.)$$

Selbst wenn $\overline{V}_n$ bis $n = \nu$ einschließlich nach einer anderen Methode gefunden worden ist, kann man bequem die für ein beliebig großes n noch fehlenden Glieder mittels der Gleichungen (25) berechnen.

5. *Beispiele.* — Eine Klasse von symmetrischen Funktionen, auf die sich unsere Methode immer anwenden läßt, ist:

$$(26) \qquad V = \sum (a_1 a_2 \ldots a_r)^p,$$

worin r und p beliebige positive ganze Zahlen sind, denn die Bedingung (10), in welcher

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_r = p$$

zu setzen ist, wird hier erfüllt, weil für den Minimalwert r von n

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_r}{n+1} = \frac{r}{r+1} p < p$$

ist. Dieser Klasse gehört das Beispiel

$$(27) \qquad V = \sum (abc)^5$$

an, welches vollständig durchgeführt werden soll.

In diesem und den folgenden Beispielen bedeuten $A_1, A_2, \ldots A_n$ immer die Koeffizienten derjenigen Gleichung, für welche die symmetrische Funktion $V = \overline{V}_n$ gebildet wird. Tritt nun noch ein Element

hinzu und soll für diese $n+1$ Elemente dieselbe Funktion, also jetzt $\overline{V}_{n+1}$, ermittelt werden, so hat man, zum Zweck der Berechnung, α in $\overline{V}_n$ statt A geschrieben zu denken. Da aber nun wieder $\overset{n+1}{P_0}$ aus $\overline{V}_n$ hervorgeht, wenn die α darin durch A ersetzt werden, so bleibt $\overline{V}_n$ *formal* unverändert, und in diesem Sinne beginnen die Gleichungen in folgender Art:

$$\overline{V}_{n+1} = \overline{V}_n + \cdots$$

Für unser Beispiel ist zuerst $n = 3$ und

$$V = V_3 = \sum (abc)^5 = (abc)^5, \tag{28}$$

$$\overline{V}_3 = -A_3^5, \tag{29}$$

also

$$\overset{3}{P}_1 = \overset{3}{P}_2 = \overset{3}{P}_3 = \overset{3}{P}_4 = 0, \quad \overset{3}{P}_5 = -120,$$

folglich nach (23):

$$D_1 = D_2 = D_3 = 0, \quad D_4 = \frac{1}{24} A_{n-1} \overset{3}{P}_5 = -5A_2, \quad D_5 = 0;$$

$$E_2 = 0, \quad E_3 = \frac{1}{6} A_{n-1}^2 \overset{3}{P}_5 = -20A_2^2, \quad E_4 = \frac{1}{12} A_{n-2} \overset{3}{P}_5 = -10A_1,$$
$$E_5 = 0;$$
$$F_3 = A_{n-2} A_{n-1} \overset{3}{P}_5 = -120 A_1 A_2, \quad F_4 = \frac{1}{4} A_{n-3} \overset{3}{P}_5 = -30,$$
$$F_5 = 0; \quad G_4 = A_{-1} \overset{3}{P}_5 = 0, \quad G_5 = H_5 = 0.$$

Somit wird nach (24):

$$\left\{\begin{aligned} \overset{4}{P}_1 &= -D_4 A_3^3 = 5A_2A_3^3, \\ \overset{4}{P}_2 &= \sum_{k=2}^{4} (E_k - 2A_2 D_{k+1}) A_3^{k-2} = -10A_2^2A_3 - 10A_1A_3^2, \\ \overset{4}{P}_3 &= \sum_{k=3}^{4} (-F_k + 6A_2E_{k+1} + 6A_1D_{k+1}) A_3^{k-3} = 30A_1A_2 + 30A_3; \end{aligned}\right. \tag{30}$$

$\overset{4}{P}_h = 0$ für $h \geqq 4$ gemäß den Gleichungen (24), in Übereinstimmung damit, daß A_4^4 von der 16ten, also von größerer Dimension als V ist.

Daher haben wir nach (7):

$$\left\{\begin{aligned} \overline{V}_4 = \overline{V}_3 + \overset{4}{P}_1 A_4 + \frac{1}{2} \overset{4}{P}_2 A_4^2 + \frac{1}{6} \overset{4}{P}_3 A_4^3 &= -A_3^5 + 5A_2A_3^3A_4 \\ - 5(A_2^2 + A_1A_3)A_3A_4^2 &+ 5(A_1A_2 + A_2)A_4^3. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

[illegible]

(39) $V_8 = V_7 + \overset{8}{P}_1 A_8$ [illegible]

Von hier an wird die Rechnung sehr leicht, denn es lassen sich die Gleichungen (25) anwenden und wir erhalten

$$(40)\quad \begin{cases} \overset{9}{P}_1 = 5(A_1 A_2 A_3 - A_1^2 A_2^2 - A_1^3 A_3 \ldots \text{[illegible]} \\ \quad + 3 A_1 A_5 - A_6), \end{cases}$$

$$(41)\qquad V_9 = V_8 + \overset{9}{P}_1 A_9,$$

$$(42)\qquad \overset{10}{P}_1 = 5\{A_1^3 A_2 - 2 A_1 A_2^2 - 2 A_1^2 A_3 + 3 A_2 A_3 + 3 \ldots \text{[illegible]}\},$$

$$(43)\qquad V_{10} = V_9 + \overset{10}{P}_1 A_{10}.$$

hinzu und soll für diese ... $\overline{V}_{n+1}$, ermittelt werden, ... in $\overline{V}_n$ statt A geschri... hervorgeht, wenn di... *formal* unverändert, ... folgender Art:

$$\ldots - \ldots A_3 + A_2^2 - A_4\},$$

$$\ldots A_{11},$$

$$\ldots + A_3\},$$

$$\ldots A_{12},$$

$$\ldots - A_2\},$$

Für unser B...

$$\ldots - \overset{3}{P}_1 A_{13},$$

(28) $\ldots A_1,$

(29) $\ldots - \overset{4}{P}_1 A_{14},$

also

$$\ldots - \ldots,$$

$$\ldots - \overset{15}{P}_1 A_{15}.$$

folglich nach ...

$D_1 = \ldots$ ... Form von V_n nicht mehr. Hier läßt ... interessante Probe anstellen. Setzt ... $n = 3$ an bis $n = 15$

$E_2 = 0,$

$E_5 = 0;$ ... $= A_n = 1,$

$F_2 = A_n$ ... die Wurzeln der Gleichung:

$F_5 = 0;$ $\ldots x + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 0$

Somit w... Einheit mit Ausschluß von $x = 1$; ... Nachbar $n + 1$ prim gegen 5 ist, ... Wurzeln in anderer Reihenfolge,

(30) $\overset{4}{P}_1$ ... $\overset{4}{P}$ ... $\sum abc) = - A_3 = - 1.$

... 4, 9, 14. Für $n = 4$ ist

$\overset{4}{P}_4 =$ ... $= d^5 = 1,$

damit ... $= 4.$

... kommenden Wurzeln:

(3... $x = \cos\frac{k\pi}{5} \pm i \sin\frac{k\pi}{5}$ $(k = 1, 2, 3, 4),$

also ihre 5ten Potenzen viermal $+1$, fünfmal -1, folglich Wurzeln der Gleichung

$$(\xi-1)^4(\xi+1)^5=(\xi+1)(\xi^2-1)^4=\xi^9+\xi^8-4\xi^7-4\xi^6+\cdots=0,$$

daher, wenn sie als ξ_1, ξ_2, ξ_3 etc. bezeichnet werden,

$$V_n=\sum(abc)^5=\sum\xi_1\xi_2\xi_3=4. \tag{56}$$

Ist endlich $n=14$, so haben a^5, b^5, ... die Werte

$$\xi=\cos\frac{2k\pi}{3}\pm i\sin\frac{2k\pi}{3}. \qquad (k=1,2,\ldots,7)$$

Bezeichnen wir nun die beiden komplexen Kubikwurzeln der Einheit mit α_1 und α_2, so sind die ξ die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{aligned}(\xi-\alpha_1)^5(\xi-\alpha_2)^5(\xi-1)^4&=(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)\{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-1)\}^4\\&=(\xi^2+\xi+1)(\xi^3-1)^4=\xi^{14}+\xi^{13}+\xi^{12}-4\xi^{11}-\cdots=0,\end{aligned}$$

also

$$V_n=\sum(abc)^5=\sum(\xi_1\xi_2\xi_3)=4. \tag{57}$$

Wird aber in den Ausdrücken für V_n die Einheit an Stelle der A_1, A_2, $\cdots A_n$ gesetzt, so entsteht die *Summe der Koeffizienten.* Dieselbe ist also gemäß den Gleichungen (54) bis (57):

$$\begin{aligned}&=4 \text{ für } n=4 \text{ oder } 9 \text{ oder } 14,\\&=-1 \text{ für jedes andere } n,\end{aligned}$$

daher ist die *Summe der Koeffizienten in*

$$\overset{n}{P}_1+\tfrac{1}{2}\overset{n}{P}_2+\tfrac{1}{6}\overset{n}{P}_3+\cdots, \text{ d. i. in } \overline{V}_n-\overline{V}_{n-1}$$

$$=\begin{cases}5 \text{ für } n=4, 9, 14\\-5 \text{ für } n=5, 10, 15\\0 \text{ für jedes andere } n.\end{cases}$$

Mittels der Ausdrücke (30), (32), (34) etc. kann man sich von der Richtigkeit dieser Behauptungen leicht überzeugen. — Ähnliches gilt, wenn p in (26) gleich einer anderen Primzahl genommen wird, während für p als zusammengesetzte Zahl die Resultate sich komplizieren.[1])

[1]) Der Vollständigkeit wegen führen wir noch das sehr leichte Beispiel aus 1. $V=\Sigma a^3b^2$ zu Ende. Es war gefunden

$$\overline{V}_3=-A_1A_2^2+(2A_1^2+A_2)A_3$$

also $\overset{3}{P}_1=2A_1^2+A_2$; demgemäß nach Gleichung (25)

$$\overset{4}{P}_1=-\left(\frac{d\overset{3}{P}_1}{dt}\right)_0=-5A_1,\quad \overset{5}{P}_1=-\left(\frac{d\overset{4}{P}_1}{dt}\right)_0=+5$$

und daher

$$V=-A_1A_2^2+(2A_1^2+A_2)A_3-5A_1A_4+5A_5.$$

Folgendes Beispiel soll nur begonnen werden:

$$V = \sum a^8 b^7;$$

also ist:

$$V_2 = (a+b)(ab)^7, \quad \overline{V}_2 = -A_1 A_2^7,$$

daher:

$$\overset{2}{P}_1 = \overset{2}{P}_2 = \cdots = \overset{2}{P}_6 = 0, \quad \overset{2}{P}_7 = -A_1.$$

Unsere Formeln (23) reichen für den ersten Schritt nicht aus, da sie nur bis $\overset{n}{P}_5$ gehen und die Gleichungen (18) ebensowenig, da sie nur bis α_k^5 gehen; wir müssen also $\alpha_1 \alpha_2^7$ direkt differenzieren und zwar ein- bis fünfmal, da $\overline{V}_3$ von der Form

$$\overline{V}_3 = \overset{3}{P}_0 + \overset{3}{P}_1 A_3 + \tfrac{1}{2}\overset{3}{P}_2 A_3^2 + \tfrac{1}{6}\overset{3}{P}_3 A_3^3 + \tfrac{1}{24}\overset{3}{P}_4 A_3^4 + \tfrac{1}{120}\overset{3}{P}_5 A_3^5$$

ist, wobei $\overset{3}{P}_5$ konstant wird.

Nun ist

$$\alpha_2^7 = A_2^7 + 7A_2^6 t(A_1+t) + 21 A_2^5 t^2 (A_1+t)^2 + 35 A_2^4 t^3 (A_1^3 + 3A_1^2 t + 3A_1 t^2 + \cdots)$$
$$+ 35 A_2^3 t^4 (A_1^4 + 4A_1^3 t + \cdots) + 21 A_2^2 t^5 (A_1^5 + \cdots) + \text{etc.}$$

Dadurch findet man leicht

$$\left(\frac{d\alpha_2^7}{dt}\right)_0 = 7A_1 A_2^6; \quad \left(\frac{d^2\alpha_2^7}{dt^2}\right)_0 = 14(A_2^6 + 3A_1^2 A_2^5); \quad \left(\frac{d^3\alpha_2^7}{dt^3}\right)_0 = 42(6A_1 A_2^5 + 5A$$

$$\left(\frac{d^4\alpha_2^7}{dt^4}\right)_0 = 168(3A_2^5 + 15A_1^2 A_2^4 + 5A_1^4 A_2^3);$$

$$\left(\frac{d^5\alpha_2^7}{dt^5}\right)_0 = 840(15A_1 A_2^4 + 20A_1^3 A_2^3 + 3A_1^5 A_2^2),$$

und ferner, da $\alpha_1 = A_1 + t$ ist:

$$(58)\begin{cases} \left(\frac{d(\alpha_1\alpha_2^7)}{dt}\right)_0 = A_1\left(\frac{d\alpha_2^7}{dt}\right)_0 + A_2^7; \quad \left(\frac{d^2(\alpha_1\alpha_2^7)}{dt^2}\right)_0 = A_1\left(\frac{d^2\alpha_2^7}{dt^2}\right)_0 + 2\left(\frac{d\alpha_2^7}{dt}\right)_0; \\ \left(\frac{d^3(\alpha_1\alpha_2^7)}{dt^3}\right)_0 = A_1\left(\frac{d^3\alpha_2^7}{dt^3}\right)_0 + 3\left(\frac{d^2\alpha_2^7}{dt^2}\right)_0; \quad \left(\frac{d^4(\alpha_1\alpha_2^7)}{dt^4}\right)_0 = A_1\left(\frac{d^4\alpha_2^7}{dt^4}\right)_0 + 4\left(\frac{d^3\alpha_2^7}{dt^3}\right. \\ \left(\frac{d^5(\alpha_1\alpha_2^7)}{dt^5}\right)_0 = A_1\left(\frac{d^5\alpha_2^7}{dt^5}\right)_0 + 5\left(\frac{d^4\alpha_2^7}{dt^4}\right)_0. \end{cases}$$

Ordnen wir diese Ausdrücke nach Potenzen von A_n, d. i. A_2, so finden wir unmittelbar die Größen $D_k (k \gtreqless 1)$, $E_k (k \gtreqless 2)$, $F_k (k \gtreqless 3)$ etc. gemäß der durch (21) angegebenen Bedeutung derselben, und zwar:

$$(59)\begin{cases} D_1 = D_2 = D_3 = 0,\ D_4 = 0, & D_5 = 0, & D_6 = -\ 7A_1^2, & D_7 = - \\ E_2 = E_3 = 0,\ E_4 = 0, & E_5 = -42A_1^3, & E_6 = -28A_1, & E_7 = \\ F_3 = 0,\ F_4 = -210A_1^4, & F_5 = -378A_1^2, & F_6 = -42, & F_7 = \\ G_4 = -3360A_1^3, & G_5 = -1512A_1, & G_6 = 0, & G_7 = \\ & H_5 = -2520, & H_6 = 0, & H_7 = \end{cases}$$

können wir die Gleichungen (24) anwenden und erhalten ...en:

$$-A_1A_2^7,\ \overset{3}{P}_1=(7A_1^2+A_2)A_2^5,\ \tfrac{1}{2}\overset{3}{P}_2=-(14A_1^2+13A_2)A_1A_2^3,$$
$$=(7A_1^4+30A_1^2A_2+6A_2^2)A_2,\ \tfrac{1}{24}\overset{3}{P}_4=-(9A_1^2+19A_2)A_1,$$
$$\overset{3}{P}_5=3.$$

r ist nun $n=3$ zu setzen, und es wird:

$$V_{n+1}=V_4=V_3+\overset{4}{P}_1A_4+\tfrac{1}{2}\overset{4}{P}_2A_4^2+\tfrac{1}{6}\overset{4}{P}_3A_4^3.$$

...an muß nun folgende Differentiationen ausführen:

$$\left(\frac{d\overset{3}{P}_k}{dt}\right)_0 \ (k=1,2,3,4,5), \qquad \left(\frac{d^2\overset{3}{P}_k}{dt^2}\right)_0 \ (k=2,3,4,5), \qquad \left(\frac{d^3\overset{3}{P}_k}{dt^3}\right)_0 \ (k=3,4,5),$$

findet dann mittels (23) die neuen D_1 bis D_4, E_2 bis E_4, F_3 und F_4, während D_5, E_5, F_5 und die anderen Größen verschwinden, und dann wieder mittels (24) folgende Werte:

$$\overset{4}{P}_1=-(7A_1^2-6A_2)A_1A_2^4+(21A_1^4+4A_1^2A_2-5A_2^2)A_2^2A_3$$
$$-(7A_1^4+52A_1^2A_2+2A_2^2)A_1A_3^2+(46A_1^2+4A_2)A_3^3;$$
$$\tfrac{1}{2}\overset{4}{P}_2=-(7A_1^4-2A_1^2A_2+10A_2^2)A_1A_2+(29A_1^4+26A_1^2A_2+6A_2^2)A_3$$
$$-50A_1A_3^2;$$
$$\tfrac{1}{6}\overset{4}{P}_3=-22A_1^3+4A_1A_2+13A_3.$$

Die folgenden Entwicklungen (für $n>5$ bis $n=15$) sind genau nach der Art und Weise des vorigen Beispiels auszuführen, was hier jedoch unterbleiben soll.

6. *Ausgeschlossener Fall.* — Fügt sich q, das ist die größte in $\frac{p_1+p_2+\cdots+p_r}{n+1}$ enthaltene ganze Zahl, nicht der Bedingung (10), ist also

$$q \gtreqless p_r, \tag{61}$$

so sind die Darstellungen von V_{n+1} durch die Koeffizienten der Gleichung (5) auf Grund der Darstellung von V_n durch die Koeffizienten der Gleichung (3) umständlicher, weil eine oder mehrere Hilfsfunktionen, aber, wie wir sehen werden, *meistens nur unvollständig*, zu entwickeln sind. Wir wollen diejenigen Fälle, in denen die Bedingung (10) gilt, als die *fügsamen*, diejenigen, bei denen die Beziehung (61) an deren Stelle tritt, als die *unfügsamen* bezeichnen und uns zur Besprechung der letzteren wenden.

Wenn (61) besteht, können mehrere der Zahlen $p_r, p_{r-1}, p_{r-2}, \cdots$ kleiner als oder gleich q sein; eine derselben greifen wir heraus und nennen sie ϱ. Wir setzen nun die rechten Seiten der Gleichungen (7) und (9) einander gleich, wodurch wir erhalten:

$$(62)\qquad \overset{n+1}{P_0} + \overset{n+1}{P_1} A_{n+1} + \tfrac{1}{2} \overset{n+1}{P_2} A^2_{n+1} + \cdots + \frac{1}{q!} \overset{n+1}{P_q} A^q_{n+1}$$
$$= \overline{V}_n + \sum_{i=r}^{1} t^{p_i} f_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n).$$

Diese Gleichung differenzieren wir σmal ($\sigma \leqq q$) nach A_{n+1} und setzen dann A_{n+1} und t gleich Null, so kommt:

$$(63)\qquad \overset{n+1}{P_\sigma} = \left(\frac{d^\sigma V_n}{d A^\sigma_{n+1}}\right)_0 + \sum_{i=r}^{1} \left\{\frac{d^\sigma}{d A^\sigma_{n+1}} (t^{p_i} f_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n))\right\}_0 .$$

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung wird erhalten, wenn man die Größen D_k, E_k etc. wie bisher aus den Gleichungen (23) berechnet und ihre Werte in die Gleichungen (24) einsetzt, nachdem auf deren linken Seiten $\overset{n+1}{P_1}$, $\overset{n+1}{P_2}$ etc. durch $\left(\frac{d \overline{V}_n}{d A_{n+1}}\right)_0$, bezw. $\left(\frac{d^2 \overline{V}_n}{d A^2_{n+1}}\right)_0$ etc. ersetzt worden sind. Die Glieder der Summe, für welche $p_i > \sigma$ ist, verschwinden, diejenigen, für welche $p_i \gtreqless \sigma$ ist, verschwinden nicht; eines der letzteren p_i sei ϱ, so daß

$$(64)\qquad q \geqq \sigma \geqq \varrho$$

ist, und der Koeffizient von t^ϱ werde mit $\overline{W}_n$ bezeichnet. Dann ist der in (63) auftretende Differentialquotient von $t^\varrho \overline{W}_n$ zu bestimmen. Derselbe ist nach bekannter Formel aus denen von t^ϱ und von $\overline{W}_n$ zusammenzusetzen. Ist nun die Entwicklung:

$$(65)\qquad \overline{W}_{n+1} = \overset{n+1}{Q_0} + \overset{n+1}{Q_1} A_{n+1} + \frac{1}{2!} \overset{n+1}{Q_2} A^2_{n+1} + \frac{1}{3!} \overset{n+1}{Q_3} A^3_{n+1} + \cdots$$

bekannt, worin die $\overset{n+1}{Q_k}$ eine den $\overset{n+1}{P_k}$ in (7) entsprechende Bedeutung haben, so ist (s. (10) und (11)):

$$(\overline{W}_n)_0 = \overset{n+1}{Q_0}, \left(\frac{d^k \overline{W}_n}{d A^k_{n+1}}\right)_0 = \overset{n+1}{Q_k}$$

und daher

$$(66)\qquad \left(\frac{d^\sigma (t^\varrho \overline{W}_n)}{d A^\sigma_{n+1}}\right)_0 = \left(\frac{d^\sigma (t^\varrho)}{d A^\sigma_{n+1}}\right)_0 \overline{W}_n + (\sigma)_1 \left(\frac{d^{\sigma-1}(t^\varrho)}{d A^{\sigma-1}_{n+1}}\right)_0 \overset{n+1}{Q_1}$$
$$+ (\sigma)_2 \left(\frac{d^{\sigma-2}(t^\varrho)}{d A^{\sigma-2}_{n+1}}\right)_0 \overset{n+1}{Q_2} + \cdots + (\sigma)_{\sigma-\varrho} \left(\frac{d^\varrho (t^\varrho)}{d A^\varrho_{n+1}}\right)_0 \overset{n+1}{Q_{\sigma-\varrho}},$$

worin die Differentialquotienten von t^ϱ in bekannter Art (vergl. (16) und nachfolgenden Text!) und mit Hilfe der Gleichung (21) zu bilden sind, z. B.

$$(67) \qquad \left(\frac{d^2(t^2)}{d A_{n+1}^2}\right)_0 = 2\left(\frac{d\left(t\frac{dt}{dA_{n+1}}\right)}{dA_{n+1}}\right)_0 = 2\left(\frac{dt}{dA_{n+1}}\right)_0^2 = \frac{2}{A_n^2}$$

und überhaupt

$$(68) \qquad \left(\frac{d^\varrho(t^\varrho)}{d A_{n+1}^\varrho}\right)_0 = \varrho!\,\frac{(-1)^\varrho}{A_n^\varrho}.$$

Die Funktion W, deren Entwickelungskoeffizienten $\overset{n+1}{Q_k}$ mit diesen Differentialquotienten multipliziert sind, nennen wir *Hilfsfunktion*; sie braucht nicht vollständig berechnet zu werden, einmal weil nicht alle $\overset{n+1}{Q_k}$ von $k=0$ bis $k=q$ erforderlich sind, und zweitens, weil in den Produkten $\left(\frac{d^{\sigma-k}(t^\varrho)}{d A_{n+1}^{\sigma-k}}\right)_0 \overset{n+1}{Q_k}$, deren erster Faktor nach negativen Potenzen von A_n, und deren zweiter Faktor nach positiven Potenzen von A_n fortschreitet, nur die *ganze* Funktion von A_n beibehalten werden darf, da bei der Berechnung von $\left(\frac{d^\sigma \bar{V}_n}{d A_{n+1}^\sigma}\right)_0$ in der oben angegebenen Art dies auch geschehen ist. (Vergl. 2. hinter Gleichung (22)). *Hierdurch wird die Rechnung oft wesentlich verkürzt*, was durch die nachfolgenden Beispiele leichter als durch allgemeine Darlegungen veranschaulicht werden wird. Dabei kommt als günstiger Umstand hinzu, daß zur Berechnung von $\overset{n+1}{P_k}$ nur *die* $\overset{n}{P_h}$, für welche $h \gtreqless k$, nötig sind, zur Berechnung von $\overset{n+1}{D_k}$ (mit ausnahmsweiser Benutzung dieser Bezeichnung) nur $\overset{n}{D_h}$, wo $h \gtreqless k$ etc.

Mit wachsendem n verkleinert sich q; es werden also immer weniger von den Exponenten $p_r, p_{r-1}, p_{r-2}, \cdots$ kleiner als q sein und daher nach und nach immer weniger Glieder unter dem Summenzeichen in (63) zurückbleiben, bis die Summe ganz fortfällt; *auch die Hilfsfunktionen $f_i(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ sind nur bis zu demjenigen n, für welches noch $p_i \leqq q$ ist, zu berechnen.* Ist allerdings $p_r = 1$, so bleibt dies Glied der Summe während der ganzen Rechnung bestehen, und ist die Hilfsfunktion W_n, deren Faktor t ist, vollständig zu entwickeln. Doch soll eine auch in *diesem* Falle bei einem gewissen n beginnende Erleichterung der Rechnung, die durch Gleichungen analog den Gleichungen (25) in den fügsamen Fällen charakterisiert ist, nicht unerwähnt bleiben. Man gelangt nämlich bei fortgesetzter Rechnung immer zu einem n $(n=\nu)$

derart, daß der Grad (das Gewicht) von V_n kleiner als $2n$, also kleiner als das Gewicht von A_n^2 ist. Dann haben nur noch $\overset{\nu+1}{P_1}$, $\overset{\nu+2}{P_1}$, $\overset{\nu+3}{P_1}$, etc. von Null verschiedene Werte; folglich ist die Gleichung (63) nur für $\sigma = 1$ anzuwenden und geht, da alle Glieder der Summe, für welche $p_i > 1$ ist, verschwunden sind, in

$$\overset{n+1}{P_1} = \left(\frac{d\overline{V}_n}{dA_{n+1}}\right)_0 + \left(\frac{dt}{dA_{n+1}}\right)_0 \overline{W}_n \tag{69}$$

über. Nun ist aber, gemäß oben angegebener Rechnungsart

$$\left(\frac{d\overline{V}_n}{dA_{n+1}}\right)_0 = -\sum_{k=1} D_k A_n^{k-1}$$

und nach (23), da $P_{k>1}$ gleich Null:

$$D_1 = \left(\frac{d\overset{n}{P_1}}{dt}\right)_0, \quad D_{k>1} = 0;$$

ferner ist auch, da W von geringerem Gewicht als V ist, $\overset{n}{Q_2}$ etc. schon verschwunden, also wird schließlich

$$\overset{n+1}{P_1} = -\left(\left(\frac{d\overset{n}{P_1}}{dt}\right)_0 + \overset{n}{Q_1}\right). \qquad (n \gtreqless \nu). \tag{70}$$

7. *Beispiele.* — Die folgenden Beispiele gehören den unfügsamen Fällen an. Zugleich wird gezeigt, wie man sich in praxi die Tabellen von *Meyer Hirsch* und *Faà di Bruno*, welche alle symmetrischen Funktionen von der Form $\sum a^{p_1} b^{p_2} c^{p_3} \cdots$ bis zum Gewichte 10, bezw. 11 einschließlich enthalten, nutzbar machen kann, wenn das Gewicht der vorgelegten Funktion größer als 11 ist. Wir bedienen uns dazu eines Kunstgriffs, der am bequemsten an den Beispielen selbst erläutert wird.

Sei als Beispiel $V = \sum a^5 b^4 c^3 d^2$ vorgelegt. Wir können $\overline{V}_4$ direkt durch die genannten Tabellen erhalten, wenn wir

$$\overline{V}_4 = A_4 \sum a^4 b^3 c^2 d$$

setzen, da die Summe eine symmetrische Funktion vom Gewicht 10 ist. *Wir können mittels der Tabellen aber auch* $\overline{V}_5$ *erhalten.* Wir setzen nämlich

$$x = \frac{A_5}{\xi}, \quad a = \frac{A_5}{\alpha}, \quad b = \frac{A_5}{\beta}, \cdots, e = \frac{A_5}{\varepsilon}\,^{1)}; \tag{71}$$

dann wird aus der Gleichung

$$x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 + A_3 x^2 + A_4 x + A_5 = 0 \tag{72}$$

1) Statt $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ sind bei *Bruno* die Bezeichnungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ gebraucht.

diese:

(73) $$\xi^5 + a_1\xi^4 + a_2\xi^3 + a_3\xi^2 + a_4\xi + a_5 = 0,$$

wobei

(74) $$a_1 = A_4,\ a_2 = A_5A_3,\ a_3 = A_5^2A_2,\ a_4 = A_5^3A_1,\ a_5 = A_5^4,\ a_{i(i>5)} = 0.$$

Wegen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = -a_5 = -A_5^4$ ist:

$$-A_5^6a^5b^4c^3d^2 = -\frac{A_5^{20}}{\alpha^5\beta^4\gamma^3\delta^2} = \frac{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)^5}{\alpha^5\beta^4\gamma^3\delta^2} = \beta\gamma^2\delta^3\varepsilon^5,$$

also $-A_5^6 V_5 = \sum\beta\gamma^2\delta^3\varepsilon^5$ oder in gebräuchlicher Schreibart

(74) $$-A_5^6 V_5 = \sum\alpha^5\beta^3\gamma^2\delta.$$

Die rechts stehende Funktion ist vom 11. Grade, findet sich also bei *Bruno* und hat unter Fortlassung der in $a_6,\ a_7,\ \cdots a_{11}$ multiplizierten Glieder den Wert:

(76) $$\sum\alpha^5\beta^3\gamma^2\delta = -a_1^2a_2a_3a_4 + 3a_1^3a_4^2 + 3a_1^2a_2^2a_5 + 2a_2^2a_3a_4 + a_1a_3^2a_4$$
$$-8a_1a_2a_4^2 + 2a_3a_4^2 - 4a_1^3a_3a_5 - 6a_2^3a_5 + 7a_1a_2a_3a_5 - 6a_3^2a_5 - 2a_1^2a_4a_5$$
$$+ 18a_2a_4a_5 - 9a_1a_5^2 - 7a_1^2a_2a_6 + \cdots$$

Setzt man hierin für $a_1, \cdots a_5$ ihre Werte aus (74) ein, so erhält man, nach beiderseitiger Forthebung des Faktors $(-A_5^6)$ den Wert von $\bar{V}_5$:

(77) $$\bar{V}_5 = \bar{V}_4 + \overset{5}{P}_1A_5 + \tfrac{1}{2}\overset{5}{P}_2A_5^2,$$

wobei

(78) $$\begin{cases} \bar{V}_4 = (A_1A_2A_3 - 3A_3^2)A_4^2 - (3A_1^2 - 4A_2)A_4^3; \\ \overset{5}{P}_1 = -2A_1A_2A_3^2 + 6A_3^3 + (8A_1^2A_3 - A_1A_2^2 - 7A_2A_3)A_4 + 2A_1A_4^2; \\ \tfrac{1}{2}\overset{5}{P}_2 = -2A_1^2A_2 + 6A_2^2 - 18A_1A_3 + 9A_4. \end{cases}$$

Für die Werte $n = 5$ und 6 wird die Größe q in (10) beziehungsweise $= [\frac{14}{6}]$ und $[\frac{14}{7}]$, d. i. beide male $= 2$; somit ist die Bedingung (10) für diese Werte von n nicht erfüllt, und wir bedürfen einer Hilfsfunktion, von der wir jedoch so wenig wie möglich berechnen wollen. Sie ist:

(79) $$W = \sum a^5b^4c^3$$

und

$$\bar{V}_{n+1} = V_n + t^2 W_n,$$

ferner, gemäß (63) mit $r = 1$:

(80) $$\overset{n+1}{P}_\sigma = \left(\frac{d^\sigma \bar{V}_n}{dA_{n+1}^\sigma}\right)_0 + \left(\frac{d^\sigma(t^2W_n)}{dA_{n+1}^\sigma}\right)_0.$$

Für $\sigma = 1$ verschwindet der zweite Summand auf der rechten Seite, für $\sigma = 2$ ist nach (67)

$$\left(\frac{d^2 t^2}{d A_{n+1}^2}\right)_0 = \frac{2}{A_n^2}$$

und daher, wenn wir

$$\overline{W}_n = \overset{n}{Q}_0 + \overset{n}{Q}_1 A_n + \tfrac{1}{2}\overset{n}{Q}_2 A_n^2 + \tfrac{1}{6}\overset{n}{Q}_3 A_n^3$$

setzen, nach (66) und den Anweisungen der Nr. 6:

$$\left(\frac{d^2(t^2 W_n)}{d A_{n+1}^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2 t^2}{d A_{n+1}^2}\right)_0 \overline{W}_n = \overset{n}{Q}_2 + \tfrac{1}{3}\overset{n}{Q}_3 A_n. \tag{81}$$

Also ist nach (80) für $n \overline{\gtrless} 5$:

$$\overset{n+1}{P}_1 = \left(\frac{d \bar{V}_n}{d A_{n+1}}\right)_0, \tag{82}$$

$$\overset{n+1}{P}_2 = \left(\frac{d^2 \bar{V}_n}{d A_{n+1}^2}\right)_0 + \overset{n}{Q}_2. \tag{83}$$

Nun ist W vom Gewicht 12, also direkt nicht in den Tabellen enthalten, aber für die Gleichung vierten Grades vermöge der Substitution $x = A_4/\xi$ nach der vorhin entwickelten, durch die Gleichungen (71) ff. dargestellten Methode herstellbar, und zwar

$$(84)\begin{cases} \overline{W}_4 = \overset{4}{Q}_0 + \overset{4}{Q}_1 A_4 + \tfrac{1}{2}\overset{4}{Q}_2 A_4^2 + \tfrac{1}{6}\overset{4}{Q}_3 A_4^3, \\ \overset{4}{Q}_0 = A_1 A_2 A_3^3 - 3 A_3^4;\ \overset{4}{Q}_1 = -3 A_1 A_2^2 A_3 - A_1^2 A_3^2 + 11 A_2 A_3^2; \\ \tfrac{1}{2}\overset{4}{Q}_2 = 5 A_1^2 A_2 - 10 A_1 A_3 - 4 A_2^2;\ \tfrac{1}{6}\overset{4}{Q}_3 = 8. \end{cases}$$

Von diesen Ausdrücken bedürfen wir zur weiteren Rechnung nur der beiden letzten, und es ist nach den Formeln (23) und (24) mit $n = 4$:

$$E_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 \overset{4}{Q}_2}{d t^2}\right)_0 + A_2 \overset{4}{Q}_3 = 2 A_1^2 + 22 A_2,\ D_3 = 0,$$

$$\overset{5}{Q}_2 = 2 A_1^2 + 22 A_2; \tag{85}$$

und ebenso das neue E_2:

$$E_2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 \overset{5}{Q}_2}{d t^2}\right) = 24,$$

$$\overset{6}{Q}_2 = 24. \tag{86}$$

Die Differentialquotienten $\left(\frac{d V_n}{d A_{n+1}}\right)_0$ und $\left(\frac{d^2 \overline{V}_n}{d A_{n+1}^2}\right)_0$ werden (siehe 6.) ebenfalls nach den Formeln (23) und (24) berechnet. So entstehen

$$\left(\frac{d \bar{V}_5}{d A_6}\right)_0 = 5 A_1 A_2^2 A_3 - (6 A_1^2 + 9 A_2) A_3^2 + (23 A_1 A_3 - 2 A_1^2 A_2 - 4 A_2^2) -$$
$$- 20 A_4^2 + (10 A_1 A_2 + 2 A_1^3 + 9 A_3) A_5,\quad \left(\frac{d^2 \bar{V}_5}{d A_6^2}\right)_0 = 2 A_2 - 36.$$

Somit nach (81), (82), (83) und (85):

$$(87)\begin{cases} \overset{6}{P}_1 = 5A_1A_2^2A_3 - (6A_1^2 + 9A_2)A_3^2 + (23A_1A_3 - 2A_1^3A_2 - 4A_2^2)A_4 \\ - 20A_4^2 + (10A_1A_2 + 2A_1^3 + 9A_3)A_5, \\ \frac{1}{2}\overset{6}{P}_2 = 12A_2 - 17A_1^2; \qquad \bar{V}_6 = \bar{V}_5 + \overset{6}{P}_1A_6 + \frac{1}{2}\overset{6}{P}_2A_6^2 \end{cases}$$

und in gleicher Art mit Hilfe von (86)

$$(88)\begin{cases} \overset{7}{P}_1 = -5A_1A_2^3 + (4A_1^3A_2 + 17A_2^2)A_3 - 2A_1A_3^2 \\ - (21A_1A_2 - 8A_3)A_4 + (18A_1^2 - 43A_2)A_5 + 22A_1A_6; \\ \frac{1}{2}\overset{7}{P}_2 = 7; \quad \bar{V}_7 = \bar{V}_6 + \overset{7}{P}_1A_7 + \frac{1}{2}\overset{7}{P}_2A_7^2. \end{cases}$$

Von hier an bleibt W_n unberücksichtigt, da $\overset{n}{Q}_2$ für $n \geqq 7$ verschwindet, (ebenso auch $\overset{n}{P}_2$ für $n \geqq 8$), und wir erhalten in gleicher Art, wie bei den fügsamen Fällen, folgende Resultate[1]):

$$(89)\begin{cases} \overset{8}{P}_1 = (11A_1^2 - 12A_2)A_2^2 - (4A_1^3 + 17A_1A_2)A_3 - 6A_3^2 \\ \qquad + (3A_1^2 + 56A_2)A_4 - 15A_1A_5 - 36A_6; \\ \overset{9}{P}_1 = (31A_1A_2 - 18A_1^3)A_2 + (26A_1^2 - 27A_2)A_3 - 47A_1A_4 + 51A_5; \\ \overset{10}{P}_1 = 18A_1^4 - 34A_1^2A_2 + 22A_1A_3 - 4A_2^2 - 4A_4; \\ \overset{11}{P}_1 = -38A_1^3 + 54A_1A_2 - 18A_3; \quad \overset{12}{P}_1 = 60A_1^2 - 36A_2; \\ \overset{13}{P}_1 = -84A_1; \quad \overset{14}{P}_1 = 84. \end{cases}$$

Und $\bar{V}$, d. h. $\bar{V}_n$ für beliebiges n, erhält den Wert

$$(90) \qquad \bar{V} = \bar{V}_7 + \overset{8}{P}_1A_8 + \overset{9}{P}_1A_9 + \cdots + \overset{14}{P}_1A_{14}.\text{[2]})$$

---

1) Von $\overset{9}{P}_1$ an treten bei der Berechnung die Gleichungen (25) in Kraft.

2) Ursprünglich hatte ich die Absicht, noch andere instruktive Beispiele und zwar $\sum(abc)^5d$, $\sum(abc)^3(de)^2$, $\sum a^5b^4c^3d^2e$ hier folgen zu lassen, doch verbietet mir die Rücksicht auf den schon sehr in Anspruch genommenen Raum des *Archivs* die Ausführung derselben. Nur sei noch die Mitteilung des Resultats für

$$V = \sum a^5b^4c^3d^2e$$

gestattet.

$$\begin{cases} V_5 = \overset{5}{P}_1A_5 + \frac{1}{2}\overset{5}{P}_2A_5^2 + \frac{1}{6}\overset{5}{P}_3A_5^3; \\ \overset{5}{P}_1 = (-A_1A_2A_3 + 3A_3^2)A_4 + (3A_1^2 - 4A_2)A_4^2, \\ \frac{1}{2}\overset{5}{P}_2 = 3A_1A_2^2 - 4A_1^2A_3 - 5A_2A_3, \qquad \frac{1}{6}\overset{5}{P}_3 = 5. \end{cases}$$

Zum Schluß lösen wir, des Vergleichs wegen, zwei bereits von Serret[1]) behandelte Aufgaben.

$$1)\quad V = \sum (a_1 a_2 \dots a_\mu)^2$$

und

$$2)\quad V = \sum (a_1 a_2 \dots a_\mu)^2 a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\nu}.$$

Ad 1) Für $n = \mu$ ist

$$\overline{V}_n = \overline{V}_\mu = A_\mu^2.$$

Dann ist

$$\overline{V}_{\mu+1} = A_\mu^2 + \overset{\mu+1}{P}_1 A_{\mu+1},$$

während $A_{\mu+1}^2$ von höherem Grade als V ist, also nicht mehr vorkommt. Nunmehr ist nach (12), (21) und (18)

$$\overset{\mu+1}{P}_1 = \left(\frac{d\overline{V}_\mu}{dt}\right)_0 \cdot \left(\frac{dt}{dA_{\mu+1}}\right)_0 = -2A_{\mu-1};$$

$$\begin{cases} \overline{V}_6 = \overline{V}_5 + \overset{6}{P}_1 A_6 + \tfrac{1}{2}\overset{6}{P}_2 A_6^2; \\ \overset{6}{P}_1 = (3A_1A_2 - 9A_3)A_3^2 - (4A_1A_2^2 + 5A_1^2A_3 - 20A_2A_3)A_4 - 4A_1A_4^2 \\ \qquad + (31A_1A_3 - 4A_2^2 - 24A_4)A_5; \\ \tfrac{1}{2}\overset{6}{P}_2 = 5A_1^3 - 24A_1A_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{V}_7 = V_6 + \overset{7}{P}_1 A_7 + \tfrac{1}{2}\overset{7}{P}_2 A_7^2; \\ \overset{7}{P}_1 = (8A_1^2 + 13A_2)A_3^2 - 7A_1A_2^2A_3 + (15A_1^2A_2 - 8A_2^2 - 56A_1A_3)A_4 + 48A_4^2 \\ \qquad + (15A_1A_2 - 12A_1^3 - 16A_3)A_5 + (26A_1^2 + 12A_2)A_6; \\ \tfrac{1}{2}\overset{7}{P}_2 = -31A_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{V}_8 = \overline{V}_7 + \overset{8}{P}_1 A_8; \\ \overset{8}{P}_1 = 12A_1A_2^3 - (21A_1^2A_2 + 28A_2^2)A_3 + 29A_1A_3^2 + (48A_1A_2 - 8A_1^3 - 32A_3)A_4 \\ \qquad - (23A_1^2 - 32A_2)A_5 - 24A_1A_6 + 24A_7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{9}{P}_1 = (-26A_1^2 + 28A_2)A_2^2 + (28A_1^3 + 9A_1A_2)A_3 + 9A_3^2 - (19A_1^2 + 104A_2)A_4 \\ \qquad + 58A_1A_5 + 36A_6; \\ \overset{10}{P}_1 = -72A_1A_2^2 + 42A_1^3A_2 - 100A_1^2A_3 + 136A_1A_4 + 104A_2A_3 - 140A_5; \\ \overset{11}{P}_1 = -60A_1^4 + 152A_1^2A_2 - 62A_1A_3 - 28A_2^2 + 8A_4; \\ \overset{12}{P}_1 = 126A_1^3 - 240A_1A_2 + 72A_3; \quad \overset{13}{P}_1 = -198A_1^2 + 204A_2; \\ \overset{14}{P}_1 = 276A_1; \quad \overset{15}{P}_1 = -360; \\ \overline{\overline{V}} = \overline{\overline{V}}_8 + \overset{9}{P}_1 A_9 + \overset{10}{P}_1 A_{10} + \cdots + \overset{15}{P}_1 A_{15}. \end{cases}$$

1) Algèbre supér. I § 176.

und von nun an lassen sich die Gleichungen (25) anwenden, welche uns geben:

$$\overset{\mu+2}{P_1} = -\left(\frac{d\overset{\mu+1}{P_1}}{dt}\right)_0 = 2A_{\mu-2}, \quad \overset{\mu+3}{P_1} = -2A_{\mu-3} \text{ etc.}$$

und

$$(91) \quad V = A_\mu^2 - 2A_{\mu-1}A_{\mu+1} + 2A_{\mu-2}A_{\mu+2} - 2A_{\mu-3}A_{\mu+3} \pm \cdots$$

bis die Reihe, bevor der erste Faktor des Produktes $A_{\mu-k}A_{\mu+k}$ einen negativen Index erhält und deshalb verschwindet, abbricht.

Ad 2). Die vorgelegte Funktion gehört zu den „unfügsamen Fällen", wir bedürfen also bei der Lösung einer Hilfsfunktion. Ferner ist n mindestens gleich $\mu + \nu$, der Grad von V ist $2\mu + \nu$, also kleiner als $2n$, daher tritt von vornherein die Gleichung (70) in Kraft.

Sei zuerst $\nu = 1$, $V^{(1)} = \sum (a_1 \ldots a_\mu)^2 a_{\mu+1}$; dann ist für $n = \mu + 1$:

$$(92) \qquad \overline{V}^{(1)}_{\mu+1} = (-1)^\mu A_\mu (-1)^{\mu+1} A_{\mu+1} = -A_\mu A_{\mu+1},$$

also

$$\overset{n}{P_1} = -A_\mu,$$

und die Hilfsfunktion ist hier

$$(93) \qquad W_n = W_{\mu+1} = \sum_{(\mu+1)} (a_1 a_2 \ldots a_\mu)^2,$$

also

$$(94) \qquad \overline{W}_{\mu+1} = A_\mu^2 - 2A_{\mu-1}A_{\mu+1},$$

demgemäß nach (70)

$$\overset{n+1}{P_1} = \overset{\mu+2}{P_1} = +\left(\frac{d\alpha_\mu}{dt}\right)_0 \frac{A_\mu^2 - 2A_{\mu-1}A_{\mu+1}}{A_{\mu+1}},$$

also, unter Fortlassung von $\dfrac{A_\mu^2}{A_{\mu+1}}$:

$$\overset{\mu+2}{P_1} = +3A_{\mu-1}.$$

Für $n = \mu + 2$ folgt ebenso

$$W_n = W_{\mu+2} = \sum_{(\mu+2)} (a_1 \ldots a_\mu)^2,$$

$$\overline{W}_{\mu+2} = A_\mu^2 - 2A_{\mu-1}A_{\mu+1} + 2A_{\mu-2}A_{\mu+2},$$

und dann

$$\overset{\mu+3}{P_1} = -5A_{\mu-2};$$

in gleicher Art erhalten wir allgemein

$$(95) \quad \begin{aligned} \overline{V}^{(1)}_{\mu+1+\varrho} = {} & -A_\mu A_{\mu+1} + 3A_{\mu-1}A_{\mu+2} - 5A_{\mu-2}A_{\mu+3} \pm \cdots \\ & + (-1)^{\varrho+1}(2\varrho+1)A_{\mu-\varrho}A_{\mu+\varrho+1}. \end{aligned}$$

Nunmehr ist $\nu = 2$ zu nehmen; dabei wird die eben in (95) entwickelte Funktion zur Hilfsfunktion W, und es kommt, nachdem zuerst $n = \mu + 2$, $\overline{V}_n = + A_\mu A_{\mu+2}$ entwickelt worden, in gleicher Art ohne jede Schwierigkeit:

$$(96)\qquad V^{(2)}_{\mu+2+\varrho} = A_\mu A_{\mu+2} - 4A_{\mu-1}A_{\mu+3} \pm \cdots.$$

Aus den Gleichungen (95) und (96) schließen wir per analogiam auf die allgemeine Form:

$$V^{(\nu)}_{\mu+\nu+\varrho} = \sum (a_1 \ldots a_\mu)^2 a_{\mu+1} \ldots a_{\mu+\nu}$$

$$(97)\qquad = (-1)^\nu \{A_\mu A_{\mu+\nu} - \overset{\nu}{p}_1 A_{\mu-1} A_{\mu+\nu+1} + \overset{\nu}{p}_2 A_{\mu-2} A_{\mu+\nu+2} \mp \cdots + (-1)^\varrho \overset{\nu}{p}_\varrho A_{\mu-\varrho} A_{\mu+\varrho+\nu}\}.$$

Darin sind die p unbekannte Konstanten, von denen wir nur wissen, daß

$$(98)\qquad \overset{\nu}{p}_0 = 1,\quad \overset{1}{p}_\varrho = 2\varrho + 1$$

ist. Die Hilfsfunktion ist

$$W_n = \sum_{(n)} (a_1 \ldots a_\mu)^2 a_{\mu+1} \ldots a_{\mu+\nu-1},$$

worin:

$$(99)\qquad n = \mu + \nu + \varrho.$$

Um $\overline{W}_n$ aus (97) zu erhalten, haben wir $\nu - 1$ statt ν zu setzen, aber da n denselben Wert behalten muß, $\varrho + 1$ statt ϱ; also wird:

$$(100)\qquad \overline{W}_n = (-1)^{\nu-1} \{A_\mu A_{\mu+\nu-1} - \overset{\nu-1}{p}_1 A_{\mu-1} A_{\mu+\nu} \pm \cdots + (-1)^{\varrho+1} \overset{\nu-1}{p}_{\varrho+1} A_{\mu-\varrho-1} A_{\mu+\nu+\varrho}\}.$$

Aus (97) entnehmen wir

$$(101)\qquad \overset{n}{P}_1 = (-1)^{\nu+\varrho} \overset{\nu}{p}_\varrho A_{\mu-\varrho},$$

daher wird nach (70)

$$(102)\qquad \overset{n+1}{P}_1 = (-1)^{\nu+\varrho+1} A_{\mu-\varrho-1} (\overset{\nu}{p}_\varrho + \overset{\nu-1}{p}_{\varrho+1});$$

setzen wir aber in (101) $\varrho + 1$ statt ϱ, um n in $n + 1$ übergehen zu lassen, so folgt ein Ausdruck derselben Form, wodurch die Richtigkeit der Annahme (97) erwiesen ist, und gleichzeitig durch Vergleich mit (102) die Gleichung

$$\overset{\nu}{p}_{\varrho+1} = \overset{\nu}{p}_\varrho + \overset{\nu-1}{p}_{\varrho+1},$$

oder

$$(103)\qquad \overset{\nu}{p}_\varrho - \overset{\nu}{p}_{\varrho-1} = \overset{\nu-1}{p}_\varrho,$$

aus welcher wir mit Hilfe der Gleichung (98) die Konstante $\overset{\nu}{p}_\varrho$ bestimmen können. Setzen wir in (103) $\varrho = 1, 2, \ldots, \varrho$ und addieren, so folgt

$$\overset{\nu}{p}_\varrho = 1 + \overset{\nu-1}{p}_1 + \overset{\nu-1}{p}_2 + \cdots + \overset{\nu-1}{p}_\varrho,$$

also ist nach (98):

$$\overset{2}{p}_\varrho = (\varrho + 1)^2$$

und daher

$$\overset{3}{p}_\varrho = \sum_{\varrho=0}^{\varrho} (\varrho + 1)^2 = \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)(2\varrho+3)}{6};$$

schreiben wir dafür:

$$\overset{3}{p}_\varrho = 2\frac{\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)}{1\cdot 2},$$

so können wir leicht weiter summieren und erhalten:

$$\overset{\nu}{p}_\varrho = 2\frac{\varrho(\varrho+1)\ldots(\varrho+\nu-1)}{1\cdot 2\ldots \nu} + \frac{(\varrho+1)(\varrho+2)\ldots(\varrho+\nu-1)}{1\cdot 2\ldots(\nu-1)}$$

oder

$$\overset{\nu}{p}_\varrho = 2(\varrho + \nu - 1)_\nu + (\varrho + \nu - 1)_{\nu-1}.$$

Mittels dieses Ausdrucks, worin $\varrho = 1, 2, \ldots, \varrho$ zu setzen ist, gibt die Gleichung (97) die Lösung der Aufgabe.

Juli 1901.

Metrische Eigenschaften reziproker Bündel.

Von MARCEL GROSSMANN in Frauenfeld (Schweiz).

Die fokalen Eigenschaften reziproker (korrelativer) Figuren unterscheiden sich von denen kollinearer Figuren wesentlich dadurch, daß bei reziproken Figuren sich Elementargebilde entsprechen können, die mit ungleichartigen Maßbestimmungen ausgerüstet sind. In zwei reziproken Räumen entspricht jedem Punkt des einen eine Ebene des andern. Die Frage nach denjenigen Ebenen des Punktes, welche gleiche Strahlbüschel tragen wie die entsprechenden Punkte in der entsprechenden Ebene, ist leicht zu beantworten. H. J. St. Smith hat in einer kurzen Note[1]): „*On the Focal Properties of Correlative Figures*“ einige Andeutungen über seine Resultate gegeben. Weil ein Strahl des Bündels elliptische Maßbestimmung aufweist, sein entsprechender Strahl in der Ebene aber parabolische, so ist die Frage nach den „gleichen“

1) Proceedings of the London Math. Society. vol. III (1869).

Ebenenbüscheln und Punktreihen nicht so ohne weitere Festsetzungen zu beantworten. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei zwei reziproken Ebenen; anders dagegen bei zwei reziproken Bündeln, denn hier hat man nur Elemente mit elliptischer Maßbestimmung. Es sind also gleiche Büschel in doppeltem Sinne in beiden Bündeln zu erwarten. Dieser Fall scheint noch nicht behandelt worden zu sein.

Es sollen nun im folgenden die metrischen Eigenschaften reziproker Bündel dargelegt werden; insbesondere wird gezeigt werden, daß sich auch auf reziproke Bündel der Begriff der „Charakteristik" der ebenen zentrischen Kollineation ausdehnen lasse, wie ich es in meiner Dissertation[1]) für *beliebige kollineare* Gebilde zweiter Stufe durchgeführt habe.

1. *Kanonische Darstellung des analytischen Zusammenhanges reziproker Bündel.* — Es ist bekannt, daß es in zwei reziproken Bündeln stets drei Strahlen a_1, a_2, a_3, welche aufeinander rechtwinklig stehen, so gibt, daß ihre entsprechenden Ebenen A_1', A_2' und A_3' auch aufeinander senkrecht stehen. Diese Tripel wähle man zu Fundamentalelementen der Maßbestimmung. Wählt man noch einen Strahl e und eine Ebene E als Einheitselemente, so hat eine Ebene P die Koordinaten

$$\xi = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \overset{\text{in } A_3}{(a_1 a_2 e_3 p_3)}, \quad \eta = \frac{\xi_3}{\xi_1} = \overset{\text{in } A_2}{(a_1 a_3 e_2 p_2)}.$$

Dabei bedeutet p_i die Schnittlinie der Ebene P mit A_i. Ein Strahl p hat die Bündelkoordinaten

$$x = \frac{x_2}{x_1} = (A_1 \overset{\text{um } a_3}{A_2} E_3 P_3), \quad y = \frac{x_3}{x_1} = (A_1 \overset{\text{um } a_2}{A_3} E_2 P_2).$$

P_i ist die Verbindungsebene von p mit a_i.

Legt man diese Koordinatensysteme zugrunde, so gehen die allgemeinen linearen Substitutionsformeln

$$\xi' = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}x + \alpha_{23}y}{\alpha_{11} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y}, \quad \eta' = \frac{\alpha_{31} + \alpha_{32}x + \alpha_{33}y}{\alpha_{11} + \alpha_{12}x + \alpha_{13}y},$$

welche den Strahl (x, y) mit der entsprechenden Ebene (ξ', η') verbinden, über in

$$\xi' = \frac{\alpha_{22}x}{\alpha_{11}}, \quad \eta' = \frac{\alpha_{33}y}{\alpha_{11}}$$

oder

$$\xi' = \frac{\alpha_2 x}{\alpha_1}, \quad \eta' = \frac{\alpha_3 y}{\alpha_1}. \tag{1}$$

---

1) „Über die metrischen Eigenschaften kollinearer Gebilde." Diss. Zürich, 1902 = Beilage zum Programm der Thurgauischen Kantonsschule für das Schuljahr 1901/02.

Der Ebene

$$\xi x + \eta y + 1 = 0$$

entspricht dann der Strahl

$$\xi \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \xi' + \eta \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \eta' + 1 = 0,$$

so daß

$$(2) \qquad x' = \frac{\alpha_1 \xi}{\alpha_2}, \quad \eta' = \frac{\alpha_1 \eta}{\alpha_3}$$

ist.

2. *Die metrischen Hauptelemente reziproker Bündel.* — Ein Ebenenbüschel des Originalbündels wird dem ihm entsprechenden Strahlbüschel des andern Bündels insbesondere *gleich* sein, wenn sich die absoluten Elemente beider entsprechen. Man muß also diejenigen Strahlen des Originalbündels bestimmen, deren Tangentialebenen an den absoluten Kegel entsprechend sind den Schnittlinien der entsprechenden Ebenen mit dem absoluten Kegel des andern Bündels. Ist K der absolute Kegel des einen Bündels, $K^{*\prime}$ der des andern, so hat man daher die zwei reellen Schnittlinien der 4 gemeinsamen Tangentialebenen der Kegel K und K^* zu bestimmen, um die *Fokalstrahlen* zu finden, und man hat die zwei reellen Verbindungsebenen der 4 gemeinsamen Kanten dieser Kegel zu suchen, um die *zyklischen Ebenen* zu erhalten.

Dazu braucht man die Gleichung des absoluten Kegels in Bündelkoordinaten.

Man sieht leicht ein, daß der absolute Kegel in Strahlenkoordinaten die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

hat, während seine Gleichung in Ebenenkoordinaten

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0$$

ist.

Gelten für die zwei reziproken Bündel die kanonischen Formeln (1) und (2), so hat man, da α_2 und α_3 gleichberechtigt sind, man also $\alpha_2 > \alpha_3$ postulieren kann, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } \alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_3, \quad \text{II. } \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_1, \quad \text{III. } \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3.$$

Diese drei möglichen Fälle unterscheiden sich nur bezüglich der Rolle, welche die Tripelkanten a_1, a_2 und a_3 bei der Realitätsfrage spielen. Es sei daher festgesetzt, daß im folgenden die Ungleichungen (I) stattfinden sollen.

Der absolute Kegel des Originalbündels hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Der Kegel II. Ordnung, welcher dem absoluten Kegel zweiter Klasse des andern Systems entspricht, hat die Gleichung

$$\alpha_2^2 x^2 + \alpha_3^2 y^2 + \alpha_1^2 = 0.$$

Die 4 gemeinsamen Strahlen dieser Kegel haben daher die Koordinaten

$$x^2 = -\frac{\alpha_1^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}, \quad y^2 = -\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}. \tag{3}$$

Aus der Ungleichung (I) folgt dann, daß $x^2 < 0$, $y^2 < 0$ ist. Das Paar reeller Verbindungsebenen der 4 Strahlen (3) geht also durch die Tripelkante a_1 und hat die Koordinaten

$$\frac{\xi}{\eta} = \mp \sqrt{-\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2}}. \tag{4}$$

Die *zyklischen Ebenen* C_1, C_2 des Originalbündels gehen also durch a_1 und sind symmetrisch zu den Tripelebenen A_2 und A_3.

In Ebenenkoordinaten haben die zwei Kegel die Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0, \quad \alpha_1^2\alpha_3^2\xi^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2\eta^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 = 0.$$

Für die gemeinsamen Tangentialebenen dieser Kegel findet man somit

$$\xi^2 = -\frac{\alpha_2^2(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)}{\alpha_1^2(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)}, \quad \eta^2 = -\frac{\alpha_3^2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_1^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}. \tag{5}$$

Es ist nach (I) $\xi^2 < 0$, $\eta^2 < 0$. Das reelle Paar der Schnittlinien der 4 Ebenen (5) liegt also in der Tripelebene A_1 und ist gegeben durch

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2}}. \tag{6}$$

Die *Fokalstrahlen* f_1, f_2 des Originalbündels gehen also symmetrisch zu a_2 und a_3 in der Ebene A_1.

3. *Definition und Berechnung der Charakteristik reziproker Bündel.* — Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha = +\sqrt{-\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha_3^2}}, \tag{7}$$

so ergeben sich also für die Fokalstrahlen f_1, f_2 bezw. c_1', c_2' der beiden Bündel die Koordinatenverhältnisse

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot \frac{1}{\alpha} \text{ und } \frac{y'}{x'} = \mp \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot \frac{1}{\alpha}. \tag{8}$$

Für die zyklischen Ebenen C_1, C_2 bezw. F_1', F_2' findet man

$$\frac{\xi}{\eta} = \mp \alpha \text{ und } \frac{\xi'}{\eta'} = \pm \alpha. \tag{9}$$

Man denke sich nun die beiden reziproken Bündel so zusammengelegt, daß ihre Scheitel zusammenfallen und daß die Tripelkante a_1 auf ihrer entsprechenden Ebene A_1' senkrecht steht. Der Fokalstrahl f_1 liegt in A_1, seine entsprechende zyklische Ebene F_1' geht durch a_1', welch letzterer Strahl mit a_1 zusammenfällt. Nun drehe man das eine Bündel so lange, bis f_1 und F_1' auf einander senkrecht stehen. Dann steht (wie aus den Koordinatenwerten (8) und (9) folgt), auch die zyklische Ebene C_1 auf ihrem Fokalstrahl c_1' senkrecht. Figur 1 stellt

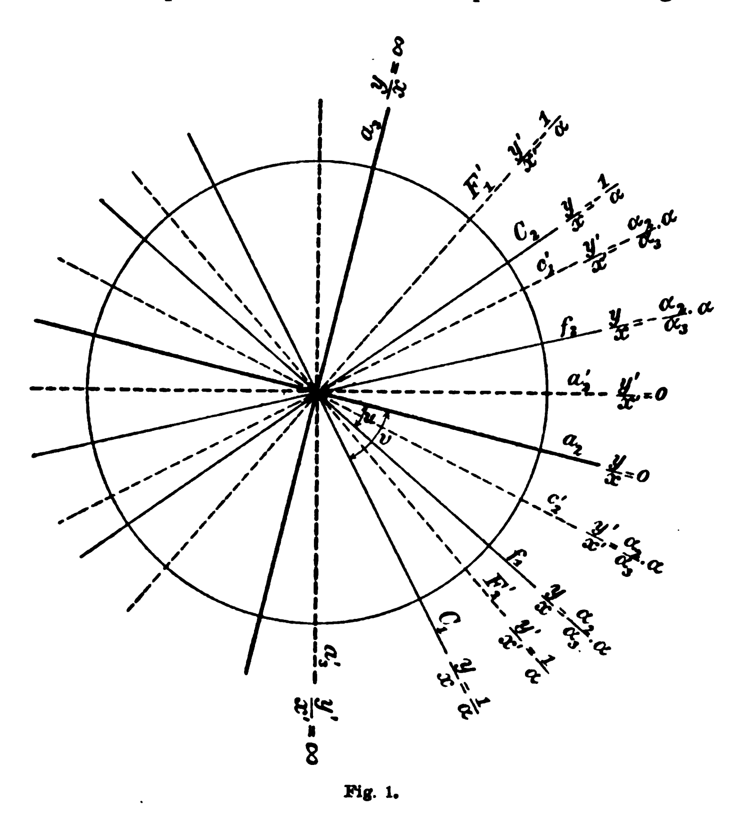


Fig. 1.

diese Lagenverhältnisse in der Ebene $A_1 \equiv A_1'$ dar. Legt man durch den Fokalstrahl f_1 eine beliebige Ebene P, welche mit der Tripelebene A_1 den Winkel φ bilden möge, so entspricht ihr in der auf f_1 senkrechten zyklischen Ebene F_1' ein Strahl p', der mit a_1' den gleichen Winkel φ bildet, wie P mit A_1. Denn die Büschel um f_1 und in F_1' sind ja gleich. Daher steht der Strahl p' auf seiner entsprechenden Ebene senkrecht.

Jeder Ebene P durch den Fokalstrahl f_1 entspricht daher ein zu ihr senkrechter Strahl p' in der zyklischen Ebene F_1'.

Diese Zusammenlegung der beiden reziproken Bündel ist offenbar ganz analog der Vereinigung kollinearer Bündel zur perspektivisch-inzidenten Lage, bei der das Zusammenfallen zweier Fokalstrahlen und zweier zyklischen Ebenen zur Folge hat, daß *alle* entsprechenden Ebenenpaare durch den gemeinsamen Fokalstrahl zusammenfallen, und das nämliche für *alle* entsprechenden Strahlenpaare in den zusammenfallenden zyklischen Ebenen gilt.

Dem Strahlbüschel in der Ebene P entspricht der projektivische Ebenenbüschel um den Strahl p'. Also hat man die Doppelverhältnisgleichheit

$$(f_1, \overset{\text{in } P}{[C_1 P]}, x, y) = (F_1', \overset{\text{um } p'}{[c_1' p']}, X', Y').$$

$[C_1 P]$ ist die Schnittlinie der Ebenen C_1 und P, x und y sind zwei beliebige Strahlen in P. Ausgeführt lautet diese Gleichung

$$\frac{\sin f_1 x}{\sin [C_1 P] x} : \frac{\sin f_1 y}{\sin [C_1 P] y} = \frac{\sin F_1' X'}{\sin [c_1' p'] X'} : \frac{\sin F_1' Y'}{\sin [c_1' p'] Y'}$$

oder

$$(10) \qquad \frac{\sin F_1' X'}{\sin [c_1' p'] X'} : \frac{\sin f_1 x}{\sin [C_1 P] x} = \frac{\sin F_1' Y'}{\sin [c_1' p'] Y'} : \frac{\sin f_1 y}{\sin [C_1 P] y} = \text{const.}$$

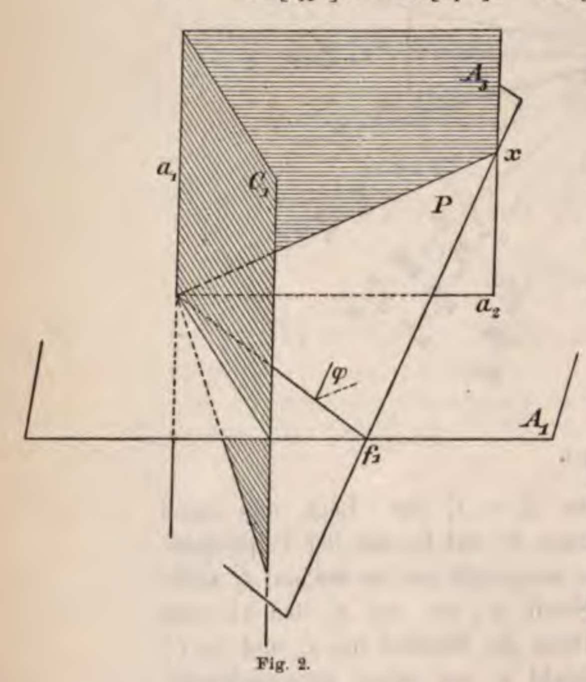


Fig. 2.

Es hat also das Verhältnis

$$\frac{\sin F_1' X'}{\sin [c_1' p'] X'} : \frac{\sin f_1 x}{\sin [C_1 P] x}$$

für alle Strahlen x der Ebene P denselben Wert, er werde mit $\Delta(P)$ bezeichnet. Es ist also

$$(11) \qquad \frac{\sin F_1' X'}{\sin [c_1' p'] X'} = \Delta(P) \cdot \frac{\sin f_1 x}{\sin [C_1 P] x}.$$

Es steht nun zu erwarten, daß $\Delta(P)$ sich als absolut invariant erweist gegenüber Drehungen der Ebene P um den Fokalstrahl f_1. Um dies zu beweisen, verstehe man unter x die Schnittlinie der Ebene P mit der Tripelebene A_3'. Setzt man (vgl. Fig. 1)

$$(12) \qquad u = \sphericalangle f_1 a_2, \quad v = \sphericalangle C_1 A_3,$$

so ersieht man aus den Formeln (8) und (9), daß

$$(13) \qquad \operatorname{tg} u = + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \cdot \frac{1}{\alpha} \text{ und } \operatorname{tg} v = + \alpha$$

ist. Der Winkel der Ebene P mit A_1 sei wieder mit φ bezeichnet; dann bildet auch p' mit a_1' den Winkel φ. Dem rechtwinkligen Dreikant f_1, x, a_2 (vgl. Fig. 2) entspricht das rechtseitige Dreikant F_1', X', A_2' (vgl. Fig. 3). Daher ist

$$\operatorname{tg} f_1 x = \frac{\operatorname{tg} u}{\cos \varphi},$$

$$\operatorname{tg} F_1' X' = \frac{\operatorname{ctg} v}{\cos \varphi},$$

also

$$(14)\quad \begin{cases} \sin f_1 x = \dfrac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 u}}, \\ \sin F_1' X' = \dfrac{\operatorname{ctg} v}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 v}}. \end{cases}$$

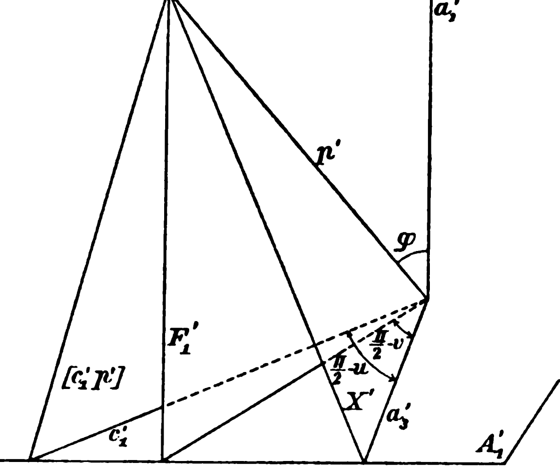


Fig. 3.

Ferner ist

$$(15)\quad \begin{cases} \angle\, [C_1 P] x = [C_1 P] f_1 + f_1 x, \\ \angle\, [c_1' p'] X' = [c_1' p'] F_1' + F_1' X'. \end{cases}$$

Das Dreiflach A_1, C_1, P ist rechtwinklig, es enthält den Winkel φ und die Seite $v - u$. Darum wird

$$(16)\quad \operatorname{tg} [C_1 P] f_1 = \frac{\operatorname{tg}(v-u)}{\cos \varphi}.$$

Das entsprechende Dreikant a_1', c_1', p' ist das *Polardreikant* zu jenem. Der Winkel $[c_1' p'] F_1'$ kommt im Nebendreikant vor, also ist

$$(17)\quad \operatorname{tg} [c_1' p'] F_1' = \frac{\operatorname{tg}(v-u)}{\cos \varphi}.$$

Nach (15) berechnet sich somit

$$\sin [C_1 P] x = \frac{\cos \varphi (\operatorname{tg}(v-u) + \operatorname{tg} u)}{\sqrt{(\cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 (v-u))(\cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 u)}},$$

$$\sin [c_1' p'] X' = \frac{\cos \varphi (\operatorname{tg}(v-u) + \operatorname{ctg} v)}{\sqrt{(\cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 (v-u))(\cos^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 v)}}.$$

Daher ist nach (11)

$$\Delta(P) = \frac{\operatorname{ctg} v}{\operatorname{tg} u} \cdot \frac{\operatorname{tg}(v-u) + \operatorname{tg} u}{\operatorname{tg}(v-u) + \operatorname{ctg} v}.$$

Aus dieser Formel ersieht man bereits, daß $\Delta(P)$ von φ unabhängig ist, d. h. daß allen durch f_1 gehenden Ebenen P derselbe

charakteristische Wert $\varDelta$ zukommt. Entwickelt man tg $(v-u)$, so reduziert sich dieser Wert auf

$$\varDelta = \frac{\operatorname{ctg} v}{\operatorname{tg} u} \cdot \frac{1+\operatorname{tg}^2 u}{1+\operatorname{ctg}^2 v}.$$

Setzt man endlich für tg u und ctg v die Werte

$$\operatorname{tg} u = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\sqrt{-\frac{\alpha_1^2-\alpha_3^2}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}}, \quad \operatorname{ctg} v = \sqrt{-\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_1^2-\alpha_3^2}}$$

ein, so bleibt

$$\varDelta = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2 \cdot \alpha_3}. \tag{18}$$

Sind zwei reziproke Bündel durch die kanonischen Formeln

$$\xi' = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x, \quad \eta' = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} y$$

gegeben und ist x ein beliebiger Strahl des einen Bündels, P seine Verbindungsebene mit dem Fokalstrahl f_1, so bildet der entsprechende Strahl p' in der zyklischen Ebene F_1' mit der Tripelkante a_1' den nämlichen Winkel, den P mit der Tripelebene A_1 bildet. Die Lage der Ebene X', welche dem Strahl x entspricht, ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\sin F_1' X'}{\sin [c_1' p'] X'} = \varDelta \cdot \frac{\sin f_1 x}{\sin [C_1 P] x}.$$

Daher kann man den Wert $\varDelta = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2 \alpha_3}$ als die „Charakteristik" der reziproken Bündel bezeichnen.

Frauenfeld, den 17. Febr. 1903.

Über elektrische Wellen.

Von E. Gehrcke in Berlin.

(Antrittsvorlesung, gehalten am 23. Juli 1904 in der Universität Berlin.)

M. H.! Ein Vortrag über elektrische Wellen pflegt gewöhnlich der Hauptsache nach in Experimenten zu bestehen; in der Tat gibt es kaum ein besseres Mittel, die Aufmerksamkeit der Zuhörer zu fesseln, als durch die Vorführung lebendiger, durch sich selbst wirkender Naturerscheinungen. Oder aber es tritt die theoretisch-mathematische Behandlung der Phänomene an die Stelle der Experimente. Der konsequente Aufbau der Theorie, die folgerichtige Ableitung der Einzeltatsachen aus den Maxwellschen Gleichungen ist allerdings ein vollwertiger Ersatz für Demonstrationen. Nun, m. H., Experimente kann ich Ihnen

hier nicht vorführen, eine mathematische Theorie aber möchte ich nicht geben. Ich will auch nicht auf die technische Bedeutung der elektrischen Wellen eingehen, vielmehr mein Thema von einer andern Seite her zu behandeln versuchen. Ich bitte Sie, mir bei einigen Betrachtungen mehr prinzipieller Natur zu folgen. Ohne auf spezielle Erscheinungen und Entwicklungen näher einzugehen, möchte ich mich darauf beschränken, in großen Zügen und im Umriß diejenigen Tatsachen und theoretischen Auffassungen zu besprechen, welche für die allgemeinen Grundlagen und die prinzipiellen Vorstellungen, die wir über die elektrischen Wellen besitzen, maßgebend sind. Ich hoffe, Ihnen am Schluß meines Vortrags eine Antwort auf die Frage gegeben zu haben: Was hat man sich nach dem heutigen Stande des Wissens unter elektrischen Wellen zu denken, was ist die Natur der elektrischen Wellen?

Man kann heute oft die Meinung äußern hören, die Maxwellsche Theorie der Elektrizität habe geleistet, was sie leisten konnte, und die theoretische Elektrizitätslehre greife heutzutage wieder auf die Grundlagen alter, vordem herrschender Theorien zurück, die man bereits definitiv überwunden glaubte. Insbesondere werden hier die Untersuchungen Wilhelm Webers zitiert. Weber hat bekanntlich die Elektrodynamik auf ein Fernwirkungsgesetz zu begründen versucht, indem er annahm, die Elektrizität sei ein atomistisch konstituierter Stoff, welcher nach außen hin ponderomotorische Kräfte auszuüben vermag. Diese ponderomotorischen Kräfte befolgen ein sehr kompliziertes Gesetz, insofern die zwischen zwei Elektrizitätsatomen stattfindende Wirkung nicht nur von ihrer Ladung und gegenseitigen Entfernung, sondern auch noch von der Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponente in der Richtung ihrer Verbindungslinie abhängt. — Die moderne Elektronentheorie, sagt man nun, sei nichts anderes, als eine Verquickung Maxwellscher Theorie mit Weberschen Vorstellungen, das Elektron sei nur ein anderer Name für das Webersche Elektrizitätsatom, und so sei klar, daß wir uns heute wieder von Maxwell-Hertz rückwärts bewegen, und daß die Webersche Elektrizitätstheorie in den Elektronen ihre Auferstehung feiere.

Man kann diese Meinung, so scheint mir, kaum besser auf ihre Richtigkeit prüfen, als indem man auf die elektrischen Wellen zurückgeht. Gerade die Entdeckung der elektrischen Wellen durch Heinrich Hertz hat ja seinerzeit der Maxwellschen Theorie zum völligen Siege verholfen und bewirkt, daß die alten Elektrizitätstheorien der Vergessenheit anheimfielen oder doch stark in den Hintergrund gedrängt wurden. Angesichts dieser historischen Tatsache kann man die Frage aufwerfen,

ob die Vorstellungen, welche Hertz mit seinen Wellen verband, heute noch dieselben geblieben sind, wo wir eine Elektronentheorie besitzen. Wenn auch alle Elektronen und wiedererstehenden Weberschen Elektrizitätsatome die an Hand der Maxwellschen Theorie entdeckten Erscheinungen nicht wieder rückgängig machen können, so ist doch die Vermutung nicht ohne weiteres abzuweisen, daß unsere heutigen theoretischen Anschauungen dieser Erscheinungen sich durch die Elektronentheorie modifiziert haben. Wir wollen also jetzt des näheren untersuchen, ob eine solche Modifikation der Vorstellungen eingetreten ist, und wenn dies der Fall, worin sie besteht.

Wie in der Akustik die Schallwellen, so kann man auch die elektrischen Wellen in zwei große Gruppen einteilen: die erste Gruppe umfaßt die freien elektromagnetischen Wellen, wie sie in der Luft und im leeren Raum auftreten können, die zweite Gruppe enthält die erzwungenen elektromagnetischen Schwingungen; ihr wichtigster Repräsentant sind die elektrischen Wellen in Drähten.

Betrachten wir zunächst die erste Gruppe, also den Fall elektromagnetischer Wellen in der Luft oder im freien Äther, wie sie z. B von einem Hertzschen Oszillator ausgesandt werden. Was für ein Vorgang ist es, der von dem Oszillator ausgeht, und wie haben wir uns das Wesen der sich hier abspielenden Vorgänge zu denken?

Ein Hertzscher Oszillator besteht aus zwei einander gegenübergestellten Leitern, die zu hohen Potentialen aufgeladen sind und plötzlich entladen werden. Man wußte auch ohne Maxwellsche Theorie schon, daß unter geeigneten Bedingungen, wenn nämlich

$$\frac{w}{2} < \sqrt{\frac{S}{C}},$$

(wo w den elektrischen Widerstand, S die Selbstinduktion, C die Kapazität des Leiters bedeuten) die Entladung des Leiters oszillierend erfolgt. Aber erst die Maxwellsche Theorie macht außer den Strömungs- und Potentialverhältnissen in dem Leiter auch Angaben über die Zustände des ihn umgebenden Raumes oder Dielektrikums. Wir wollen zur Vereinfachung unserer Betrachtungen annehmen, die Oszillationen seien sehr wenig oder gar nicht gedämpft und bestehen in einer einfachen (sinusartigen) Schwingung einer einzigen Periode. Welches ist dann der Zustand des Raumes, der den Oszillator umgibt, zu irgend einer Zeit t?

Der Raum um den Oszillator ist nichts anderes als ein elektromagnetisches Feld, und zwar ein solches mit periodisch wechselnden Eigenschaften. Betrachten wir die Zustände dieses Feldes in der Ebene,

die senkrecht zur Strömungsrichtung im Oszillator steht und diesen symmetrisch teilt. Die elektrische Kraft ist überall senkrecht zu unserer Ebene gerichtet; ihre Intensität ist auf einem Kreise um den Oszillator als Mittelpunkt von gleicher Größe. Ähnlich verhält sich die magnetische Kraft, nur liegt ihre Richtung überall in der betrachteten Ebene und senkrecht zur Richtung des Oszillators. Die Stärke der Kraft wechselt periodisch vom Oszillator nach außen hin; wenn wir uns auf einem Radiusvektor bewegen, schreiten wir in periodischer Folge durch Werte der Kraft, die von Null bis zu einem Maximum wachsen, dann kommt wieder Null, dann wieder ein Maximum usf. Diese Verteilung findet in gleicher Weise für die elektrische wie für die magnetische Kraft statt. — In Ebenen parallel zu den betrachteten liegen die Verhältnisse ganz ähnlich, nur bilden dann die Richtungen der elektrischen Kräfte schiefe Winkel mit der Ebene; allgemein gilt, daß die Kräfte senkrecht stehen zu jedem Radiusvektor, den man vom Oszillator aus ziehen kann.

Damit haben wir in großen Umrissen den Aufbau unseres elektromagnetischen Feldes beschrieben, so wie man sich dieses nach den Anschauungen der Maxwell-Hertzschen Theorie zu denken hat. Zu irgend einer andern Zeit t' würde ein ähnlicher, gegen den obigen verschobener Zustand gelten; wir haben uns vorzustellen, daß mit der Zeit das Feld sich derart ändert, als ob eine Bewegung desselben vom Oszillator nach außen stattfände, und zwar eine Bewegung, die mit sehr großer Geschwindigkeit vor sich geht, eben der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Hertzschen Wellen und des Lichts (300000 km in d. Sek.).

Zusammenfassend können wir demnach sagen: die elektrischen Wellen bestehen in einem veränderlichen elektromagnetischen Kraftfeld. Worin diese Kräfte bestehen, ob in elastischen Kräften, wie man nach der alten Elastizitätstheorie des Lichts annahm, oder in „dielektrischen Polarisationen“ nach den Anschauungen Faradays und Maxwells, können wir dahin gestellt sein lassen. Wir bedürfen auch nicht der grobsinnlichen mechanischen Analogien und Kombinationen von Zahnradgetrieben, die die Schüler Maxwells, z. B. Lodge, ersonnen haben. Derartige Hypothesen sind unnötig, denn ihre Prämissen lassen sich weder durch irgendwelche Tatsachen begründen, noch auch kann man aus ihnen Folgerungen ziehen, an denen ihre Richtigkeit geprüft werden könnte. Wir begnügen uns damit, den Vorgang der elektromagnetischen Wellen so zu beschreiben, wie ich dies angedeutet habe. Damit erreichen wir, daß wir uns von willkürlichen Zutaten frei halten und die Natur allein mit solchen Eigenschaften ausstatten, die sie uns zwingt ihr beizulegen.

Solche elektrischen Wellen, wie sie zuerst Hertz experimentell dargestellt hat, sind nach Maxwell auch die Schwingungen des Lichts, der strahlenden Wärme und der ultravioletten Strahlen. Derartige, den wellenartigen Zuständen ähnliche, variable elektromagnetische Felder sind vermutlich auch die Röntgenstrahlen. Die Unterschiede zwischen den verschiedensten elektromagnetischen Wellenzuständen sind rein quantitative und betreffen nur die Anordnung des Feldes, die Periode der Schwingungen u. dergl.

Diese Zusammenfassung der verschiedensten Strahlenarten unter einheitlichem Gesichtspunkt ist bis heute so unerschüttert geblieben und erscheint in ihrer Richtigkeit so sicher, wie die Vorstellungen und Prämissen, auf denen die Maxwellsche Theorie steht, ungeändert geblieben sind. Wir können behaupten, daß unsere heutigen Anschauungen über die Natur der elektrischen Wellen im freien, durch keine wägbare Materie erfüllten Äther noch genau dieselben sind, wie zu Zeiten von Maxwell und Hertz; hier hat die Elektronentheorie nichts geändert.

Wir wollen jetzt dazu übergehen, die oben genannte zweite Gruppe der elektromagnetischen Wellen zu behandeln, und wieder an Hand eines bestimmten Beispiels unsere Folgerungen ziehen. Dazu vergegenwärtigen wir uns die Hertzschen Drahtwellen, etwa in der von Lecher gegebenen Anordnung.

Die Schwingungen eines primären Oszillators werden hier (durch elektrische „Influenz“ resp. durch dynamische „Induktion“) auf einen sekundären Oszillator übertragen, von dem aus 2 parallele Drähte fortgeführt sind. Dann entstehen unter geeigneten Bedingungen, auf die wir hier nicht nötig haben näher einzugehen, in den Drähten stehende, elektrische Wellen, die man durch Abtasten mittels eines Resonators oder Indikators längs der Drähte nachweisen kann. Es zeigt sich, daß das Potential an gewissen Punkten der Drähte, den Schwingungsbäuchen, ein Maximum hat, an andern Stellen, den Schwingungsknoten, ist es gleich Null. Der Abstand zweier solcher Maxima oder zweier Minima des Potentials ist die halbe Wellenlänge der elektrischen Drahtwellen.

Es fragt sich für uns wieder: Wie haben wir uns die hier stattfindenden Vorgänge zu denken? Die Maxwellsche Theorie läßt auch hier vollständig das in dem Raume um die Drähte erzeugte elektromagnetische Feld berechnen und gibt seine Verteilung zu irgend einer Zeit t an (allerdings sind die mathematischen Schwierigkeiten hier größer als in dem obigen Fall eines einzelnen Hertzschen Oszillators). Auch hier haben wir periodisch wiederkehrende wellenartige Zustände

der elektrischen und magnetischen Kraft, nur die spezielle Konfiguration des Feldes ist hier eine andere als dort. Aber außerdem haben wir jetzt noch im Raume zwei leitende Körper, eben die beiden Drähte, deren Anwesenheit wir nicht ignorieren können, und wir fragen nun: Welche Vorgänge spielen sich in den Drähten ab?

Die strenge Maxwellsche Theorie sagt: In den Drähten spielen sich gar keine Vorgänge ab. Die Drähte bilden lediglich eine Begrenzung des umgebenden, nichtleitenden Dielektrikums, in welchem allein die Wellen, d. h. der periodisch wechselnde elektromagnetische Zustand verläuft.

Und doch sind die Drähte keineswegs ganz tot, sondern durch sie wird ein Phänomen herbeigeführt, das im Falle der freien elektromagnetischen Schwingungen, wo (abgesehen vom Oszillator selbst) keine leitenden Körper zugegen sind, fehlt: es fließt ein Strom durch die Oberfläche der Drähte. Dieser Strom wird auch von der Maxwellschen Theorie berücksichtigt, und seine Wirkungen, wie z. B. die durch Erzeugung Joulescher Wärme hervorgebrachte Dämpfung, werden in Rechnung gebracht. Die Maxwellsche Theorie ist also auch hier vollkommen richtig. Aber wir fassen den Vorgang der elektrischen Drahtwellen trotzdem heute noch etwas anders auf, als Hertz und seine Vorgänger dies taten. Das Resultat der Rechnung und die Grundlagen der Theorie bleiben unangetastet, nur führen wir noch eine etwas speziellere Vorstellung zu dem bisher Genannten hinzu. Diese speziellere Vorstellung betrifft den Vorgang der elektrischen Strömung. Die Maxwellsche Theorie, wenigstens in der von Hertz gegebenen klassischen Form, macht keinerlei Annahmen darüber, worin die elektrische Strömung besteht und wie man sie sich zu denken hat. Die strengen Anhänger Maxwells sind vielfach soweit gegangen, im elektrischen Strom lediglich einen Vorgang in dem den Leiter umgebenden Dielektrikum zu sehen; sie leugnen überhaupt andere als im Dielektrikum vor sich gehende elektrische Vorgänge. Die alten Theorien nehmen im Gegenteil an, daß das eigentliche Wesen des Stromes im Fließen eines Fluidums, der Elektrizität, besteht, und daß das Dielektrikum nur eine sekundäre Rolle spielt. Nach Weber z. B. besteht ein elektrischer Strom in einem Fließen von Elektrizitätsatomen in dem Leiter. Eine solche Vorstellung wollen auch wir zugrunde legen. Wir wollen annehmen, daß sich in jedem Leiter elementare Ladungen oder Elektronen befinden, welche sich frei im Leiter bewegen, aber unter gewöhnlichen Umständen[1]) nicht heraus können, und daß die Bewegung solcher Elektronen in

1) d. h. abgesehen von den Erscheinungen der Radioaktivität.

end einer Richtung einen elektrischen Strom repräsentiert. Diese ektronentheorie der Metalle ist durch viele Erscheinungen wohl be-ündet, ich erinnere nur an das *Hallsche* Phänomen und die Be-iehungen zwischen elektrischer Leitung und Wärmeleitung. — In unserm Fall elektrischer Drahtwellen nehmen wir also an, daß in den Drähten, von einem Knotenpunkt der Wellen zum nächsten, eine hin- und hergehende Bewegung von Elektronen stattfindet, und daß diese Elektronen durch ihre Bewegung *Joulesche* Wärme erzeugen. Wären keine solche bewegten Elektronen da, so würde auch keine *Joulesche* Wärme erzeugt werden, und umgekehrt wird nirgends *Joulesche* Wärme erzeugt, außer wo sich Elektronen bewegen.

Dann haben wir wohl *doch* die *Weberschen* Vorstellungen angenommen, und es feiert wirklich das *Webersche* Elektrizitätsatom in den Elektronen seine Auferstehung? M. H.! Allerdings *scheint* dies so zu sein, und der Gedanke liegt sehr nahe. Aber ich glaube, wir müssen trotzdem die Frage, ob der moderne Elektronenbegriff in einem Zurückgehen auf alte Theorien der Elektrizität entstanden ist, verneinen. Insbesondere aber dürfen wir, ohne den Leistungen *Webers* irgendwie zu nahe zu treten, die Behauptung aussprechen: mit den *Weberschen* Aufstellungen hat das moderne Elektron nichts zu tun. Die Ähnlichkeit ist eine rein äußerliche. Den Ausgangspunkt für die Elektronentheorie, sowohl was die mathematischen Grundlagen als auch die prinzipiellen Vorstellungen anlangt, bilden immer noch die *Maxwellschen* Gleichungen; unser letzter Begriff bleibt, ganz wie *Hertz* dies ausgeführt hat, die elektrische und magnetische Kraft. Nur operieren wir in den Elektronen mit spezielleren Annahmen, als die allgemeine *Maxwell*- und *Hertzsche* Theorie. Auch das Elektron ist nichts weiter als ein elektromagnetisches Feld, aber ein solches von ganz spezieller Struktur. Ein ruhendes Elektron ist ein statisches elektrisches Feld von gleichförmiger, um eine kleine Kugel verteilter Anordnung, seine Ladung ist ein gewisses Integral, genommen über eine um das Elektron als Mittelpunkt geschlagene Kugel. Wir machen uns keine Gedanken darüber, wie dies die alten Theorien taten, worin diese Ladung bestehen mag, ob sie z. B. substanzieller Natur ist u. dergl. Wir legen auch keinen besonderen Wert darauf, die elektrischen Vorgänge auf Elektrizitätsteilchen zurückzuführen, die sich nach irgend einem Elementargesetz beeinflussen. Unsere Frage ist immer nur: Welches ist die augenblickliche Konstitution des elektromagnetischen Feldes? Wenn diese Frage beantwortet ist, wissen wir alles, was wi heute wissen *können* und was wir wissen *wollen*.

Fassen wir unsere Betrachtungen kurz zusammen, so können

sagen, daß den im freien Äther vor sich gehenden elektrischen Wellen heute noch genau dieselben Vorstellungen zugrunde gelegt werden, welche ihr Entdecker Hertz benutzte; die sogenannten erzwungenen Schwingungen in Leitern werden aber heute etwas weniger allgemein gedacht, und man verbindet mit ihnen bestimmtere Vorstellungen, indem man sich die elektrische Strömung als in einer Bewegung von Elektronen bestehend denkt. Die Grundlagen unserer Auffassung sind jedoch auch hier unverändert diejenigen der Maxwell-Hertzschen Theorie.

Es ist klar, daß durch die Rolle, welche die Elektronen bei den erzwungenen elektrischen Schwingungen spielen, der Forschung heute neue Perspektiven eröffnet sind. Das Verhalten der elektrischen Schwingungen in Gasen verdient vielleicht besondere Beachtung. Der interessanten Erscheinungen auf diesem Gebiete sind gar viele, durchgearbeitet ist nur Weniges. Die experimentelle Erforschung der elektrischen Wellen erscheint, von dieser Seite her betrachtet, in einem ganz andern Lichte als in dem alltäglichen der drahtlosen Telegraphie und Telephonie; ich möchte die Vermutung aussprechen, daß die Wissenschaft gerade aus dem bisher weniger gepflegten Studium der elektrischen Oszillationen in Gasen noch manche Bereicherung erfahren dürfte.

Berlin, Juli 1904.

Beitrag zur Untersuchung des erkenntnistheoretischen Wertes der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen.

Von P. Milau in Kreuznach.

1. *Die logisch möglichen Raumformen.* — Die Lehre Kants[1]) über Raum und Zeit, der beide als „reine Formen aller sinnlichen Anschauung" ansieht, welche „dadurch *synthetische Urteile a priori* möglich" machen, setzt voraus, daß die Tatsachen, welche die Geometrie lehrt, strenge Allgemeinheit und innere Notwendigkeit aufweisen und von der Erfahrung gänzlich unabhängig, durch sich selbst klar und gewiß sind. So lange nun die euklidische Raumform unumstrittene Alleinherrschaft besaß, fand auch Kants Theorie kaum Widerspruch. Anders wurde es, als die Mathematik die Lehre von den verschiedenen möglichen Raumformen ausbildete. Da schien es so, als ob nunmehr den geometrischen Sätzen die strenge Allgemeinheit und innere Notwendigkeit abgesprochen werden und die Geometrie zu den empirischen Wissen-

1) Kant, „Kritik d. r. V." verlegt von Hartknoch 1871, S. 64.

schaften gezählt werden müßte. Im folgenden soll nun geprüft werden, inwieweit hierzu ein Recht vorliegt, und zu diesem Zweck sollen die verschiedenen Raumformen auf ihren erkenntnistheoretischen Wert hin untersucht werden. Ich hoffe, daß es mir gelingt nachzuweisen, daß der apriorische Charakter des Raumes und seiner Qualitäten durch die Theorie der verschiedenen Raumformen keine Einbuße erlitten hat.

Zunächst unterliegt es meines Erachtens keinem Zweifel, daß der mathematische Nachweis erbracht ist, daß sich neben der euklidischen Raumform auch andere Raumformen konsequent durchführen lassen, die ebenfalls nie zu einem inneren Widerspruch führen, ja nicht einmal zu einem solchen führen können. Bekanntlich wurde der erste Anstoß zur Ausbildung von Raumformen, die von der euklidischen abweichen, durch die langjährigen vergeblichen Versuche gegeben, das sogenannte XI. Axiom Euklids, das Parallelenaxiom, zu beweisen.[1]) Die weitere Entwickelung des vorliegenden mathematischen Problems läßt sich in 4 Perioden einteilen.[2]) Die erste derselben umfaßt dann die Versuche derjenigen, welche sich von dem Parallelenaxiom zu emanzipieren streben, ohne daß sie indessen die richtigen Konsequenzen ziehen und sich zu den neuen Raumformen durchringen. Hierher gehören Saccheri und Lambert.[3]) — Zu der zweiten Periode gehören diejenigen Forscher, welche den selbständigen Wert der nichteuklidischen Raumformen voll erfaßt haben. Die Methode, die sie anwenden, ist die rein geometrische bezw. trigonometrische. Es gehören hierzu Lobatschefskij, Bolyai und Beltrami. Lobatschefskij[4]) und Bolyai[5]) haben fast gleichzeitig und auf verschiedenen Wegen in bewußter Weise eine Geometrie ausgebildet, die von dem Parallelenaxiom Euklids vollkommen

---

1) Man vergl. Schotten „Inhalt und Methode des planimetr. Unterrichts". Bd. II. Leipzig 1893.

2) Man vergl. für das folgende des Verf. Programmabhandlung: „Aus dem Grenzgebiet zw. Math. u. Philosophie", Kiel, 1901, aus der einige Stellen übernommen sind.

3) Stäckel: „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß", Leipzig, 1895.

4) Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien in „Collection complète des oeuvres géométriques de N. J. Lobatscheffsky" Tome 2. 1886. — „Géométrie imaginaire" ebendaselbst und in Crelles Journal XVII, 1837, S. 295 bis 320. Friedr. Engel: „Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, 2 geometrische Abhandlungen", Leipzig 1898 u. 1899.

5) Joh. Bolyai: „Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens etc." (als Anhang zu dem „Tentamen etc." seines Vaters W. Bolyai; Maros Vásárhelyini 1832.) Man vgl. hierzu: Frischauf: „Absolute Geometrie nach J. Bolyai bearbeitet". Leipzig 1872.

abstrahiert. Sie sind zu der Erkenntnis gelangt, daß die gefundene „nichteuklidische“ (Gauß)[1]) oder „imaginäre“ (Lobatschefskij) oder „absolute“ (Bolyai) Geometrie die allgemeinere ist, die auch die „euklidische“ Geometrie als besondern Fall umfaßt. Die Theorie des Parallelwinkels (Lobatschefskij), der Grenzlinien und Grenzflächen, sowie die Entwickelung des trigonometrischen Formelsystems ist von beiden Forschern vollkommen durchgeführt. Beltrami[2]) knüpft an die Gaußsche Theorie der gekrümmten Flächen an und weist nach, daß die Sätze der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie für Flächen von konstantem negativem Krümmungsmaß gelten; es gelingt ihm so, den Sätzen der nichteuklidischen Geometrie eine gewisse konkrete Interpretation zu geben.

Die dritte Periode umfaßt die am meisten in diesem Gebiete genannten Namen Riemann und Helmholtz. Riemann[3]) hat die analytische Methode eingeführt, faßt den Raum als Größe auf, subsumiert ihn unter den weiteren Begriff einer Mannigfaltigkeit und gelangt zu den 3 bekannten Raumformen durch die Einführung des Begriffs des Krümmungsmaßes einer Mannigfaltigkeit. v. Helmholtz[4]) gelingt es, die Voraussetzungen über den Raum genauer zu präzisieren und zu reduzieren. Mit Hilfe seiner Voraussetzungen weist er die Annahme Riemanns nach, daß die Größe des Linearelements gleich der Quadratwurzel aus einer immer positiven, ganzen, homogenen Funktion zweiten Grades der Koordinaten-Differentiale ist.

Eine von der früheren abweichende Behandlung fand das Problem

---

1) Gauß selbst nimmt eine exzeptionelle Stellung ein. Er wurde nur deshalb oben nicht erwähnt, weil er keine zusammenhängende Theorie der „nichteuklidischen“ Geometrie hinterlassen hat. Daß er indessen dieselbe nicht nur für sich vollständig ausgebildet hat, sondern auch über ihre philosophischen Konsequenzen gründlich nachgedacht hat, die ihn zu einer Ablehnung der Lehre Kants führten, geht deutlich hervor aus den ebenfalls von Stäckel herausgegebenen nachgelassenen Aufzeichnungen „Grundlagen der Geometrie“ im VIII. Bd. der gesammelten Werke von C. F. Gauß. Göttingen 1900.

2) Beltrami: „Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea“ Giornale di Matematiche 1868. (Französ. in: „Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure“, Tome 6, 1869.)

3) Riemann: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“ Habilit. Vorles. 1854; veröffentlicht in den Göttinger Abhandlungen 1867.

4) v. Helmholtz: „Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“. Göttinger Nachrichten 1868. — „Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie“. Heidelberger Jahrbücher 1868, Nr. 46 u. 47. — „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“. Popul. Vorträge, Heft IV. Braunschweig 1876.

in der vierten Periode durch Felix Klein.[1]) Nach dem Vorgang von Cayley[2]) werden projektive und metrische Beziehungen streng geschieden, und es wird gefunden, daß die ersteren allen „ebenen" Raumformen gemeinschaftlich, die letzteren aber je nach der für die Raumform geltenden Maßbestimmung verschieden seien. Alle Maßbestimmungen werden dabei auf zwei fundamentale Aufgaben zurückgeführt: 1. Bestimmung der Entfernung zweier Punkte und 2. Bestimmung der Neigung zweier sich schneidender Geraden. Beide Bestimmungen haben das gemeinsame Merkmal, daß sich die Maßunterschiede addieren, und daß dieselben durch eine Bewegung im Raume nicht geändert werden. Da nun aber sowohl Verschiebung einer Punktreihe, als auch Drehung eines Strahlenbüschels in sich unter den Begriff einer *linearen Transformation* fällt, welche das betreffende Gebilde in sich überführt, so wird es soviel von einander verschiedene Maßbestimmungen auf den Grundgebilden erster Stufe geben, als es Arten von Lineartransformationen für diese Gebilde gibt. „Nun gibt es aber solcher Transformationen nur zweierlei Arten: 1. solche, bei denen 2 (reelle oder imaginäre) Elemente des Grundgebildes festbleiben (allgemeiner Fall) und 2. solche, bei denen nur ein (doppelt zählendes) Element des Grundgebildes ungeändert bleibt (spezieller Fall)" (Klein, a. a. O. p. 582). Die gewöhnliche Maßbestimmung des euklidischen Raumes ist von der zweiten Art (doppelt zählendes Element der unendlich ferne Punkt). Die Maßbestimmung der hyperbolischen Raumform entspricht dem ersten (allgemeinem) Fall mit 2 reellen Elementen (2 unendlich ferne Punkte), diejenige der elliptischen Raumform demselben Fall mit 2 imaginären Elementen (kein unendlich ferner Punkt) des Grundgebildes. — Außer den genannten Forschern kommen für diese Periode hauptsächlich noch in Betracht: Lindemann[3]), Killing[4]), Lie[5]), der die Theorie

---

1) Felix Klein: „Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie". Math. Annal. IV u. VI. — „Zur nichteuklidischen Geometrie". Math. Annalen, Bd. 37. Vgl. auch von demselben Verfasser: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen."

2) Cayley: „Sixth Memoir upon Quantics". Philos. Transactions t. 149. 1859.

3) Lindemann: „Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch". II. Bd., 1. Teil, Leipzig 1891.

4) Killing: „Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung". Leipzig 1885. — „Einführung in die Grundlagen der Geometrie". I. Bd. Paderborn 1893, II. Bd. Paderborn 1898.

5) Sophus Lie: „Theorie der Transformationsgruppen". Bd. III, Abteilung V. Leipzig 1893. Man vgl. hierzu auch: F. Klein: „Gutachten anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises". Math. Ann. 1898.

der Transformationsgruppen auf das von Riemann und Helmholtz gestellte Problem anwendet, und Hilbert.[1])

Aus den aufgezählten Bearbeitungen ergibt sich, daß eine Anzahl von Raumformen gleiche mathematische Berechtigung hat wie der bekannte euklidische (parabolische) Raum, dessen charakteristische Merkmale, Bestimmbarkeit der Geraden durch 2 Punkte, Kongruenz, Dreidimensionalität, Endlichkeit und Unabhängigkeit des Parallelwinkels vom Abstand sind. Durch Abstraktion eines oder mehrerer der genannten Merkmale ergeben sich nämlich: 1. Solche Raumformen, bei denen gerade Linien (kürzeste Linien) Raum einschließen können. Hierzu gehört die sphärische oder Riemannsche Raumform, bei der jedem Punkt ein Gegenpunkt zukommt. 2. Solche Raumformen, bei denen der Raum in sich selbst nicht mehr bewegt werden kann, wo vielmehr die Kongruenz des Raumes auf einen gewissen endlichen Bereich um jeden Punkt beschränkt bleibt. (Clifford-Kleinsche Raumformen in der Bezeichnung von Killing, deren Gesamtheit sich je nach ihrem Krümmungsmaß in elliptische, parabolische und hyperbolische einteilen läßt.) 3. Die Raumformen von mehr als 3 Dimensionen. 4. Die *endlichen* Raumformen (hierzu gehören die elliptischen Raumformen nach Klein, oder Raumformen mit positiv konstantem Krümmungsmaß). 5. Solche Raumformen, in denen der Parallelwinkel eine Funktion des Abstands ist (hierzu gehören die hyperbolischen Raumformen nach Klein oder Raumformen mit negativ konstantem Krümmungsmaß, bei denen der geraden Linie 2 unendlich ferne Punkte zukommen).

2. *Logisch mögliche Raumformen sind nicht ohne weiteres auch erkenntnistheoretisch möglich.* — Es wird nun vor allem die Frage zu beantworten sein, ob logisch mögliche Raumformen auch *ohne weiteres* erkenntnistheoretisch als möglich anzusehen sind. Wenn nämlich in der Tat das Denken allein ein Kriterium für die Möglichkeit einer Raumform gäbe, dann bliebe allerdings kein anderes Hilfsmittel als die Erfahrung, um herauszufinden, welcher der möglichen Raumformen unser reeller Raum entspricht, und die Lehre Kants über den Raum wäre von Grund aus umgestoßen und als falsch erkannt. Sind aber logisch mögliche Raumformen nicht ohne weiteres erkenntnistheoretisch möglich, dann wären die Bedingungen aufzustellen, die der Raum zu erfüllen hat, um nicht nur logische, sondern auch erkenntnistheoretische Berechtigung zu gewinnen, und es wäre zu untersuchen, ob die einzelnen logisch möglichen Raumformen sich mit den neuen Forderungen ver-

1) David Hilbert: „Grundlagen der Geometrie" in d. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals. Leipzig 1899.

einbaren lassen, die man nunmehr an den Raum zu stellen hat. — Nun ergibt sich die logische Möglichkeit der verschiedenen Raumformen aus analytischen Betrachtungen, d. h. aus der Anwendung der Zahl auf das Gebiet des Räumlichen. Da das Räumliche an sich aber nichts Diskretes enthält, vielmehr durchaus in sich homogen ist, so kann den Zahlenoperationen, so nützlich und unentbehrlich sie auch für die Mathematik sind, doch nicht die Fähigkeit zugesprochen werden, ein erkenntnistheoretisch richtiges Urteil über das eigentliche Wesen des Raumes abzugeben.[1])

Das wird auch für die elementare analytische Geometrie meistens anerkannt. So sagt z. B. Lindemann[2]) gelegentlich der Besprechung der unendlich fernen Geraden: „Es soll dadurch jedoch nur diese analytische Tatsache, aber keinerlei metaphysische Auffassung ausgedrückt werden. Die Einführung dieser Bezeichnung erlaubt uns dann, manche Sätze einfacher zu beweisen und auszusprechen, indem wir mit der unendlich fernen Geraden wie mit einer wirklich vorhandenen operieren." — Die Analysis allein kann uns also zu keiner richtigen Erkenntnis räumlicher Eigenschaften verhelfen. Sie ist immer nur als Mittel anzusehen, geometrische Tatsachen einfach darzustellen, gewissermaßen als eine Abbildung des räumlich Realen durch das Zahlengebiet. Nicht die Algebra entscheidet daher auch über die Möglichkeit dieser oder jener Raumform, sondern nur die Betrachtung des Raumes selbst.[3]) Wir bleiben also in Übereinstimmung mit Kant[4]) und nennen nur dasjenige möglich, „was mit den formalen Bedingungen der Erfahrung (der Anschauung und den Begriffen nach) übereinkommt". Haben wir nun eine Wissenschaft vor uns, die nur auf Begriffen aufgebaut ist, so wird auch die logische Folgerichtigkeit allein das Kriterium für die Richtigkeit der aus ihr entspringenden Erkenntnis sein. Eine solche Wissenschaft ist aber nur die Transzendentalphilosophie selbst.[5]) Bei ihr wird die Erkenntnis nur durch logische Bearbeitung der Begriffe gewonnen, ist also eine diskursive. Bei allen andern Wissenschaften aber müssen auch intuitive Urteile gelten.[6]) Nun ist aber die Geometrie

---

1) Vgl. Wundt: „Logik, eine Untersuchung der Prinzipien der Erkenntnis und der Methoden wissenschaftlicher Forschung". 1. Bd. „Erkenntnislehre". Stuttgart 1880, S. 440 ff. S. auch Lotze: „Metaphysik" S. 246 f.

2) Lindemann: „Vorlesungen über Geometrie". I. Bd. Leipzig 1876. S. 67.

3) Vgl. Russell: „Essai sur les Fondements de la Géométrie (ins Franz. übersetzt von Cadenat) Paris 1901. S. 59. 4) Kant: „Kr. d. r. V." S. 202.

5) Vgl. J. C. Becker: „Abhandlungen aus dem Grenzgebiet der Mathematik u. Philosophie" S. 16—20.

6) Vgl. H. Weissenborn: „Über die neueren Ansichten vom Raum u. von den geometr. Axiomen". Vierteljahrschrift f. wissensch. Philos. II, S. 454 ff.

sicher eine Wissenschaft, die die Anschauung nicht entbehren kann. Sie ist keine Wissenschaft *aus* Begriffen, sondern sie hat die Begriffe im Raum zu *konstruieren*. Es genügt demnach für die Geometrie nicht, daß die Entwickelung ihrer Begriffe logisch folgerichtig vor sich geht, sondern sie hat bei jedem entwickelten Begriff mittels der formalen Anschauung zu untersuchen, ob der dem Begriff entsprechende Gegenstand auch möglich sei. Vom menschlichen Standpunkt *natürlich* erscheint ja das Streben, alle Erkenntnis auf *eine einzige Quelle* zurückführen zu wollen; nichts desto weniger kommen wir aber nicht über die nun einmal feststehende Tatsache hinweg, daß hier ein Dualismus herrscht, daß wir hinsichtlich unserer psychischen Tätigkeit einem *doppelten Zwang* unterworfen sind, dem *Denkzwang* und dem *Anschauungszwang.*[1]) Daher mußten auch alle Versuche fehlschlagen, die darauf hinausgingen, die Geometrie rein logisch frei von jeder Anschauung zu begründen[2]) oder überhaupt räumliche Anschauung durch begriffliche Verbindungen zu ersetzen.[3]) Hiernach unterliegt es also keinem Zweifel, daß ein Anschauungszwang, d. h. ein Zwang, Mannigfaltiges überhaupt räumlich aufzufassen, oder Empfindungen nach außen zu projizieren, ebenso gut vorhanden ist, wie derjenige, Begriffe logisch zu bilden und zu verknüpfen. Wenn aber anerkannt werden muß, daß im Gebiete des Räumlichen das logische Denken allein nicht ausreicht, so sind auch die logisch möglichen Raumformen nicht ohne weiteres erkenntnistheoretisch möglich, sondern es muß geprüft werden, ob sie auch den Bedingungen des Anschauungszwanges genügen.

3. *Raumformen, die den Axiomen der projektiven Geometrie widersprechen, sind erkenntnistheoretisch nicht möglich.* — Wir wollen nun diese Prüfung in der Weise vornehmen, daß wir zunächst die reale Möglichkeit solcher Raumformen untersuchen, die den Bedingungen der *projektiven Geometrie* widersprechen. Wir sahen im vorigen, daß die Fähigkeit, Mannigfaltiges räumlich aufzufassen, a priori vorhanden ist. Die räumliche Auffassung des Mannigfaltigen besteht nun im wesentlichen in einem qualitativen und in einem quantitativen Vergleichen von Raumgebilden, d. h. im Unterscheiden verschiedener Lagen- und

1) Vgl. Schotten: „Die Grenze zw. Philosophie u. Mathem." Unterrichtsblätter für Mathem. u. Naturw. II, 4, S. 49.

2) Vgl. Bolzano: „Wissenschaftslehre" 1837.

3) Man vgl. z. B.: Schmitz-Dumont: „Zeit und Raum in ihren denknotwendigen Bestimmungen, abgeleitet aus dem Satze des Widerspruchs". Leipzig 1875. — Thiele: „Grundriß der Logik u. Metaphysik". Halle 1878. — Eine nähere Begründung der obigen Behauptung findet sich in des Verfassers Programmarbeit: „Aus dem Grenzgebiet zwischen Mathematik u. Philosophie". Kiel, 1901. S. 17f.

Größenverhältnisse. Die Fähigkeit, Raumgebilde qualitativ und quantitativ zu vergleichen, müssen wir also als eine a priori gegebene ansehen. Die projektive Geometrie behandelt nun die erste Art des Vergleichens, zunächst ohne Rücksicht auf metrische Beziehungen unter alleiniger Voraussetzung, daß durch 2 Punkte eine Gerade vollkommen bestimmt wird. Um dann *überhaupt* räumliche Maßbestimmungen und metrische Beziehungen auf projektive Betrachtungen aufzubauen, muß noch vorausgesetzt werden, daß die Maßbestimmungen durch eine Bewegung im Raum nicht geändert werden. Das qualitative Vergleichen von Raumgebilden hat also zur Voraussetzung die Bestimmbarkeit der Geraden durch 2 Punkte, das quantitative außerdem noch die Kongruenz des Raumes. Da aber beide Arten des Vergleichens a priori gefordert werden, so sind jene beiden Sätze von der Bestimmbarkeit der Geraden durch 2 Punkte und von der Kongruenz des Raumes ebenfalls a priori. Die Erkenntnis aber, daß die räumliche Auffassung des Mannigfaltigen gezwungenermaßen im Unterscheiden verschiedener Lagen- und Größenverhältnisse besteht, ist wiederum ein Zwang, der unabhängig vom Denken uns auferlegt wird, ein Anschauungszwang. Nun könnte der Einwand gemacht werden, daß sowohl das qualitative wie das quantitative Vergleichen sich durch Erfahrung ergeben hat. Das ist indessen nicht richtig. Die Erfahrung geht natürlich auch hier wie stets der Erkenntnis zeitlich voraus. Ohne vorangegangene Erfahrung ist die Aufstellung der Gesetze der räumlichen Anschauung ebenso wenig möglich, wie die der Denkgesetze. Wenn wir aber behaupten, daß die Axiome der projektiven Geometrie a priori richtig sind, so soll damit gesagt sein, daß ohne sie eine Erfahrung, hier also räumliche Erfahrung, unmöglich wird. Wenn aber die Fähigkeit, verschiedene Punkte räumlich zu unterscheiden und in Beziehung zu bringen, geleugnet wird, so ist allerdings jeder Erfahrbarkeit der Boden entzogen.[1]) Setzen wir aber die genannte Fähigkeit voraus, so ergeben sich jene Axiome durch einfaches Projizieren der Kategorien Qualität und Quantität auf räumliche Verhältnisse: Ein Punkt unterscheidet sich von einem andern zunächst weder qualitativ noch quantitativ. Nach dem vorigen sind wir aber veranlaßt, eine qualitative und eine quantitative Beziehung zwischen 2 Punkten anzunehmen. Verglichen können solche Beziehungen also erst werden, wenn wir mehr als 2 Punkte ins Auge fassen. Je 2 Punkte können mit je 2 andern gleiche oder verschiedene qualitative Beziehung haben. Indem wir diesen Gedanken in Raumanschauung umsetzen, werden wir zu dem Axiom gedrängt, daß durch

---

1) Vgl. hierzu Russell a. a. O., S. 59ff.

2 Punkte eine Richtung (gerade Linie) vollkommen bestimmt ist. Analog steht es mit der quantitativen Beziehung: Die Beziehungen, die zwischen einem Punktepaar und einem andern herrschen, können quantitativ gleich oder verschieden sein. So gelangt man durch Übertragung in räumliche Verhältnisse zum Begriff Abstand. — Nun ist aber noch ein Einwand zu entkräften, nämlich der, daß die Vergleichung verschiedener Raumgebilde hinsichtlich ihrer Größe nur möglich ist unter der Annahme ihrer *freien Beweglichkeit* und *Festigkeit*, daß aber die genannten Eigenschaften sich nur durch Erfahrung ergeben können, und daß also hieraus die empirische Herkunft des Axiomes von der Kongruenz des Raumes folgt. Daß der Begriff der Bewegung etwas Empirisches voraussetze, gibt allerdings auch Kant zu, wenn er sagt: „Im Raum an sich selbst betrachtet ist nichts Bewegliches: daher das Bewegliche etwas sein muß, was im Raume nur durch Erfahrung gefunden wird, mithin ein empirisches Datum."[1]) Doch die Worte Kants geben auch gleichzeitig die Lösung dieser Schwierigkeit. Den Raumgebilden kommt eben die Bewegbarkeit nicht als Eigenschaft zu. Die Bewegung ist ebenso künstlich in den Raum durch uns hineingetragen wie die Zahl. Die Raumgebilde als solche sind unbeweglich, und der Bewegungsprozeß in der Geometrie beruht darauf, daß *wir* die psychische Fähigkeit besitzen, ein Bild[2]) des betreffenden geometrischen Gebildes in uns aufzunehmen, dasselbe festzuhalten und an eine andere Stelle des Raumes zu projizieren.[3]) — Gleiche Gebilde sind gleich, auch ohne daß ich Superposition anwende. Diese ist nur für mich ein Mittel, mich von der Gleichheit oder Verschiedenheit der beiden Gebilde zu überzeugen. — Da nun die Bewegbarkeit dem räumlichen Gebilde selbst nicht zukommt, so kann dasselbe sich auch nicht durch Bewegung, als durch einen von uns hineingetragenen psychischen Akt, verändern. Ebenso wie die Beweglichkeit ist also auch die Festigkeit garnicht als äußere Eigenschaft der geometrischen Gebilde anzusehen, sondern beide Eigenschaften sind durchaus subjektiv zu nehmen, und daher ist auch das Axiom von der Kongruenz des Raumes sicher nicht durch Erfahrung gewonnen, sondern es ist eine Forderung, die wir

1) Kant „Kr. d. r. V. S. 65 u. 66.

2) Man vgl. J. C. Becker: „Abhandlungen aus dem Grenzgeb. etc." S. 28ff.

3) Kant nennt dieses Vermögen, einen Gegenstand auch ohne dessen Gegenwart in der Anschauung vorzustellen, „die Einbildungskraft". (Kr. d. r. V. S. 672). Er unterscheidet die Bewegung eines Objektes im Raume, die nur durch Erfahrung erkannt werden kann, und die Bewegung als Beschreibung eines Raumes, welche er einen „reinen Actus der successiven Synthesis des Mannigfaltigen in der äußeren Anschauung überhaupt durch produktive Einbildungskraft" nennt (a. a. O. S. 674, Anm.), und welche er als zur Transzendentalphilosophie gehörig ansieht.

a priori stellen. Ebensogut könnte als Erfahrungssatz der Satz gelten, daß Raumgebilde sich mit der Zeit nicht verändern. — Hierdurch erledigt sich nun auch die Frage, ob der Raum nicht eine den Clifford-Kleinschen Raumformen — in der Bezeichnungsweise von Killing — entsprechende Gestaltung haben könne. Seine Gleichförmigkeit bliebe dann noch bestehen, „solange man nur einen gewissen endlichen Bereich um jeden einzelnen Punkt betrachtet".[1]) Nur als Ganzes betrachtet wäre der Raum ungleichförmig. Es muß hier betont werden, daß das Unendliche überhaupt nichts objektiv Existierendes ist, daß *wir vielmehr selbst uns das Unendliche konstruieren,* als Negation des Aufhörens einer Erscheinungsreihe. Die für den endlichen Bereich gefundene Gleichförmigkeit des Raumes kann also garnicht im Unendlichen verschwinden. Charakteristisch für den Gedankengang der Empiristen ist der Einwand, den Killing selbst gegen seine Clifford-Kleinschen Raumformen macht, nämlich daß die Gesetze der Mechanik sich ändern müßten, insofern als die Einwirkung zweier Massenpunkte aufeinander nicht nur von deren Entfernung, sondern auch von der Richtung ihrer Verbindungsgeraden abhinge. Killing nimmt also hier an, daß etwaige Beobachtungen, die man in dem angeführten Sinne in der Mechanik machen würde, zu einem Schluß auf die Inkongruenz des Raumes in der einen oder andern Clifford-Kleinschen Form führen müßten. Uns dagegen scheint es, daß das Wesen des Raumes von jeglichen Beobachtungen der Mechanik unabhängig sein müsse. — Aus dem vorigen ist auch ersichtlich, wie die Frage, ob die geometrischen Körper auch *Undurchdringlichkeit* aufweisen, je nach der verschiedenen Auffassung vom Wesen des Raumes verschieden beantwortet werden muß. Die Empiristen bedürfen der Undurchdringlichkeit der geometrischen Körper geradeso wie der freien Beweglichkeit und der Festigkeit, als einer empirisch gefundenen Eigenschaft. Wenn man in ihrem Sinne[2]) einen Körper A mit einem ihm kongruenten Körper B zur Deckung bringen will, so kann das nur so aufgefaßt werden, daß der Körper B fortbewegt wird, und A an die Stelle gebracht wird, die B vorher inne hatte. Nach unserer Meinung dagegen kommen dem geometrischen Körper überhaupt keine mechanischen Eigenschaften zu. Die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit können wir vollends ganz entbehren. Unsere Seele hat eben das Vermögen, das Bild des betreffenden Raumgebildes A *überall* hin zu transportieren, also auch nach dem Ort, den ein anderes ihm kongruentes Raumgebilde B gerade einnimmt. Die geometrischen Körper zeigen also gewissermaßen gerade

1) Killing: „Einführung in die Grundlagen etc." I. S. 346.

2) Killing a. a. O. II. S. 228.

Durchdringlichkeit. Jene von den Empiristen vollzogene Übertragung mechanischer Eigenschaften fester Körper auf die Geometrie müssen wir aber als eine unberechtigte Vermengung geometrischer und physikalischer Vorstellungen zurückweisen, auch dem Raum, als einer bloßen Form, jegliche Tätigkeit und Kraft absprechen, vielmehr ein vollkommen passives Verhalten des Raumes postulieren.[1]) Hiernach sehen wir uns also genötigt, sowohl allen Raumformen, bei denen zwei gerade Linien ein Flächenstück einschließen können — insbesondere auch der Riemannschen Raumform in der Killingschen Bezeichnung — als auch den Raumformen mit nicht konstantem Krümmungsmaß — insbesondere den Clifford-Kleinschen Raumformen — jede reale Existenz abzusprechen.

4. *Raumformen von mehr als 3 Dimensionen sind erkenntnistheoretisch nicht möglich.* — Wie sehr sich die begriffliche Möglichkeit einer Raumform von der durch reine Anschauung bedingten unterscheidet, tritt besonders bei dem Axiom von den Dimensionen des Raumes hervor. Es unterliegt gar keinem Zweifel, daß sich auf analytischem Wege Raumformen behandeln lassen mit beliebiger, konstanter Anzahl (n) von Dimensionen, und doch werden wir sehen, daß unser Raum nicht einer Form entsprechen *kann*, bei der $n > 3$ ist. — Gewöhnlich schreibt man einem Raumgebilde dann n Dimensionen zu, wenn das Einzelne in demselben, der Punkt, durch n voneinander unabhängige Variable bestimmt wird. Nach Erdmann[1]) besteht nun das Charakteristische des Raumes und der räumlichen Gebilde (der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten) darin, daß bei denselben die Dimensionen gleichartig sind und sich vertauschen lassen. Bei andern Mannigfaltigkeiten dagegen, z. B. bei dem System der Farben- oder Tonempfindungen, die Erdmann für dem Raume koordinierte Größenbegriffe hält, seien die Abhängigkeitsverhältnisse (Farbenton, Sättigungsgrad, Lichtstärke bezw. Höhe, Intensität, Klangfarbe) nicht vertauschbar. Die Tatsache ist richtig, daher ist aber der Raum jenen „Größenbegriffen" eben *nicht* koordiniert, und daher ist es auch unerlaubt, zur Veranschaulichung des vierdimensionalen Raumes eine mit den andern Veränderlichen nicht vertauschbare Variable, etwa die Dichtigkeit oder Temperatur, hinzu zu nehmen. Gegen die angeführte Definition der Dimensionen ist übrigens einzuwenden, daß sie rein analytischer Natur ist und das eigentliche Wesen des Raumes nicht genügend erfaßt. Jedenfalls kann aber aus der analytischen Möglichkeit, für die Anzahl

1) Benno Erdmann: „Die Axiome der Geometrie, eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie." Leipzig 1877. Kap. II.

der unabhängigen Veränderlichen eine Zahl zu wählen, die größer als 3 ist, nicht auf die reale Möglichkeit einer solchen Raumform geschlossen werden. — Ebensowenig befriedigt die bekannte Definition, die von dem Punkt ausgeht und ihn sich fortbewegen läßt. Diese Erklärung hat das Mißliche, daß sie die Bewegung benutzt, die erst durch einen psychologischen Akt in das Räumliche hineingetragen ist; auch läßt dieselbe nicht recht erkennen, daß das Axiom von den 3 Dimensionen des Raumes garnicht als ein einfaches anzusehen ist, sondern daß in ihm eine Reihe von Axiomen enthalten ist. — Mehr dem Wesen des Raumes entsprechend und mit der obigen Forderung vereinbar scheint diejenige Definition zu sein, die von dem Körper ausgeht und Begrenzung und Teilung benutzt. Sie lautet[1]): Teilt man einen Körper (endl. Raumteil), so ist das die Grenze der beiden Teile bildende Gebilde (Grenzgebilde erster Ordnung) wieder teilbar und so fort. Endlich gelangt man zu einem unteilbaren Grenzgebilde. Unter der Anzahl der Dimensionen eines Raumgebildes wird also die Anzahl der möglichen Teilungen verbunden mit Grenzübergängen verstanden, die man bei dem Gebilde ausführen muß, um zu dem unteilbaren Gebilde (Punkt) zu gelangen. Hieraus ist sofort ersichtlich, daß das Axiom, welches für den Raum 3 Dimensionen fordert, aus verschiedenen Annahmen zusammengesetzt ist, nämlich:

1. Es läßt sich aus dem Raum ein allseitig begrenzter Teil ausscheiden. (Existenz von Körpern wird gefordert.)

2. Bei dem vorher angegebenen Teilungs- und Abgrenzungsverfahren gelangt man schließlich zum unteilbaren Raumgebilde (Punkt) (Anzahl der Dimensionen ist endlich).

3. Man gelangt zu dem unteilbaren Raumgebilde (Punkt) stets durch die gleiche Anzahl von Teilungen mit Grenzübergängen, von welchem Raumteil (Körper) man auch ausgehen mag. (Anzahl der der Dimensionen ist konstant.)

4. Diese Anzahl ist für den Raum 3.

Es ist nun zu untersuchen, ob die reine Anschauung die Richtigkeit dieser 4 Sätze fordert. Die 3 ersten Forderungen sind dem Raum mit der Zeit gemein. Daß sie auf Anschauungszwang beruhen, geht aus dem bereits früher erörterten Umstand hervor, daß uns a priori die Fähigkeit zukommt, räumliche bezw. zeitliche Gebilde quantitativ zu vergleichen. Unmittelbar folgt daraus der erste der angeführten Sätze; denn wenn der Raum so beschaffen ist, daß wir in ihm Gebilde quantitativ vergleichen können, so muß der Raum selbst uns als ein

1) Vgl. Killing a. a. O. I. S. 174.

Quantum erscheinen, also teilbar sein. Man muß also einen Raumteil so absondern können, daß Punkte dieses Teiles nur ihm, nicht auch dem übriggebliebenen Teil des Raumes zugehören, d. h. es existieren Körper. — Die Anzahl der Dimensionen kann ferner nicht unendlich sein, da man sonst niemals zum unteilbaren Raumgebilde käme. Die Existenz eines solchen haben wir aber bereits durch die Forderung vorausgesetzt, eine Empfindung räumlich zu projizieren. — Wenn ferner die Anzahl der Dimensionen nicht konstant wäre, so würde darunter die Homogenität des Raumes leiden, die wir unbedingt zu fordern haben. — Die 4. Annahme, daß die Anzahl der möglichen Teilungen mit Grenzübergängen 3 ist, gilt nur noch für den Raum. An ihre Stelle tritt für die Zeit die Annahme, daß diese Anzahl 1 ist. Beide Annahmen sind zunächst tatsächliche Wahrheiten, wenigstens ist es mir unverständlich geblieben, wie die Behauptung, daß die Anzahl der Dimensionen des Raumes $n > 3$ sein *könne*, daß er uns nur 3-dimensional *erscheine*, ernstlich verteidigt werden kann. Sie scheint vielmehr nur auf einem falschen Analogieschluß[1]) zu beruhen. Für die Zeit ist meines Wissens nichts Analoges behauptet worden. v. Helmholtz glaubte bekanntlich durch die Supposition von „verstandbegabten Wesen von nur 2 Dimensionen, die an der Oberfläche irgend eines unserer festen Körper leben und sich bewegen“[2]), die Möglichkeit einer vierten Dimension wahrscheinlicher machen zu können. Gerade so, wie sich jene „Flächenwesen“ irren, könnten wir uns auch irren, und es könnte also doch eine vierte Dimension existieren. Doch, sofern ich v. Helmholtz recht verstehe, soll ja den „Flächenwesen“ jede *Möglichkeit* der Erfahrung der dritten Dimension abgesprochen werden. Sie irren sich also gar nicht, sondern für sie hat der Raum a priori 2 Dimensionen. Außerdem begegnet die Annahme von „Flächenwesen“ an sich schon bedeutenden Schwierigkeiten, da es unklar bleibt, wie man sich diese keinen Raum einnehmenden Wesen vorstellen soll.[3]) — Wenn also die Tatsache nicht erschüttert werden kann, daß die Anzahl der Dimensionen des Raumes 3 ist, so muß doch eingeräumt werden, daß ein mehrdimensionaler Raum begrifflich möglich ist, und es bleibt daher zu untersuchen, ob wir zur Kenntnis jener Tatsache nur durch Er-

---

1) Man vgl. Wundt: „Logik“ I. S. 440 ff.

2) v. Helmholtz: „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometr. Axiome“ S. 27.

3) Man vgl. hierzu: Lotze: „Metaphysik“ S. 254 ff. — Wundt: „Logik“ I Kap. 3. — Weißenborn: „Über die neueren Ansichten vom Raume und von den geometr. Axiomen.“ — Schotten: „Inhalt und Methode des plan. Unterr. I S. 252, Fußnote.

fahrung gelangt sind, oder ob die reine Anschauung überhaupt für unsern Raum die Annahme einer größeren Anzahl von Dimensionen verbietet. Die Unterscheidung dieser beiden Fälle wird leider nicht immer genügend beachtet, und gar zu oft die Meinung geäußert, daß man die Überzeugung der Realität von begrifflich Möglichem nur durch Erfahrung gewinnen könne. Daß aber die unmittelbare *reine Anschauung selbst* uns zu einem Urteil a priori drängen *kann*, haben wir bereits auseinandergesetzt. Wie steht es damit nun in unserm Falle? Gründen wir die Überzeugung von der Richtigkeit der Tatsache der Dreidimensionalität auf Erfahrung, und sind wir vielleicht nur deshalb so fest von dieser Richtigkeit überzeugt, weil wir es hier mit einer *„ausnahmslosen Erfahrung“* zu tun haben? Das ist leicht zu entscheiden. Bei Urteilen, die durch ausnahmslose Erfahrung gefunden sind, läßt sich ihr Gegenteil noch immer sowohl denken, als auch vorstellen. Das Gegenteil bleibt noch immer den formalen Bedingungen der Erfahrung der Anschauung und den Begriffen nach konform. Man denke z. B. an das durch ausnahmslose Erfahrung gefundene Urteil: „Alle Menschen müssen sterben.“ An dessen Richtigkeit zweifelt sicher auch niemand, und doch ist ein Urteil, das diesem widerspricht, etwa: „Ein Mensch A lebt ewig“, zwar falsch, aber immer noch den *formalen* Bedingungen der Erfahrung konform. Anders steht es nun aber mit dem Urteil: „Es gibt kein Raumgebilde von mehr als 3 Dimensionen“ oder: „Es gibt kein Zeitgebilde von mehr als 1 Dimension.“ Gegen Urteile, die diesem widersprechen, ist zwar auch nichts begrifflich einzuwenden, aber ein Raumgebilde von mehr als 3 Dimensionen, bezw. ein Zeitgebilde von mehr als 1 Dimension, widerstreitet den formalen Bedingungen der Erfahrung der Anschauung nach geradeso, wie die Annahme, außer der Möglichkeit eines A und eines Nicht-A gäbe es noch eine dritte, die den formalen Bedingungen der Erfahrung den Begriffen nach entgegen wäre. — Wenn wir uns also sehr wohl Eigenschaften von Dingen anschaulich vorstellen können, die unserer ausnahmslosen Erfahrung widersprechen, und doch durchaus nicht Eigenschaften eines vierdimensionalen Raumes, so kann der Satz von der Dreidimensionalität des Raumes nicht durch ausnahmslose Erfahrung erworben sein, sondern ist a priori durch reine Anschauung gegeben. —

Zur Verteidigung der Möglichkeit von 4 Dimensionen ist von Zöllner[1]) das eigentümliche, aber weit verbreitete Argument angeführt worden, daß symmetrische Körper im 3-dimensionalen Raume nicht zur Deckung gebracht werden könnten. Ebenso wie der Beweis der

1) Zöllner: Über die Natur der Kometen“. Leipzig 1872.

Kongruenz symmetrisch gelegener ebener Figuren nur dadurch zu erbringen ist, daß man dieselben aus der Ebene herausbewegt, also die dritte Dimension benutzt, ebenso würde die Kongruenz symmetrischer Körper sich durch die vierte Dimension erweisen lassen. Zunächst ist mit Killing[1]) hiergegen einzuwenden, daß damit „nichts Wesentliches gewonnen“ wäre, da nunmehr vierdimensionale Gebilde in ihrer Gestalt und Größe übereinstimmen könnten, ohne kongruent zu sein. „Wie groß man auch die Zahl der Dimensionen annehmen mag, niemals wird der Begriff der Kongruenz identisch sein mit dem Begriff der Übereinstimmung in allen Größenbeziehungen.“ Wenn nun aber symmetrische Körper, obwohl sie doch „in allen zur Größe und Qualität gehörigen Bestimmungen völlig einerlei sind“ (Kant), einander doch nicht räumlich ersetzen, so folgt hieraus mit Notwendigkeit, daß das „Einerleisein“, das durch begriffliches Definieren bestimmt wird, und das „räumliche Ersetzenlassen“, das nur durch Anschauung gefunden werden kann, nicht ein und dasselbe ist, und daß das Denken, das nur mit Begriffen arbeitet, auf Abwege geraten kann, wenn es seinen rein logischen Deduktionen eine räumliche Interpretation geben will. Der ebenbesprochene Einwand bietet uns also gerade ein neues — wie mir scheint, nicht unerhebliches — Beweismoment für die von uns vertretene Ansicht, daß auf unsere Erkenntnis nicht nur durch das Denken, sondern auch durch die reine Anschauung ein Zwang ausgeübt wird.

1) Killing: „Einführung in die Grundlagen etc.“ I S. 268 f. — Vgl. auch: Lotze: „Metaphysik“ S. 256.

(Fortsetzung folgt.)

Rezensionen.

F. Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. Mit 28 Abbildungen. 8⁰. 47 S. Leipzig 1900, B. G. Teubner.

Besteht zwischen einer Anzahl Veränderlicher eine gesetzmäßige Beziehung, so kann man eine der Veränderlichen als abhängige, die übrigen als unabhängige Veränderliche betrachten und für alle möglichen Werteverbindungen der letzteren die zugehörigen Werte der ersteren ermitteln. Handelt es sich darum, die Werte der abhängigen Veränderlichen zu finden, so hat man häufig die Wahl, hierzu entweder den Weg der Rechnung oder der Konstruktion auf Grund der die gesetzmäßige Beziehung darstellenden Gleichung einzuschlagen. In letzterer Beziehung sind vornehmlich die graphischen Methoden, welche z. B. in der graphischen Statik in hohem Maße ausgebildet sind, bekannt. In jedem einzelnen Falle muß aber die Rechnung oder die geometrische Konstruktion von neuem durchgeführt werden, um den zugehörigen Wert der gesuchten Veränderlichen zu erhalten. Dies wird aber sehr lästig, sobald die Aufgabe in sehr vielen Fällen zu lösen ist. Handelt es sich um eine Beziehung zwischen nur zwei Veränderlichen, so wird man sich Zahlentafeln herstellen, aus denen man für jeden Wert der unabhängigen Veränderlichen den der abhängigen direkt oder durch Interpolation entnehmen kann. Solche Tafeln lassen sich auch noch für Gleichungen mit drei und mehr Veränderlichen herstellen, werden aber dann sehr unbequem.

Hier greift nun die Nomographie ein, indem sie für die Zahlentafeln Ersatz zu schaffen sucht. Zu diesem Zwecke gibt sie Methoden an, um für gesetzmäßige Beziehungen zwischen mehreren Veränderlichen graphische Tafeln (abaques) herzustellen und hierdurch rechtfertigt sich ihr Name (νόμος = Gesetz). Ist für ein bestimmtes Gesetz die entsprechende Tafel einmal konstruiert, so kann man für *jede* beliebige Werteverbindung der unabhängigen Veränderlichen den zugehörigen Wert der abhängigen Veränderlichen unmittelbar aus der Tafel ablesen, und hierin liegt eben der Unterschied gegen die gewöhnlichen graphischen Methoden.

Die Ausbildung der nomographischen Methoden ist vornehmlich das Verdienst des französischen Forschers Maurice d'Ocagne, welcher seine Resultate außer in kleineren Abhandlungen in den beiden größeren Veröffentlichungen: *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* (Paris 1891) und *Traité de nomographie* (Paris 1899) bekannt gegeben hat. Auf dieses letztgenannte Werk will die vorliegende kleine Schrift des Herrn Schilling

die Aufmerksamkeit der deutschen Mathematiker lenken und zum Studium dieses Werkes anregen. Zu diesem Zwecke werden die Methoden der Nomographie an verschiedenen Beispielen, welche durch die aus dem französischen Originale herübergenommenen Figuren illustriert sind, für Gleichungen von 2, 3, 4 und mehr Veränderlichen auseinandergesetzt. Besondere Berücksichtigung haben bei den Gleichungen mit 3 und mehr Veränderlichen die *abaques à alignement* oder, wie Herr Schilling vorschlägt, *kollinearen Rechentafeln* gefunden, denn in ihnen liegt der Schwerpunkt der Nomographie. Der Hinweis auf verschiedene theoretische Fragen, zu denen die Nomographie anregt, bildet den Schluß der Schrift, welche aus einem vom Verf. in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrage entstanden ist. (Auch in dem Artikel über *numerisches Rechnen* von R. Mehmke in Bd. I, 2 der Enzyklopädie der math. Wiss., S. 1024—1052 findet man die nomographischen Methoden besprochen.)

In Deutschland scheinen dem Ref. die nomographischen Methoden nicht ganz den verdienten Anklang gefunden zu haben. Vielleicht liegt die Schuld mit daran, daß in dem Werke von 1899 Herr d'Ocagne — im Gegensatz zu seinem ersten Werke — nicht innerhalb der Grenzen geblieben ist, in welchen seine Methoden wirklich für die Praxis brauchbar sind und mit Vorteil angewendet werden.

Karlsruhe i. B., März 1904. ROBERT HAUSSNER.

J. Lüroth, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 14 Figuren im Text. 8⁰. VI und 194 S. Leipzig 1900, B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk darf zu den erfreulichsten Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur in den letzten Jahren gezählt werden, und der Referent bedauert nur, daß verschiedene widrige Umstände ihn erst so spät zu der Besprechung desselben kommen lassen. Es kann das Buch als ein Zeichen der teilweisen Umkehr angesehen werden, welche in der jüngsten Vergangenheit auf dem mathematischen Forschungs- und Interessengebiete in Deutschland einzutreten begonnen hat, und welche neben den rein abstrakten Forschungen auch den anwendungsfähigen und direkt nützlichen wieder zu ihrem Rechte verhilft. Welcher Mathematiker hätte noch vor einem Jahrzehnt oder wenig mehr Fragen des numerischen Rechnens Beachtung geschenkt! Nicht ganz mit Unrecht herrschte sogar die Ansicht, daß Mathematiker im allgemeinen schlechte Rechner seien.

Wenn sich jetzt Mathematiker wieder auch konkreteren Untersuchungen zuzuwenden beginnen, so ist in erster Linie die sehr geringe Liebe, welche seitens der Techniker der Mathematik so häufig entgegengebracht wird, Schuld daran. Nicht ohne Berechtigung werfen sie jetzt der Mathematik vor, daß sie ihnen keine Antwort auf die ihr von der Technik gestellten Probleme zu geben vermag; in der Tat, praktischer Anwendung sind die meisten der großen und schönen mathematischen Disziplinen, welche vornehmlich in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts entstanden sind, nur schwer fähig. Die Antworten, welche die Technik von der Mathematik zu erhalten wünscht, sind nicht von der Präzisions-, sondern von der Approximationsmathematik zu erwarten, zumal dieselben nicht nur in knapper

und bequemer Form, sondern auch mit geringem Zeitaufwande erhalten werden sollen. Um dies zu leisten, muß aber die Approximationsmathematik in ganz anderem Maße noch als bisher bearbeitet und ausgebaut werden; jetzt liegen nur kleine Anfänge erst vor.

Zu den Untersuchungen, welche für die Praxis von hervorragender Bedeutung sind, gehören alle über Fragen des numerischen Rechnens, welches sowohl der Präzisions- als der Approximationsmathematik zugehört. Der ersteren allerdings nur soweit, als bei dem Rechnen nur ganze Zahlen oder endliche Dezimalbrüche in Betracht kommen. Sobald aber unendliche Dezimalbrüche auftreten, sei es als gegebene Elemente, sei es als rechnerische Hilfsmittel (Irrationalzahlen, Logarithmen, trigonometrische Funktionen u. dgl.), so befindet man sich schon im Gebiete der Approximationsmathematik. Denn, da man beim Rechnen unendliche Dezimalbrüche nicht verwenden kann, so muß man sie durch endliche ersetzen und führt dann die ganze Rechnung tatsächlich nur mit Näherungswerten. Hierdurch entstehen aber sofort für jede Rechnung und für jedes benutzte Hilfsmittel eine Reihe der wichtigsten Fragen: Wie groß ist die mit den gegebenen Hilfsmitteln und in kürzester Zeit überhaupt erreichbare Genauigkeit? Welches sind in gegebenem Falle die zulässigen Fehlergrenzen? Auf welche Art gestaltet sich die Rechnung am übersichtlichsten und ermöglicht bequeme Kontrollen? Und andere solcher Fragen mehr. Nur bei Berücksichtigung aller derartigen Gesichtspunkte ist ein rationelles numerisches Rechnen möglich.

Die gekennzeichneten Fragen, wie alle Fragen der Approximationsmathematik, erheischen ihre Beantwortung von der reinen abstrakten Theorie und sind daher geeignet, auf diese fördernd und anregend zurückzuwirken. Die Schwierigkeiten, welche sich dabei hindernd in den Weg stellen, sind häufig weit größer als die bei rein abstrakten Untersuchungen auftretenden. Und deshalb ist es nicht überraschend, unter den Mathematikern, welche sich mit Fragen des numerischen Rechnens beschäftigt haben, die bedeutendsten — es sei nur an Gauss und Fourier erinnert — zu finden.

Die vorhandenen Untersuchungen sind aber in den verschiedensten Zeit- und gelehrten Schriften weit verstreut und bei dem geringen Interesse, welches bisher die meisten Mathematiker ihnen entgegenbrachten, nur wenig bekannt. An einer zusammenfassenden Darstellung der wichtigsten Methoden und Hilfsmittel für das numerische Rechnen fehlte es. Diese Lücke füllt das vorliegende Werk in vorzüglicher Weise aus. Der Herr Verfasser beschränkt sich in demselben auf die Betrachtung der Mittel zur Erzielung großer Genauigkeit und hat deshalb die mechanischen Vorrichtungen und geometrischen Verfahren zur Erleichterung der Rechnung nicht berücksichtigt, da sie nur eine Genauigkeit von wenigen Ziffern zu gewähren imstande sind.

Allgemeine Bemerkungen über das numerische Rechnen leiten in dem ersten Kapitel das Werk ein. Es wird zunächst unterschieden zwischen dem Zahlenrechnen als Kunst und als Wissenschaft. Von der Kunst des Zahlenrechnens, welche sich nur zum Teil erlernen läßt und wesentlich von dem angebornen Talente, lange Zahlenreihen zu behalten, abhängig ist, kann natürlich in dem Buche nicht die Rede sein. Diese Kunst reicht aber auch nicht hin, um die sichere und rationelle Ausführung einer Rechnung zu garantieren; es muß vielmehr die Wissenschaft des Zahlenrechnens hinzukommen. Diese hat zu lehren, wie eine Rechnung mit möglichst geringer

Arbeit durchgeführt werden kann, und wie die Versuche, welche bei den meisten indirekten Operationen (Wurzelausziehen, Auflösen von Gleichungen, usw.) nötig fallen, zweckmäßig einzurichten oder durch systematische Verfahren zu ersetzen sind. Für die Durchführung größerer Rechnungen ist sogar die Beachtung von Äußerlichkeiten nicht unwesentlich; deshalb finden sich am Ende des ersten Kapitels Ratschläge über das zu verwendende Papier, über die Anstellung von Kontrollen, über die Zeit, während welcher man eine Rechnung ruhen lassen soll, ehe man sie von neuem zur Kontrolle durchrechnet, u. dgl. Es darf vielleicht an dieser Stelle daran erinnert werden, daß kein Geringerer als Gauß auf die Beobachtung solcher Äußerlichkeiten das größte Gewicht gelegt hat und z. B. beim Rechnen die Benutzung des Bleistiftes durchaus verwarf, nur die der Tinte gestattete.

Die folgenden drei Kapitel sind den vier elementaren Operationen der Arithmetik gewidmet. Bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation finden sich die einfachsten Rechenproben angegeben und im Anschlusse an die letztere die wichtigsten Produkt- und Quadrattafeln, ihre Einrichtungen und Benutzung besprochen. Der weiten Verbreitung, welche in der Neuzeit Rechenmaschinen gefunden haben und welche immer größer werden wird, ist durch Vorführung von drei wichtigen Typen Rechnung getragen. Die beiden ersteren, die Leibniz-Thomassche und die ältere Sellingsche sind sog. Additionsmaschinen, während die Steiger-Eglische, die sich unter der sonderbaren Bezeichnung „Millionär“ im Handel befindet, eine sog. Multiplikationsmaschine ist. Bei der Division findet man außer der gewöhnlichen Methode die geistreiche Fouriersche Methode der geordneten Division eingehend besprochen und die Ausführung von Divisionen mit der Rechenmaschine gezeigt.

Die Division führt zuerst zu unendlichen Dezimalbrüchen und leitet so zu dem Rechnen mit approximativen Werten über, welchem die übrigen Kapitel gewidmet sind. Das fünfte Kapitel gibt zunächst die Regeln für das Rechnen mit solchen ungenauen Werten und die dadurch bedingten Fehler (Berechnung von e; abgekürzte Multiplikation und Division.)

Die Hauptfehlerquelle bei einer Rechnung aber ist in der Benutzung der Tafeln mathematischer Größen, ohne welche eine größere Rechnung fast nicht durchführbar ist, zu suchen. Von solchen Tafeln kommen in erster Linie die der Logarithmen und trigonometrischen Funktionen, welche mit 4 bis 7 Stellen überall verbreitet sind, in Betracht; in zweiter Linie die Gaußschen Additions- und Subtraktionslogarithmen. Vornehmlich sind hier die Fehler untersucht, welche aus der linearen Interpolation entspringen, und ihre Einflüsse auf logarithmische Rechnungen festgestellt. Die lineare Interpolation ist bei Tafeln mit mehr als 7 Stellen oft nicht mehr statthaft, und man muß dann auf die höheren Differenzen Rücksicht nehmen (quadratische Interpolation). Besondere Beachtung findet hierbei Vegas *Thesaurus logarithmorum completus*, welcher durch den Florenzer Neudruck von 1897 wieder leicht zugänglich geworden ist. Im letzten der drei den Logarithmen gewidmeten Kapitel werden die Hilfsmittel zur Berechnung der Logarithmen der Zahlen auf 9, 15, 24 und mehr Stellen und der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen auf 15 Stellen erörtert.

Für die Berechnung von Quadratwurzeln findet man im vorletzten Kapitel das gewöhnliche, das Darbouxsche und das (auf seiner oben genannten

Methode der geordneten Division beruhende) Fouriersche Verfahren angegeben; an letzteres schließt sich das Verfahren desselben Forschers für die Auflösung quadratischer Gleichungen. Die Berechnung der Kubikwurzel leitet hinüber zu der Anwendung von Logarithmen und Reihen, bez. dem Newtonschen Näherungsverfahren, zu welchem man bei höheren Wurzelexponenten unbedingt seine Zuflucht nehmen muß. Vielleicht finden bei einer Neuauflage des Buches auch die Verfahren zur Berechnung der Quadrat- und Kubikwurzel mit Hilfe der Rechenmaschine an dieser Stelle Erwähnung.

Das letzte Kapitel enthält die Berechnung der Wurzeln der kubischen und allgemeinen trinomischen Gleichungen nach der Gaußschen und anderen Näherungsmethoden (Regula falsi, Substitutionsmethode, Benutzung von logarithmischen Differenzen), nach denen auch die komplexen Wurzeln verhältnismäßig leicht vermittelt werden können.

Dieser kurze Überblick wird den reichen Inhalt des Buches, dessen Wert durch zahlreiche Literaturnachweise noch erhöht wird, genügend erkennen lassen. Das Buch, dessen Lektüre nur die Kenntnis der Elemente der Analysis und Algebra voraussetzt, wird nicht nur allen Berufsrechnern ausgezeichnete Dienste leisten, sondern kann auf das wärmste auch allen Mathematiklehrern an höheren Lehranstalten empfohlen werden; es wird ihnen vielseitige Anregungen bieten, um sich und ihren Schülern den arithmetischen Unterricht in den höheren Klassen schmackhafter zu gestalten und ihn zu vertiefen.

Karlsruhe i. B., März 1904. ROBERT HAUSSNER.

Schenk, Julius, Dr. Ing., **Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen.** Mit 45 Figuren im Text und einer Doppeltafel, Leipzig 1903, Verlag von B. G. Teubner.

Die Schrift ist ein Rechenbeispiel für die Anwendung der Castiglianoschen Sätze vom Minimum der Formänderungsarbeit. Herr Schenk scheint die Kritik nicht zu kennen, die Herr Weingarten in seiner Besprechung der Föpplschen Vorlesungen über technische Mechanik an diesen Sätzen geübt hat. In der von Castigliano gegebenen und von Herrn Schenk wiederholten Fassung ist ihre Aussage unbestimmt und kann zu Widersprüchen und Irrtümern Veranlassung geben. Herr Schenk formuliert die Sätze so (S. 1): „Die Formänderungsarbeit, welche bei Beanspruchung eines Körpers geleistet wird, teilweise differenziiert nach einer dieser Kräfte, gibt die Verschiebung des Angriffspunktes dieser Kraft nach ihrer Richtung; bei Momenten tritt anstelle der Verschiebung die Drehung des Querschnitts. Ist nun die Verschiebung bekannt (bei den Anwendungen ist dieselbe gewöhnlich Null), so hat man eine lineare Gleichung, aus der die Kraft, falls dieselbe unbekannt ist, berechnet werden kann."

Nehmen wir nun den einfachen Fall eines an zwei Punkten gestützten Stabes, der in der Mitte die Last P trägt. E, Θ und l seien Elastizitätsmodul, Trägheitsmoment und Länge des Stabes; dann beträgt die Formänderungsarbeit $F = \frac{P^2 l^3}{E\Theta \cdot 96}$, und die Durchsenkung der Last P erhält man richtig mit $f_P = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{P l^3}{E\Theta 48}$. Schreibt man aber die Formänderungs-

arbeit als Funktion der Auflagerdrücke $A = B = \frac{P}{2}$ in den Stützpunkten A, B, so wird die Formänderungsarbeit $F = \frac{A^2 l^3}{E\Theta \cdot 24}$ und der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial A}$ gibt nicht, wie es sein müßte, für die Stützpunkte die Einsenkung null, sondern $f_A = \frac{A l^3}{E\Theta \cdot 12} = \frac{P l^3}{E\Theta\, 24}$.

Der Fall, für den diese Verschiebung f_A gilt, entsteht aus dem vorigen, wenn Angriffs- und Stützpunkte mit einander vertauscht werden; der Stab wird dann in der Mitte gehalten, und an den Enden hängt je eine Last P. Die Widersprüche verschwinden, wenn die Kräfte, nach denen die Formänderungsarbeit differenziiert wird, *statisch unbestimmt sind und eine Verschiebung gleich null haben*, und das sind eben die Fälle, in denen Herr Schenk den Satz anwendet. Er gibt dem Satz aber eine viel allgemeinere Fassung, als er für seine Rechnungen braucht, und in dieser erweiterten Fassung ist der Satz falsch.

Die Kräfte, die in elektrischen Maschinen auftreten, sind zum Teil von der Formänderung unabhängig, wie z. B. das Eigengewicht, zum Teil sind es solche, die nur dann eine Biegung bewirken, wenn eine Formänderung schon vorhanden ist. Die magnetischen Züge rufen keine Durchbiegung hervor, solange das Gehäuse genau kreisförmig und konzentrisch zum Magnetrad ist, eine Abweichung hievon verstärken die magnetischen Zugkräfte und wachsen selbst damit, da der Luftraum kleiner wird. Herr Schenk behandelt nur die erste Gruppe von Kräften, und die zweite ebenso wie die erste, nämlich als unabhängig von der Deformation. Von einer „Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen" muß gefordert werden, daß sie, wie jede wissenschaftliche Arbeit, sich Rechenschaft gibt über die begangenen Vernachlässigungen. Der Konstrukteur wird in dem Buche nicht einmal über die eigentümliche Wirkungsweise dieser Kräfte unterrichtet und lernt nur einen Teil der wirklichen Aufgabe kennen. Sekundäre Einflüße dagegen, wie Formänderungen durch Normalspannungen, werden in einer Ausführlichkeit behandelt, die offenbar die unbestrittene praktische Vielseitigkeit der Castiglianoschen Sätze unter den erwähnten Einschränkungen beweisen soll. Für Kräfte, die von der Deformation selbst abhängig sind, gelten diese Sätze freilich nicht mehr.

Es wäre für Herrn Schenk sicher eine lohnende Aufgabe gewesen, die Vorarbeiten nach der dynamischen Seite des Problems hin auszubauen, wofür eben nur die Grundgleichungen ohne Lösung aufgestellt sind. Eine solche Arbeit wäre das Gegenstück zu den zahlreichen Untersuchungen über die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last im Brückenbau. Läuft das Magnetrad exzentrisch oder schwingt es, so gerät auch das Gehäuse in Schwingungen, und die magnetischen Züge verstärken jede Deformation. Ist die Tourenzahl der Maschine teilbar durch ihre elastische Eigenschwingungszahl, so werden die dynamischen Beanspruchungen und Deformationen sehr groß. Für eine solche Auffassung des Problems ist kein Fingerzeig gegeben.

Was an der Arbeit des Studiums wert ist, sind interessante Einzelheiten; die Untersuchungen über das Magnetrad sind hinreichend vollständig zusammengestellt; die Ermittlung der statisch unbestimmten Einspannungsmomente, Schubkräfte und Züge in den Spannstangen nach ein und der-

selben allgemeinen Rechenvorschrift ist elegant durchgeführt, und die Bemerkungen über den Einfluß verschiedener Auflagerbedingungen für das Gehäuse treffen zu. Aber als eine „Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen“ mit der Vollständigkeit, die das Problem verlangt, können wir die Schrift nicht bezeichnen.

Berlin. H. Linsenmann.

Kleiber, J., Lehrbuch der Physik für humanistische Gymnasien, 2. Auflage. 319 S. Mit 392 Figuren und zahlreichen Musterbeispielen und Übungsaufgaben. München u. Berlin 1903, R. Oldenbourg. Mk. 3.

Die Kleiberschen Lehrbücher haben mit Recht große Anerkennung gefunden, was daraus hervorgeht, daß auch das vorliegende Buch schon nach 2 Jahren einer Neuauflage bedurfte. Es sind besonders zwei Umstände, welche diese Anerkennung veranlaßt haben: erstens die knappe und meistens klare Darstellung und Ausdrucksweise neben der durch die Art des Druckes hervorgebrachten Übersichtlichkeit; zweitens die Klarheit der Figuren, bei denen das Wesentliche in meistens recht guter Form hervorgehoben ist. Bei der voraussichtlich auch ferneren weiten Verbreitung der Lehrbücher erscheint es aber um so mehr geboten, auch auf einige Fehler und Schwächen hinzuweisen, die bei einer weiteren Auflage vermieden oder doch gemildert werden können.

S. 1: „Die Menge des Stoffes“ nennt man „Masse“ ist eine Definition, bei der der Schüler sich nichts denken kann. S. 2: Die Einführung des Äthers ist an dieser Stelle mindestens überflüssig. §§ 2 u. 3 könnten ohne Schaden für das Buch völlig fehlen. Die hier gebotene Molekulartheorie, in welche einige chemische Formeln lose eingeflochten sind, entbehrt der sonst dem Buche eigentümlichen Klarheit. Der „Unterschied zwischen Chemie und Physik“ ist eins von den Kapiteln, das sich seit Generationen durch fast alle Physikbücher hindurchschleppt zum Verdruß des unterrichtenden Lehrers, des unterrichteten Schülers und — vielleicht auch des Verfassers. Gedient ist niemandem damit. Wenn S. 12 spezifisches Gewicht als das „Gewicht der Volumeneinheit“ definiert ist, so ist es falsch, auf S. 13 zu sagen: „das spezifische Gewicht ist eine *unbenannte* Zahl“. S. 15: In Aufg. 6 ist der aus dem eingedampften Meerwasser erzeugte Salzrückstand aus dem auf der vorhergehenden Seite angegebenen spezifischen Gewicht des Meerwassers berechnet; das ist falsch. Wenn S. 24 definiert ist: „der Schwerpunkt ist jener Punkt, in dem man sich das Gewicht eines Körpers vereinigt denken kann“, so denkt sich der Schüler günstigsten Falles *nichts* dabei. Wenn aber S. 25 „der Schwerpunkt sozusagen der allein schwere Punkt des Körpers ist“, so wird gewiß jeder Schüler eine falsche Vorstellung vom Schwerpunkte bekommen. S. 44, Fig. 64 ist die schmückende Kulisse von Baum und Wolken bei der schiefen Ebene völlig unmotiviert; ebenso, wie S. 66, Fig. 93 Baum und Haus besser fehlen sollten, denn ein richtiges Bild der Größenverhältnisse wird hierdurch nicht erreicht. S. 83, Fig. 119 u. 121 verführt den Schüler, abgesehen von den ganz unnatürlichen Größenverhältnissen zu der falschen Vorstellung einer bestimmt abgegrenzten Atmosphäre. Wenn aber S. 84 bei der Ballotschen Windregel gesagt wird, daß beim Maximum ein „nach außen drängender, also

die Wolken zerteilender Luftstrom“ und beim Minimum ein „nach innen drängender, also die Wolken verdichtender Luftstrom“ herrscht, so muß ein Meteorologe hierbei mit Recht bedenklich den Kopf ob unserer Schulphysik schütteln. S. 129: Die in Fig. 159 abgebildete Dampfmaschine läuft überhaupt nicht, denn der Exzenter muß gegen die Kurbel der Pleuelstange um annähernd 90° verdreht sein, wenn die Maschine in Gang kommen soll. Hier beträgt aber der Winkel 180°. Bei der abgebildeten Maschine bleibt der Kolben unfehlbar in der Mitte des Zylinders stehen. S. 130: Bei der Lokomotive tritt nicht nur das „mächtige Räderpaar“, sondern die ganze Masse des Eisenbahnzuges an die Stelle des Schwungrades. S. 132: In dem Beispiele findet sich ein sinnentstellender Druckfehler, denn die ausgerechnete Maschine arbeitet nicht mit 16, sondern mit 6 Atmosphären Dampfdruck. S. 153, Fig. 188 gibt durch die unnatürlichen Größenverhältnisse der zu sehr schematisierten Figur ein ganz falsches Bild vom Bau des Ohres. S. 155, § 69: Das „Wesen des Lichts“ gehört nicht an den Anfang der Optik, auch nicht bei einem systematischen Buche. S. 165, Fig. 204, Text: Bei paralleler Lage der beiden Spiegel T und S eines Spiegelsextanten sieht man das Gestirn *nicht* „doppelt“, vielmehr benutzt man das *einfache* Bild des Gestirns zum Justieren der beiden Spiegel in die parallele Lage. S. 176, Fig. 225: Die landschaftliche Ausgestaltung des Bildes hat den Verfasser zu ganz unnatürlichen Größenverhältnissen verleitet. S. 178, Fig. 226: Die Linse L ist überflüssig und dem Texte entsprechend falsch, da Sonnenlicht verwandt werden soll. S. 192, Fig. 244: Die Beleuchtungslinse im Projektionsapparat macht die Strahlen nicht *parallel* (wie auch fälschlich im Text angegeben), sondern sie sammelt die Lichtstrahlen nach der Mitte des Projektionskopfes hin. S 195—198: Bei einem Fernrohr treten die Lichtstrahlen aus dem Okular nicht divergent, sondern parallel aus, es entsteht also gar kein virtuelles Bild. (NB. dieser Fehler findet sich bei der größten Zahl der gebräuchlichen Schulbücher für Physik). S. 206: Die elektrische Ladungseinheit wird mit Hilfe der Kraft eines Dyn erklärt; leider ist dieser Kraftbegriff aber früher noch garnicht eingeführt. Die S. 209 angegebene Erklärung des Begriffes „Volt“ ist wohl kaum ausreichend, besonders nicht, um hieraus noch andere Begriffe, wie Kapazität herzuleiten. Das Wort „Coulomb Kapazität“ ist ungebräuchlich und auch nicht ohne weiteres verständlich. S. 213: Die am Schlusse der Seite angegebene Formel für die Dielektrizitätskonstante ist durch mehrere Druckfehler entstellt. Es muß heißen $\varkappa = d/(d - \delta)$. Auch der Eigenname im Text und in der Figur des Buches ist durch einen Druckfehler entstellt. S. 218: Die noch völlig unerklärte Wimshurstmaschine gehört weder in ein Schulbuch, noch in ein Schulkabinet; auch die im vorliegenden Buche gegebene schematische Erklärung löst die Rätsel der Maschine nicht. S. 223, Fig. 289: Abgesehen von den völlig unnatürlichen Größenverhältnissen ist die Darstellung des Blitzes durch eine Zickzacklinie, sowie die Bezeichnung der Blitzbahn als Zickzack im Texte eines Physikbuches auf das schärfste zu verurteilen. Es ist schon schlimm genug, daß auf einem modernen künstlerischen Wandbilde für Schulen der Zickzackblitz noch immer gezeichnet wird. S. 240 wird die chemische Wirkung des elektrischen Stromes richtig angegeben. Trotzdem wird leider auf S. 241 wieder die Zerlegung des *Wassers* in einem langen Kapitel behandelt.

Warum nicht konsequent richtig? S. 265, Fig. 350: Die schon bei anderen Figuren gerügten unnatürlichen Größenverhältnisse haben hier zu der Zeichnung einer Induktionsspule von 150 cm Länge geführt, wenn man den Maßstab des beigezeichneten Knaben anlegt. War der Junge nötig? Auch S. 274, Fig. 363 zeichnet sich durch Vernachlässigung jeglicher richtigen Größenbeziehung zwischen Dampfmaschine, Dynamomaschine und Landschaft aus. Dieselbe Bemerkung gilt für Fig. 371, S. 281; denn wenn sich die Figur auf den danebenstehenden Text bezieht, müßte das übrigens völlig überflüssige Haus bei einer Geschwindigkeit der Kanonenkugel von nur 400 m mindestens 300 m hoch sein. S. 281 findet sich bei dem Beispiel über den Eisenbahnzug ein sinnentstellender Druckfehler; es kommt der Zug nach 10 Minuten (nicht Sekunden) zur Ruhe, wenn der Rest des Beispieles stimmen soll. S. 285, Aufg. 9 ist die Angabe der Fallhöhe überflüssig. S. 287: Bei der Fallmaschine darf man das Trägheitsmoment der Rolle nicht mit Stillschweigen übergehn, wenn man seine Versuche den Schülern gegenüber nicht fälschen will. S. 295, Fig. 383: Bei der durch die Figur dargestellten Neigung des Pferdes müßte dasselbe eine Geschwindigkeit von ca. 15 m/sek haben, während es dem Texte nach nur 6 m/sek Geschwindigkeit haben soll. Auch hier wäre ein Festhalten der richtigen Größenverhältnisse wünschenswert gewesen.

Wenn trotz der in den vorliegenden Zeilen gerügten Mängel und Fehler das Kleibersche Buch angelegentlichst empfohlen werden kann, so möge das ein Zeichen dafür sein, daß die schon im Eingange hervorgehobenen Vorzüge des Buches dasselbe vor vielen anderen Schulbüchern der Physik sehr wesentlich auszeichnen.

Hamburg. E. Grimsehl.

Astronomischer Kalender für 1904, herausgegeben v. d. k. k. Sternwarte. Wien, Karl Gerolds Sohn. 141 S. u. 12 Blätter für Notizen. Pr. 2,40 M.

Das Büchlein ist für den Laien bestimmt. Es enthält nach einer ausführlichen Genealogie einige gesetzliche Bestimmungen und Tarife für den Verkehr und eine Anleitung zum Gebrauch des Buches. Als bezeichnend für die große Mannigfaltigkeit der religiösen Bekenntnisse in Österreich folgt ein Kalendarium für Katholiken, Protestanten, Griechen, Juden und Türken. Zu jedem Tage sind noch Rektaszension und Deklination der Sonne aufgeführt. Dann kommt eine Angabe der Himmelserscheinungen im laufenden Jahr und ein Verzeichnis der Sterne bis zur vierten Größe und ihrer Standorte. Ein Anhang bespricht veränderliche Sterne, Nebelflecken, Kometen usw. Zwei populäre Abhandlungen über die Helligkeiten von Nebelflecken und über neue Planeten und Kometen schließen den Kalender. Jemand, der sich für Himmelskunde interessiert und vielleicht ein kleines Fernrohr besitzt, wird in dem Kalender Anregung zu Beobachtungen finden.

Dortmund. H. Kühne.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

128. Man dreht die Kurve, deren Gleichung $x^3 - ax^2 + ay^2 = 0$ ist, um die x-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems, so daß ihre Schleife einen Drehungskörper erzeugt. Es ist nachzuweisen, daß der größte in diesen Körper gestellte gerade Zylinder die Höhe $\frac{1}{6}a\sqrt{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$ hat.

Breslau. O. GUTSCHE.

---

129. Die allgemeine Parabel $y = \sum_0^n a_k x^k$ ist in dem Falle $n = 2$ ein Kegelschnitt, mithin das Erzeugnis projektiver Strahlenbüschel. Wie folgen die beiden Träger dieser Büschel und die erforderlichen drei Paare entsprechender Strahlen aus den gegebenen drei Punkten

$$x = 0, \qquad y = a_k$$

und den beiden absoluten Punkten

$$y = 0, \qquad x = \pm 1$$

durch lineare Konstruktion?

Holzminden. G. KOBER.

B. Lösungen.

Zu 101 (Bd. VII, 262) (L. Saalschütz). — Außer in Wertheims „Zahlenlehre" S. 348 (nicht 350, wie in Bd. VIII, 331 irrtümlich steht) ist der Satz, um den es sich handelt, auch in Webers und Wellsteins Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd. I, S. 235—236, bewiesen. Zur Zeit der Abfassung der Lösung war mir diese Literatur noch nicht bekannt; andernfalls hätte ich darauf hingewiesen.

Potsdam, 6. März 1905. OTTO MEISSNER.

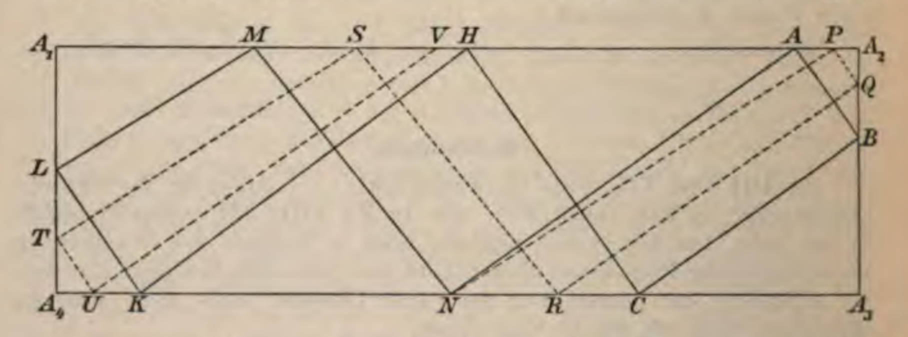
Zu 102 (Bd. VII, 314) (Paul Stäckel). *Gegeben ein Rechteck und ein Punkt auf seinem Umfange. Man ziehe von dem Punkte aus eine beliebige Gerade, errichte auf ihr da, wo sie den Umfang des Rechtecks zum zweitenmale trifft, die Senkrechte, verfahre mit dieser ebenso u. s. f. Wie muß*

man den Punkt und die Gerade wählen, um nach einer endlichen Anzahl von Konstruktionen wieder zum Ausgangspunkte zurückzukommen?

1. Die längere Seite des Rechtecks heiße a, die kürzere b. Der Fall des Quadrates, $a = b$, wird besonders behandelt werden. Unbeschadet der Allgemeinheit kann der Ausgangspunkt A auf der längeren Seite des beistehend gezeichneten Rechtecks $A_1 A_2 A_3 A_4$, der Punkt B, in dem die Gerade den Umfang des Rechtecks zum zweitenmale trifft, auf der benachbarten kürzeren Seite angenommen werden.

Nun kann leicht gezeigt werden, daß die Folge der Geraden AB, $BC, \ldots$ jede der kürzeren Seiten nur *einmal* treffen kann, falls, wie in der Aufgabe verlangt, der Punkt A nach einer endlichen Anzahl von Konstruktionen wieder erreicht werden soll. Angenommen nämlich, die Folge der Geraden treffe z. B. die Seite $A_2 A_3$ noch ein zweitesmal, in Q, so muß die Gerade PQ, welche die Seiten $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ trifft, entweder *innerhalb* des Dreiecks ABA_2 liegen oder *außerhalb*; sie liege, wie in der Figur, innerhalb von ABA_2. Dann fällt auch die nächste Gerade TU, die $A_3 A_4$ und $A_1 A_4$ verbindet, *in* das Dreieck KLA_4; mit L oder K kann weder T noch U zusammenfallen, da ja $ST \# UV \# HK \# LM$. Wegen des Parallelismus entsprechender Geraden kann nun auch die nächste Gerade, die wieder $A_1 A_2$ und $A_2 A_3$ trifft, weder mit PQ noch mit AB zusammenfallen (das letztere ergibt sich aus den obigen Überlegungen, wenn man sich die Folge der Geraden $\ldots BC$, AB über A hinaus fortgesetzt denkt). Versteht man also unter PQ diejenige Gerade der Folge, die als zweite die Seite $A_2 A_3$ trifft, so ist $PQ = AB$ oder $P = A$ eine *notwendige* Bedingung dafür, daß die Anzahl der Lote endlich ist. Ein Ausnahmefall, daß nämlich eine der Geraden in einen Endpunkt fällt, wird nachher besprochen werden.

2. $\sphericalangle B\widehat{A}A_2$ werde mit α bezeichnet, ferner $AA_2 = a_{12}$, $A_2 B = b_{11}$, $BA_3 = b_{12}$, $CA_3 = a_{21}$ gesetzt. Weiter soll KA_ν ($\nu = 1$ oder 4) $= a_{22}$ ge-



setzt werden, wobei unter K *der* Punkt verstanden ist, von dem ausgehend die nächste Gerade KL der Folge die dritte Rechtecksseite trifft. Es sei etwa $\nu = 4$, dann werde $A_4 L = b_{21}$, $LA_1 = b_{22}$ gesetzt (für $\nu = 1$ umgekehrt), ferner $A_1 M = a_{31}$ und $PA_2 = a_{32}$, wobei wie vorhin P der Punkt ist, von dem ausgehend die Gerade PQ die kürzere Seite $A_2 A_3'$ trifft. Nach Nr. 1 muß dann $a_{32} = a_{12}$ sein.

Zunächst werde der Fall $\nu = 4$ behandelt, d. h. es soll, wie in d[…]

Figur, K auf A_3A_4 liegen. Dann ist $b_{11} = a_{12}\tan\alpha$, $b_{12} = b - a_{12}\tan\alpha$, $a_{21} = b\tan\alpha - a_{12}\tan^2\alpha$ und

$$a_{22} = a - a_{21} - \lambda b\,(\cot\alpha + \tan\alpha),$$

wo λ eine ganze Zahl (in der Figur z. B. $= 1$) ist, die auch 0 sein kann; es wird nachher genauer auf die Bedeutung von λ einzugehen sein. Weiter ist $b_{21} = a_{21}\tan\alpha$, $b_{22} = b - a_{22}\tan\alpha$, $a_{31} = b\tan\alpha - a_{22}\tan^2\alpha$ und

$$(a_{32} =)\; a_{12} = a - a_{31} - \lambda b\,(\cot\alpha + \tan\alpha),$$

also

$$a_{12} = a(1 + \tan^2\alpha) - (\lambda + 1)b(1 + \tan^2\alpha)\tan\alpha - \lambda b(1 + \tan^2\alpha)\cot\alpha + a_{12}\tan^4\alpha.$$

Ordnet man diese Gleichungen nach Potenzen von $\tan\alpha = x$ und dividiert mit der stets von 0 verschiedenen Größe $(1 + \tan^2\alpha)$, so erhält sie die Form

$$a_{12}x^3 - (\lambda + 1)\,bx^2 + (a - a_{12})\,x - \lambda b = 0. \tag{1}$$

Ist nun a_{12} gegeben, $\sphericalangle\,\alpha$ gesucht, so kann man folgendes bemerken.[1]) Eine kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten hat eine oder drei reelle Wurzeln. Da hier, wie die Ausführung einer etwas umständlichen Rechnung ergibt, die Diskriminante positiv ist, so hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel. Doch erhält man nur im Falle einer *positiven* Wurzel eine wirkliche Lösung der Aufgabe, da der ganzen Herleitung nach α ein Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist.

Ist α gegeben, so erhält man für a_{12} die lineare Gleichung

$$a_{12} = \frac{1}{1 - x^2}\left\{a - \lambda b\left(x + \frac{1}{x}\right) - b\right\};$$

ein brauchbarer Wert von a_{12} muß > 0 sein. Hier spielt nun der Wert von λ eine Rolle. λ ist eine ganze Zahl; innerhalb des Intervalls $0 \cdots \left[\frac{a}{2b}\right]$ kann sie willkürlich angenommen werden. (Dabei bedeutet $[n]$ das größte Ganze $\leq n$.)

Im Falle $x = 1$, $\alpha = 45^0$, wird der Nenner der rechten Seite der letzten Gleichung null, also muß es auch der Zähler werden; d. h. der Fall $\alpha = 45^0$ erfordert, daß a ein ungerades Vielfaches von b ist. In diesem Falle gibt es dann unendlich viele Lösungen.

---

1) Für $\lambda = 0$ erhält man die *quadratische* Gleichung $a_{12}x^2 - bx + a - a_{12} = 0$; diese Gleichung ergibt sich auch aus der (entsprechend vereinfacht zu denkenden) Figur bei Betrachtung der ähnlichen Dreiecke AA_2B und CA_4D aus Proportionalität der Seiten; sie hat die Lösungen

$$x = \tan\alpha = \frac{1}{2a_{12}}\left(b \pm \sqrt{4a_{12}(a_{12} - a) + b^2}\right) \quad \text{bzw.} \quad a_{12} = \frac{a - bx}{1 - x^2}.$$

x ist nur reell, falls $\frac{b}{2} >$ als das geometrische Mittel von a_{12} und $a - a_{12}$; a_{12} muß > 0 sein, um einen brauchbaren Wert zu ergeben. (Zusatz vom 28. Mai 1905.)

3. Es bleibt jetzt der Fall zu untersuchen, daß K auf $A_1 A_2$ liegt. Dann wird

$$a_{22} = a - (\lambda + 1) b (\cot \alpha + \tan \alpha) + a_{12} \tan^2 \alpha.$$

Nun aber wird, abweichend vom vorigen Falle, $b_{21} = a_{22} \cot \alpha$, $b_{22} = b - a_{22} \cot \alpha$, $a_{31} = b \cot \alpha - a_{22} \cot^2 \alpha$ und

$$(a_{32} =)\ a_{12} = a - a_{31} - \lambda b\ (\cot \alpha + \tan \alpha) - b \tan \alpha.$$

d. h.

$$a_{12} = a - (\lambda + 1) b (\cot \alpha + \tan \alpha) + a \cot^2 \alpha - (\lambda + 1) b (\cot \alpha + \tan \alpha) \cot^2 \alpha + a_{12};$$

somit fällt a_{12} heraus, und man erhält für $x = \tan \alpha$ die quadratische Gleichung

$$x + \frac{1}{x} = \frac{a}{(\lambda + 1) b}. \tag{2}$$

Damit die Wurzeln reell seien, muß $a > 2(\lambda + 1) b$, $\lambda \leqq \left[\frac{a}{2b}\right] - 1$ sein; in diesem Falle sind beide Wurzeln positiv; die entsprechenden Winkel sind α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Solcher Werte gibt es $\left[\frac{a}{2b}\right]$, da ja λ auch $= 0$ sein kann.[1])

4. Es kann auch der Fall eintreten, daß eine Gerade der Folge einen Eckpunkt des Rechtecks trifft; in diesem Falle hat man auch eine Lösung der Aufgabe; man muß sich, wie aus einer elementaren Grenzbetrachtung hervorgeht, die Reihe der Geraden dann noch einmal, aber im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, denken.

Wie sich die Verhältnisse gestalten, wenn man statt eines Punktes in der Lage von A einen andern $(B, C, \ldots)$ zum Ausgangspunkte wählt, ist leicht einzusehen.

5. Im Falle des Quadrates ist $a = b$. Aus Nr. **1** geht hervor, daß (den Fall, daß eine der Geraden eine Ecke trifft, ausgeschlossen) der Linienzug aus 4 Geraden bestehen muß. Behält man die früheren für das Rechteck eingeführten Bezeichnungen bei und setzt $b = a$, so wird $b_{11} = a_{12} x$, $b_{12} = a - a_{12} x$, $a_{21} = a x - a_{12} x^2$, $a_{22} = a(1 - x) + a_{12} x^2$, $b_{21} = a(x - x^2) + a_{12} x^3$, $b_{22} = a(1 - x + x^2) - a_{12} x^3$, $a_{31} = a(x - x^2 + x^3) - a_{12} x^4$ und $(a_{32} =)\ a_{12} = a(1 - x + x^2 - x^3) + a_{12} x^4$ oder

$$a_{12}(x^4 - 1) = a(x^3 - x^2 + x - 1). \tag{3}$$

Für $x = 1$ werden beide Seiten $= 0$; die Gleichung hat, wie geometrisch evident, im Falle $\alpha = 45^0$ unendlich viele Lösungen [b ist ein ungerades Vielfaches von a, nämlich $1 \cdot a$, vergl. Nr. **2**]. Für $x \neq 1$ kann durch $x^4 - 1$ dividiert werden:

$$\frac{a_{12}}{a} = \frac{x^4 + 1}{(x - 1)(x^4 - 1)} = \frac{x^4 + 1}{x^5 - x^4 - x + 1}.$$

Ist nun a_{12} gegeben, so steht links ein echter Bruch; also muß $x^5 - x^4 - x + 1 > x^4 + 1$ oder $x^4 > 2x^3 + 1$, $x > \xi$ sein, wo ξ die zwischen 2 und 3 liegende Wurzel der Gleichung $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ bedeutet, damit auch die rechte Seite der Gleichung < 1 ist. Es gibt also stets noch einen zweiten Winkel $\alpha > 45^0$ (bei gegebenem a_{12}), für den die Aufgabe lösbar ist. Ist x gegeben, so ist die Aufgabe nur, dann aber auch immer und eindeutig lösbar, falls $x > \xi$ ist.

Es gibt nun *noch eine Reihe* von Lösungen, bei denen eine Gerade der Folge einen Eckpunkt trifft. Das gilt, wie schon bemerkt, auch für ein beliebiges Rechteck. Hier soll dieser Sonderfall noch etwas näher betrachtet werden.

Es sei a_{12} gegeben ($= AA_2$ auf A_1A_2), dann liefert die positive Wurzel jeder der Gleichungen:

$$(4) \qquad a_{12} = ax^{\varepsilon}(1 - x + x^2 \mp \cdots \pm x^n), \ \varepsilon = 0 \text{ oder } 1,$$

eine Lösung der Aufgabe, bei der der Linienzug in einer Quadratecke endigt, und zwar ist $x = \cot\alpha$ zu setzen. Für $n = 0$ z. B. ist schon die Gerade AB von der genannten Art: es ist $B = A_3$. Für $n = 1$ ist $C = A_4$ usw.

Ist umgekehrt α gegeben, so muß $\alpha > 45^0$, x, hier $= \cot\alpha$ genommen, also < 1 sein; dann hat man *beliebig viele* Lösungen der Aufgabe, da n willkürlich gewählt werden kann; für ein bestimmtes n $(\geqq 0)$ aber gibt es nur eine Lösung.

Daß hier immer die Bedingung $\alpha > 45^0$ vorkommt, liegt daran, daß bei der Aufeinanderfolge der Lote stets ein bestimmter Sinn (entsprechend der Drehung des Uhrzeigers) gewählt worden ist.

6. Man kann also die in der Aufgabe gestellte Frage etwa folgendermaßen beantworten:

I. a_{12} *gegeben*, α *gesucht*. Es gibt stets „uneigentliche" Lösungen, bei denen eine Gerade der Folge von Loten eine Ecke des Rechtecks trifft; sieht man hiervon ab, so erhält man eine kubische Gleichung für $\tan\alpha$, in der noch eine willkürliche Zahl $\lambda\left(0 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{a}{2b}\right]\right)$ vorkommt. Hat diese Gleichung eine positive reelle Wurzel (für ein bestimmtes λ), so läßt die Aufgabe eine Lösung zu; die Anzahl der Lote ist $(\lambda + 1)4$. Ist a ein ungerades Vielfaches von b, so ist $\alpha = 45^0$ zu nehmen.

II. α *gegeben*, a_{12} *gesucht*. Man erhält für a_{12} eine lineare Gleichung, also eine Lösung der Aufgabe, falls die Wurzel positiv ist. Für $\alpha = 45^0$, $a = (2\nu + 1)b$, kann a_{12} jeden Wert zwischen 0 und a annehmen, allgemeiner für

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{a}{(\lambda + 1)b}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq \left[\frac{a}{2b}\right] - 1.$$

Endlich erhält man dadurch noch beliebig viele Lösungen, daß man von einem Endpunkte des Rechtecks aus unter dem Winkel α eine Linie zieht und sie zur ersten der Folge von Loten (AB, BC, ...) macht (uneigentliche Lösungen).

Potsdam, am 8. März 1905. Otto Meissner.

Zu **108** (Bd. VIII, S. 173) (W. Franz Meyer). Die in **9**, 95 gegebene Behandlung der Aufgabe ist nicht richtig, denn aus $(ap)^2 \equiv 1 \pmod q$ folgt nicht $\left(\frac{ap}{q}\right) = 1$. Die richtige Lösung ist folgende:

Es ist

$$ap \equiv -\left(\frac{q}{p}\right) \pmod q,$$

also

$$(ap)^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q},$$

d. h.

$$\left(\frac{ap}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q-1}{2}},$$

und da

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

ist, so folgt

$$\left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^{\frac{p+1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q+1}{2}}.$$

Ist also 1) $q = 4k + 1$, so ist

$$\left(\frac{a}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Ist 2) $q = 4k + 3$, so ist

$$\left(\frac{a}{q}\right) = (-1)^{\frac{p+1}{2}}.$$

Durch Vertauschung von p mit q und a mit b erhält man die entsprechenden Werte von $\left(\frac{b}{p}\right)$.

Straßburg i./E. ——— P. Epstein.

Zu **114** (Bd. VIII, S. 262) (L. Saalschütz). — Für die Aufgabe: „Es sind zwei ganze, ganzzahlige Funktionen von x, die eine $f_1(x)$ vom ersten, die andere $f_2(x)$ vom zweiten Grade vorgelegt; man soll angeben, wie sich erkennen läßt, ob es ganzzahlige (positive oder negative) Werte von x gibt, für welche $f_1(x)$ in $f_2(x)$ aufgeht, und an einem passend gewählten Beispiel die gefundene Methode veranschaulichen," finde ich folgende elementare Lösung. Es würde mich wundern, wenn sie noch nicht bekannt wäre.

Die vorgelegten Funktionen seien:

$$f_1(x) = a_1 + b_1 x, \qquad f_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2.$$

Vorderhand wollen wir annehmen, daß a_1 und b_1 keinen gemeinsamen Teiler haben. Dann dürfen wir $f_2(x)$ mit b_1^2 multiplizieren, weil, wenn $b_1^2 f_2(x)$ durch $f_1(x)$ teilbar ist, gewiß auch $f_2(x)$ durch $f_1(x)$ teilbar ist;

$$b_1^2 f_2(x) = a_2 b_1^2 + b_1^2 b_2 x + b_1^2 c_2 x^2.$$

Nun ist: $b_1 x = f_1(x) - a_1$.

Wenn wir dies in die Gleichung für $b_1^2 f_2(x)$ einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} b_1^2 f_k(x) &= a_2 b_1^2 + b_1 b_2 \left(f_1(x) - a_1\right) + c_2 \left(f_1(x) - a_1\right)^2 \\ &= a_2 b_1^2 - a_1 b_1 b_2 + a_1^2 c_2 + \left(b_1 b_2 - 2 a_1 c_2\right) f_1(x) + c_2 \left(f_1(x)\right)^2. \end{aligned}$$

Es wird also $b_1^2 f_2(x)$, und $f_2(x)$ selbst, dann durch $f_1(x)$ teilbar sein, wenn der Ausdruck

$$R = a_1^2 c_2 - a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1^2,$$

welcher die Resultante von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ist, durch $f_1(x)$ teilbar ist. Jeder Teiler t von R gibt nun, wenn wir ihn mit $f_1(x)$ identifizieren, Anlaß zu einer Gleichung von der Form $a_1 + b_1 x = t$.

Von derartigen Gleichungen sind dann die brauchbar, welche für x ganzzahlige Werte liefern.

Beispiel:

$$f_1(x) = 4 + 3x, \qquad f_2(x) = -7 + 5x + 2x^2.$$

Es ist $R = -91$. Die Teiler von R sind: $t = \pm 1, \pm 7, \pm 13, \pm 91$.

Von den acht Gleichungen $4 + 3x = t$ sind folgende vier brauchbar:

$3x + 4 = +1$	$x = -1$	$f_2(-1) = -10$	$f_1(-1) = 1$
$= +7$	$x = +1$	$f_2(+1) = 0$	$f_1(+1) = 7$
$= +13$	$x = +3$	$f_2(+3) = 26$	$f_1(+3) = 13$
$= +91$	$x = +29$	$f_2(+29) = 1820$	$f_1(+29) = 91.$

Haben a_1 und b_1 ein größtes gemeinsames Maß m, so daß wir schreiben können:

$$f_1(x) = m\,(a_1' + b_1' x) = m \cdot \varphi_1(x),$$

so lösen wir das Problem in der angegebenen Weise für die beiden Funktionen $f_2(x)$ und $\varphi_1(x)$ und erhalten dadurch alle ganzzahligen Werte von x, welche die Gleichung $\frac{f_2(x)}{\varphi_1(x)} = q$ für ganzzahlige q erfüllen. Von diesen Werten von x sind aber nur jene brauchbar, welche q durch m teilbar machen. Denn es ist:

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{q}{m} = q';$$

q' soll ja ganzzahlig werden.

Beispiel:

$$f_1(x) = -54 + 45x = 9(-6 + 5x), \qquad f_2(x) = 3 - 8x + 17x^2.$$

Es ist also:

$$m = 9 \text{ und } \varphi_1(x) = -6 + 5x.$$

Die Resultante R von $f_2(x)$ und $\varphi_1(x)$ ist $R = 447$, und ihre Teiler sind:

$$t = \pm 1, \pm 3, \pm 149, \pm 447.$$

Von den acht dazugehörigen Gleichungen liefern die folgenden zwei zunächst ganzzahlige Werte für x:

$-6 + 5x = -1$	$x = 1$	$f_2(1) = 12$	$\varphi_1(1) = -1$
$= +149$	$x = 31$	$f_2(31) = 16092$	$\varphi_1(31) = 149.$

Im ersteren Falle ist $q = -12$ und im zweiten $q = +108$. Da nun q durch $m = 9$ teilbar sein soll, so ist nur der zweite Wert für unsere Aufgabe brauchbar: $x = 31$.

Ist $R = 0$, so ist $f_2(x)$ für jeden Wert von x durch $f_1(x)$, resp. $\varphi_1(x)$, teilbar.

Aussig. A. Krug.

Zu **115** (Bd. VIII, 262) (L. Saalschütz). — *Gegeben sind zwei ganze ganzzahlige Funktionen von x, $f_1(x)$ vom ersten, $f_2(x)$ vom zweiten Grade; woran läßt sich erkennen, ob es ganzzahlige Werte von x gibt, die die Kongruenz $f_2 \equiv 0$ (mod. f_1) befriedigen, und welches sind diese Werte?*

1. Es werde gesetzt $f_1(x) = lx + m$, $f_2(x) = ax^2 + bx + c$. Haben f_1 und f_2 einen gemeinsamen Teiler nullten Grades, so kann man diesen einfach fortlassen. Haben sie einen Teiler ersten Grades, $\alpha x + \beta$, gemeinsam, und ist etwa $f_1(x) : (\alpha x + \beta) = l_1$, $f_2(x) : (\alpha x + \beta) = a_1 x + b_1$, so ist die Kongruenz $a_1 x + b_1 \equiv 0 \pmod{l_1}$ zu lösen; diese lineare Kongruenz hat im Falle, daß l_1 und a_1 teilerfremd sind, stets eine Lösung; im übrigen braucht, da l_1 eine von x unabhängige Konstante ist, hier nicht näher darauf eingegangen zu werden.

2. Setzt man $lx + m = x_1$, so wird

$$(1) \qquad l^2 f_2(x) = a x_1^2 + (bl - 2am)\, x_1 + cl^2 - bml + am^2;$$

soll also $x_1 = f_1(x)$ in $f_2(x)$ aufgehen, so ist dazu sicher *notwendig*

$$(2) \qquad d = cl^2 - bml + am^2 \equiv 0 \pmod{x_1}.$$

Nun ist d eine ganz bestimmte, von x unabhängige *Zahl*; der Fall $d = 0$ ist schon im § 1 erledigt. Bezeichnet man also irgend einen — echten oder unechten — Teiler von d mit δ, so muß $x_1 = lx + m = \delta$ sein, damit f_1 in f_2 aufgehe; ist also $\delta - m$ nicht durch l teilbar, so gibt es keinen ganzzahligen Wert x_1, der die Kongruenz $f_2(x) \equiv 0$ (mod. f_1) befriedigt; ist aber $\delta - m$ durch l teilbar, etwa $= \xi l$, so befriedigen $\xi = \frac{\delta - m}{l}$ und $\xi' = -\frac{\delta - m}{l}$ die Kongruenz $l^2 f_2(x) \equiv 0$ (mod. f_1).

3. Durch Betrachtung von $l^2 f_2(x)$ statt $f_2(x)$ kann man unter Umständen *fremde* Lösungen erhalten, nämlich wenn $f_1(x) = x_1 = \lambda(l_1 x + m_1)$ ist, d. h. wenn l und m keine relativen Primzahlen sind. In diesem Falle wird Gleichung (1) durch λ^2 teilbar:

$$(3) \qquad l_1^2 f_2(x) = a\bar{x}_1^2 + (bl_1 - 2am_1)\bar{x}_1 + cl_1^2 - bl_1 m_1 + am_1^2,$$

wenn man $x_1 = \lambda \bar{x}_1$ setzt.

Schreibt man zur Abkürzung $l_1^2 f_2 = A\bar{x}_1^2 + B\bar{x}_1 + d_1$, so soll dies $\equiv 0 \pmod{\lambda x_1}$ sein, was offenbar nur möglich ist, falls $\bar{x}_1$ ein Teiler δ_1 von d_1 ist. Ist für keinen Teiler δ_1 von d_1 : $A\delta_1^2 + B\delta_1 + d_1 \equiv 0 \pmod{\lambda \delta_1}$, so ist die verlangte Kongruenz ($f_2 \equiv 0$ (mod. f_1)) unmöglich; ist aber obige Kongruenz erfüllt, so muß noch $\delta_1 = l_1 \xi + m_1$ sein, d. h. es muß $\delta_1 - m_1 \equiv 0 \pmod{l_1}$ sein. Nur im letzteren Falle gibt es eine ganzzahlige Lösung $x = \xi$ der Kongruenz $f_2 \equiv 0$ (mod. f_1).

4. *Beispiele*: I. *Für welche Werte von x ist $3x^2 + 5x + 7$ durch $2x + 3$ teilbar?* In diesem Falle ist $d = 25$, hat also die Teiler 1, 5, 25; ihm entsprechen die Werte $\xi_1 = -1$, $\xi_1' = -2$; $\xi_2 - 1$, $\xi_2' = -4$; $\xi_3 = 11$, $\xi_3' = -14$, die x-Werte sind alle ganzzahlig; für sie ist in der Tat, wie die Ausrechnung lehrt, $3x^2 + 5x + 7$ durch $2x + 3$ teilbar.

II. *Für welche ganzzahligen Werte von x geht $30x + 5$ in $9x^2 + 8x + 13$ auf?* Setzt man $30x + 5 = 5\bar{x}_1$, so hat man $9\bar{x}_1^2 + 30\bar{x}_1 + 429$, was durch $5\bar{x}_1$ teilbar sein soll; $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$, $\bar{x}_1 = 13$ gesetzt macht

$9\bar{x}_1^2 + 30\bar{x}_1 + 429 = 13 \cdot 9 \cdot 20$, also durch $5 \cdot 13$ teilbar; $\bar{x}_1 = 13$ entspricht der ganzzahlige Wert $x = 2$, für den in der Tat $f_1 = 65$ in $f_2 = 65$ aufgeht. Man findet ferner, daß für keinen sonstigen Wert $f_2(x)$ durch $f_1(x)$ teilbar ist.

Potsdam, am 25. Januar 1905. OTTO MEISSNER.

Zu **117.** (Bd. VIII. 327) (P. Epstein). — Die Größe $\theta_{m,k}$, die durch den Ausdruck definiert ist:

$$\theta_{m,k} = \frac{1}{k!}\left[k^m - \binom{k}{1}(k-1)^m + \binom{k}{2}(k-2)^m - \binom{k}{3}(k-3)^m + \cdots\right],$$

erlaubt, wie man ohne weiteres sieht, folgende Darstellung:

$$\theta_{m,k} = \frac{1}{k!} D^m (e^x - 1)^k_{(0)},$$

worin die Marke (0) bedeutet, daß nach ausgeführter Differenziation $x = 0$ zu setzen ist. Im Ausdrucke $(e^x - 1)^k$ ist, wenn man ihn nach Potenzen von x entwickelt, x^k die niedrigste Potenz, daher verschwindet $\theta_{m,k}$, sobald $k > m$ ist.

Man kann also in der Summe $\Theta_m = \sum_{k=1}^{m} \theta_{m,k}$ die Summation statt von 1 bis m auch von 1 bis ∞ ausdehnen und erhält dann:

$$\Theta_m = \sum_{k=1}^{r} D^m \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = D^m (e^{e^x - 1} - 1)_{(0)}$$

oder

$$(1) \qquad \Theta_m = D^m (e^{e^x - 1})_{(0)}.$$

Diese Gleichung kann man auch schreiben:

$$(2) \qquad e^{e^x - 1} = 1 + \frac{\Theta_1 x}{1} + \frac{\Theta_2 x^2}{1.2} + \frac{\Theta_3 x^3}{1.2.3} + \cdots,$$

so daß die Funktion linker Hand als Erzeugende angesehen werden kann. Differenziert man die Gleichung (2) einmal nach x, so erhält man die von Herrn P. Epstein angegebene Gleichung.

Setzt man zur Abkürzung $e^{e^x - 1} = v$, so ist $Dv = e^x \cdot v$, $D^2 v = (e^x + e^{2x}) v = (1 + e^x) \cdot e^x v$, usw.

Daher nach (1)

$$\Theta_m = D^m(v)_{(0)} = D^{m-1}(e^x \cdot v)_{(0)} = D^{m-2}[(1 + e^x) e^x v]_{(0)} = \cdots$$

und nach den Regeln für die Differentiation eines Produktes

$$\Theta_m = \Theta_{m-1} + \binom{m-1}{1}\Theta_{m-2} + \binom{m-1}{2}\Theta_{m-3} + \cdots$$

oder symbolisch

$$(3) \qquad \Theta^m = (\Theta + 1)^{m-1},$$

wobei $\Theta^i = \Theta_i$ zu setzen ist, und ebenso

$$\Theta_m = 2\,\Theta_{m-1} + \binom{m-2}{1}\Theta_{m-2} + \binom{m-2}{2}\Theta_{m-3} + \cdots$$

oder symbolisch

$$\Theta^m = \Theta^{m-1} + \Theta(\Theta+1)^{m-2}. \tag{4}$$

Aus der Gleichung (4) kann man die von Herrn P. Epstein angegebene Determinante ableiten:

$$\Theta_m = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \cdot\ \cdot & \frac{1}{(m-2)!} \\ -(m-2) & 2 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdot\ \cdot & \frac{1}{(m-3)!} \\ 0 & -(m-3) & 2 & \frac{1}{1!} & \cdot\ \cdot & \frac{1}{(m-4)!} \\ 0 & 0 & -(m-4) & 2 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \frac{1}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Multipliziert man nämlich die erste Zeile mit $(m-2)!$, die zweite mit $(m-3)!$, die dritte mit $(m-4)!$ usw. und die letzte mit $0! = 1$, und dividiert man hierauf die erste Kolonne durch $(m-2)!$, die zweite durch $(m-3)!$, die dritte durch $(m-4)!$ usw., so entsteht aus obiger Determinante die folgende:

$$\Theta_m = \begin{vmatrix} 2 & \binom{m-2}{1} & \binom{m-2}{2} & \binom{m-2}{3} & \cdots & & \binom{m-2}{m-2} \\ -1 & 2 & \binom{m-3}{1} & \binom{m-3}{2} & \cdots & & \binom{m-3}{m-3} \\ 0 & -1 & 2 & \binom{m-4}{1} & \cdots & & \binom{m-4}{m-4} \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

und diese Gleichung ergibt sich sofort durch Auflösung des aus (4) folgenden Systems nach Θ_m:

$$\begin{aligned} \Theta_m - 2\,\Theta_{m-1} - \binom{m-2}{1}\Theta_{m-2} - \cdots - \binom{m-2}{m-3}\Theta_2 &= \binom{m-2}{m-2}\Theta_1 \\ \Theta_{m-1} - \quad 2\,\Theta_{m-2} - \cdots - \binom{m-3}{m-4}\Theta_2 &= \binom{m-3}{m-3}\Theta_1 \\ \Theta_{m-2} - \cdots - \binom{m-4}{m-5}\Theta_2 &= \binom{m-4}{m-4}\Theta_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \Theta_3 - 2\Theta_2 &= \Theta_1 \\ \Theta_2 &= 2\Theta_1, \end{aligned}$$

wobei $\Theta_1 = 1$.

Aus der Gleichung (3) kann man ein ähnliches System ableiten; löst man dieses dann nach Θ_m auf, so erhält man die Determinante:

$$\Theta_m = \begin{vmatrix} 1 & \binom{m-1}{1} & \binom{m-1}{2} & \binom{m-1}{3} & \cdots & & \binom{m-1}{m-2} & 1 \\ -1 & 1 & \binom{m-2}{1} & \binom{m-2}{2} & \cdots & & \binom{m-2}{m-3} & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \binom{m-3}{1} & \cdots & & \binom{m-3}{m-4} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & & \binom{m-4}{m-5} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aussig a. E., den 15. März 1905. A. Krug.

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

3. Kleinere Notizen.

Über eine Haupteigenschaft des Feuerbachschen Kreises.

Der Lehrsatz, daß der Feuerbachsche Kreis eines Dreiecks ABC den Inkreis und die drei Ankreise berührt, ist schon oft bewiesen worden. Unter den mir bekannten Beweisen ist aber keiner derartig, daß ihn die Obertertianer oder Untersekundaner einer Realanstalt ohne weiteres verstehen können.[1]) Ausgenommen ist meines Wissens nur der von Binder herrührende Beweis, der in Baltzers Elementen der Mathematik (Bd. II, S. 92, 93; 6. Aufl.) abgedruckt ist. Aber hier wird nur gezeigt, daß der Feuerbachsche Kreis den Inkreis berührt, und am Schlusse wird darauf hingewiesen, daß für einen Ankreis sich ein entsprechender Beweis liefern läßt. Mir aber schien es wünschenswert, auf möglichst einfache Art zu gleicher Zeit zeigen zu können, daß der Feuerbachsche Kreis den Inkreis und einen Ankreis berührt. Ich habe nun vor kurzem folgenden Beweis gefunden, der meines Wissens neu ist:

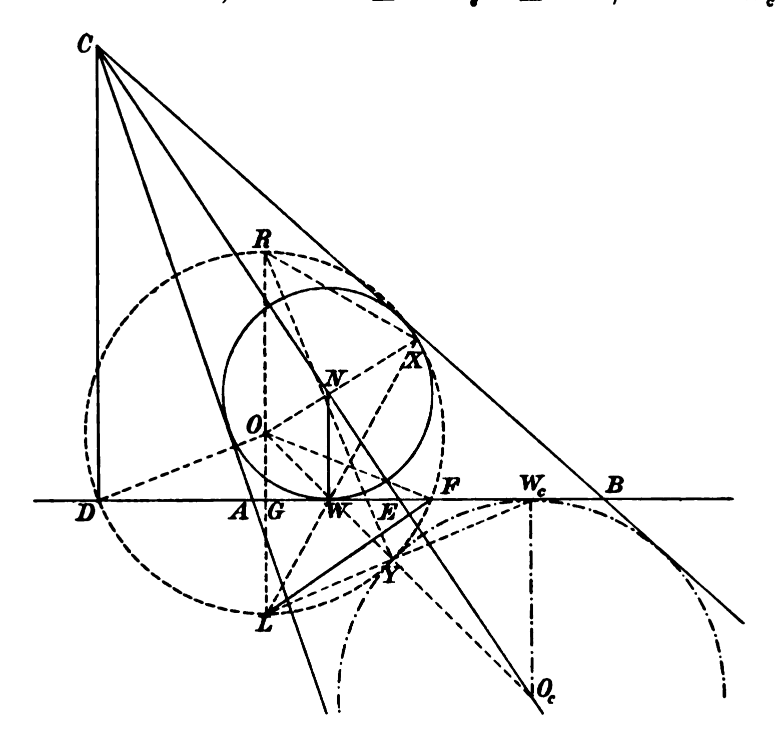
Es seien N und O_c die Mittelpunkte des Inkreises des Dreiecks ABC und des zur Seite AB gehörigen Ankreises, von denen der erste AB in W, der zweite in W_c berühren möge. Dann läßt sich durch den Mittelpunkt F von AB, der zugleich WW_c halbiert, ein einziger Kreis legen, der den Kreis um N im Punkte X einschließend und den Kreis um O_c in Y ausschließend berührt. Man hat nun zu zeigen, daß dieser Kreis, dessen Mittelpunkt O sein möge, der Feuerbachsche ist. Zu diesem Zwecke ge-

1) Man vergleiche jedoch: J. Lange, „Geschichte des Feuerbachschen Kreises". Progr. Friedr.-Wedersche Oberrealschule 1894; ferner eine Reihe neuerer Beweise in den Ed. Times. Red.

nügt der Nachweis, daß der zweite Schnittpunkt D dieses Kreises und Seite AB der Fußpunkt der durch C laufenden Dreieckshöhe und außerdem $\angle DOF = 2(\angle CAB - \angle CBA) = 2(\alpha - \beta)$ ist.

Fällt man, um diesen Beweis zu führen, von O auf AB das Lot dessen Verlängerung den Kreis um O in L trifft, dann folgt aus der lichkeit der Dreiecke LOX und WNX, daß $\angle OXL = NXW$, also X eine Gerade ist. Ebenso geht aus der Ähnlichkeit von $\triangle OLY$ $\triangle O_c W_c Y$ hervor, daß die Punkte L, Y und W_c in einer Geraden li

Trifft LO den Kreis um O in R, so ist $\triangle LGW \sim \triangle LXR$, $LW \cdot LX = LG \cdot LR$; ferner ist $\triangle LGW_c \sim \triangle LYR$, daher LW_c



$= LG \cdot LR$, mithin $LW \cdot LX = LW_c \cdot LY$. Folglich liegt Punkt L der Chordale der Kreise um N und O_c; diese geht aber durch die Mit der gemeinsamen Tangente WW_c und steht auf der Zentrale NO_c : recht, die mit der Winkelhalbierenden CE zusammenfällt. Da $\angle CEA = 90^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}$ ist, so muß $\angle LFD = \frac{\alpha - \beta}{2}$, daher $\angle$ $= 2(\alpha - \beta)$ sein.

Nach dem Sehnen- und Sekantensatze ist

$$DW \cdot WF = XW \cdot WL = \frac{XW \cdot WL \cdot LX}{LX}$$

und

$$DW_c \cdot W_cF = YW_c \cdot W_cL = \frac{YW_c \cdot W_cL \cdot LY}{LY}.$$

Durch Division ergibt sich, da $WL \cdot LX = W_c L \cdot LY$ ist,

$$\frac{DW}{DW_c} = \frac{XW \cdot LY}{YW_c \cdot LX} = \frac{XW}{LX} \cdot \frac{LY}{YW_c} = \frac{NW}{OL} \cdot \frac{OL}{O_c W_c} = \frac{\varrho}{\varrho_c}.$$

Der Punkt D teilt also WW_c außen im Verhältnis der Radien ϱ und ϱ_c, er ist daher der vierte harmonische Punkt zu WW_cE, mithin der Fußpunkt der von C auf AB gefällten Höhe. Somit ist der Kreis um O der Feuerbachsche Kreis.

Breslau, im April 1904. O. Gutsche.

Zur Konstruktion der regelmäßigen Vielecke 3. Ordnung.

In den Scheitelprojektionen der drei Punkte, von denen in den Fällen $\frac{m}{3} = 1, 2$ die Eckenpaare des regelmäßigen $(2m+1)$-Eckes linear abhängen, wird der Einheitskreis, wie die Anwendung seiner Gleichung auf die Gleichung der projizierenden drei Strahlen beweist, von einer das Projektionszentrum $(0, 1)$ und den unendlich fernen Punkt $(\infty, 0)$ der x-Achse enthaltenden Hyperbel geschnitten.

Im Falle $m = 1 \cdot 3$ liegen die drei Punkte

$$(x^3 - 2x) + (x^2 - 1) = 0, \quad y = -1,$$

deren Abszissen die doppelten Abszissen der 3 Eckenpaare des regelmäßigen 7-Eckes sind, in den drei Scheitelstrahlen

$$8x^3 + 4x^2(1-y) - 4x(1-y)^2 - (1-y)^3 = 0,$$

welche die übrigen drei Schnittpunkte des Kreises $x^2 = (1+y)(1-y)$ und der ebenfalls durch das Projektionszentrum gehenden Hyperbel

$$4x(3y+1) = (5y+3)(y-1)$$

projizieren. Dieselbe hat eine der x-Achse parallele Asymptote $3y + 1 = 0$ und wird im Punkte $(0, 1)$ von $2x = y - 1$ und in dem Punkte $(-\frac{1}{2}, -1)$ von $4x = 3y + 1$ berührt; beide Tangenten schneiden sich in $(-2, -3)$. Mit diesem Punkte liegen jedesmal die beiden Punkte auf $(1+y)(1-y) = 0$ in gerader Linie, die von den Strahlen der beiden ersten Punkte in einen dritten Punkt der Hyperbel projiziert werden.

Die drei Punkte

$$(x^3 - 4x) + (x^2 + 1) = 0, \quad y = -1$$

des Falles $m = 2 \cdot 3$, deren Abszissen

$$x_1 + x_5 = x_2 x_3, \quad x_2 + x_3 = x_4 x_6, \quad x_4 + x_6 = x_1 x_5$$

die Doppelabszissen $x_k = 2\cos\frac{2k\pi}{13}$ der 6 Eckenpaare des regelmäßigen 13-Eckes paarweise bestimmen, sind die Scheitelprojektionen der drei Punkte, in denen der Kreis $x^2 = (1+y)(1-y)$ und die dessen Scheitel $(0, 1)$ enthaltende Hyperbel

$$16xy = (3y+5)(y-1)$$

einander außerdem schneiden. Auch diese Hyperbel hat in dem Punkte (0, 1) die Tangente $2x = y - 1$; jetzt ist jedoch die zweite Tangente $4x = 2y + 3$ der ersten parallel und die x-Achse selbst die erste Asymptote. Von dem Durchmesser $8x = 1 - y$ und seinem konjugierten Durchmesser $8x = 1 + 4y$ werden beide Asymptoten harmonisch getrennt; hierdurch ist auch die zweite Asymptote $16x = 3y + 2$ als zweite Diagonale eines durch zwei Gegenecken und die Richtungen der Gegenseiten gegebenen Parallelogrammes der Lage nach bestimmt.

Auf diese Weise läßt sich offenbar noch einfacher und auch natürlicher als durch die Dreiteilung des Winkels, die jedesmal, auch bei Anwendung des von Kosch (Archiv Bd. 58, Jahrg. 1875) aus der Symmetrie des transversalen Hyperbelschnittes abgeleiteten Verfahrens, eine Änderung der Gleichung und des Kreises nötig macht, die Konstruktion der regelmäßigen Vielecke 3. Ordnung bewerkstelligen.

Holzminden, Februar 1905. GEORG KOBER.

Die transformierte Kreisteilungsgleichung und ihre Reduktion auf eine Gleichung, deren Grad nicht mehr teilbar ist.

Um einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen, muß man die ursprüngliche Gleichung der Teilpunkte in eine Gleichung der Abszissen dieser Punkte transformieren. Man braucht zu diesem Zwecke nur der Reihe nach

$$\begin{aligned}
\varepsilon^1 + \varepsilon^{-1} &= + x \\
\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} &= - 3x + x^3 \\
\varepsilon^5 + \varepsilon^{-5} &= + 5x - 5x^3 + x^5 \\
\varepsilon^7 + \varepsilon^{-7} &= - 7x + 14x^3 - 7x^5 + x^7 \quad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} &= - 2 + x^2 \\
\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} &= + 2 - 4x^2 + x^4 \\
\varepsilon^6 + \varepsilon^{-6} &= - 2 + 9x^2 - 6x^4 + x^6 \\
\varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} &= + 2 - 16x^2 + 20x^4 - 8x^6 + x^8 \quad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

zu setzen, dann wird aus der Gleichung

$$\frac{\varepsilon^{2m+1} - 1}{\varepsilon - 1} \equiv 1 + \sum_1^m (\varepsilon^k + \varepsilon^{-k}) = 0$$

der konjugierten Punkte $\varepsilon^{\pm k} = \cos \frac{2k\pi}{2m+1} \pm i \sin \frac{2k\pi}{2m+1}$ die Gleichung

$$x^m - \frac{m-1}{1} x^{m-2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} x^{m-4} - \cdots$$
$$+ x^{m-1} - \frac{m-2}{1} x^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} x^{m-5} - \cdots = 0$$

der doppelten Abszissen $\varepsilon^k + \varepsilon^{-k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{2m+1} = x_k$.

Für jede der natürlichen Zahlen von 1 bis $2m$ gilt unter der Voraussetzung, daß $2m+1$ eine Primzahl ist, der Fermatsche Satz: $k^{2m} \equiv 1 \pmod{2m+1}$, in einem regelmäßigen Vielecke mit solcher Eckenzahl ist also jede Nummer eines Eckenpaares eine Wurzel der Kongruenz $k^m \equiv \pm 1 \pmod{2m+1}$. Durch keine dieser Zahlen ist $2m+1$ teilbar, kein Vielfaches derselben ist somit der Null kongruent; den k-fachen dieser Zahlen sind daher stets dieselben Zahlen $\pm k$, nur in verschiedener Reihenfolge, kongruent. Ist p ein Primfaktor von m, so sind die den Potenzen $k^{\frac{m}{p}}$ kongruenten Zahlen die Wurzeln der Kongruenz $k^p \equiv \pm 1 \pmod{2m+1}$ und die den sämtlichen Vielfachen dieser Zahlen kongruenten Zahlen die sämtlichen Zahlen $\pm k$; die $\frac{m}{p} \cdot p$ verschiedenen Werte von k zeigen also alsdann die Wurzeln der $\frac{m}{p}$ Gleichungen p^{ten} Grades an, in welche sich in diesem Falle die Gleichung m^{ten} Grades zerlegt, und deren Koeffizienten dann, durch $x_k x_{k'} = x_{k-k'} + x_{k+k'}$ in Summen verwandelt, nur noch den Summanden $x_0 = 2$ und diejenigen Teile die Summe $\sum_1^m x_k = -1$ enthalten können, welche die Wurzeln einer rationalen Gleichung $\left(\frac{m}{p}\right)^{\text{ten}}$ Grades sind. Man hat daher beispielsweise nicht nötig, die Gleichung 6. Grades

$$(x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1) + (x^5 - 4x^3 + 3x) = 0$$

des regelmäßigen 13-eckes aufzulösen; denn sie zerfällt, da 1 und 5 die Zeiger sind, welche der Kongruenz $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{13}$ genügen, in die geschlossene Gruppe der quadratischen Gleichungen

$$\begin{array}{l|l} x^2 - (x_1 + x_5)x + x_1 x_5 = 0 & x_1 x_5 = x_4 + x_6 \\ x^2 - (x_2 + x_3)x + x_2 x_3 = 0 & x_4 x_6 = x_2 + x_3 \\ x^2 - (x_4 + x_6)x + x_4 x_6 = 0 & x_2 x_3 = x_1 + x_5, \end{array}$$

deren drei Wurzelsummen die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(x^3 - 4x) + (x^2 + 1) = 0$$

sind. Ebenso kann die Gleichung 8. Grades der 8 Doppelabszissen des regelmäßigen 17-eckes, da 1 und 4 die einzigen Zahlen sind, welche die Bedingung $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{17}$ erfüllen, ersetzt werden nur durch die 4 Gleichungen 2. Grades

$$\begin{array}{l|l} x^2 - (x_1 + x_4)x + x_1 x_4 = 0 & x^2 - (x_3 + x_5)x + x_3 x_5 = 0 \\ x^2 - (x_2 + x_8)x + x_2 x_8 = 0 & x^2 - (x_6 + x_7)x + x_6 x_7 = 0, \end{array}$$

deren vier Wurzelsummen

$$\begin{array}{l|l} x_1 x_4 = x_3 + x_5 & x_3 x_5 = x_2 + x_8 \\ x_2 x_8 = x_6 + x_7 & x_6 x_7 = x_1 + x_4 \end{array}$$

die Wurzeln einer Gleichung 4. Grades mit rationalen Koeffizienten sind. Dieselbe läßt sich aber wiederum, da 4 noch durch 2 teilbar ist, ersetzen durch 2 Gleichungen des 2. Grades

$$x^2 - (x_1 x_4 + x_2 x_8)x - 1 = 0,$$
$$x^2 - (x_3 x_5 + x_6 x_7)x - 1 = 0,$$

deren zwei Wurzelsummen als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(x^2 - 4) + x = 0$$

gegeben sind.

Holzminden, Januar 1905. GEORG KOBER.

Anwendung der Graßmannschen Ausdehnungslehre auf n-fache Orthogonalsysteme.

Zu den Gebieten der Mathematik, die sich mit Hilfe der Graßmannschen Methoden in besonders einfacher und übersichtlicher Weise behandeln lassen, gehört die Differentialgeometrie. Dies zeigen die Arbeiten von Burali-Forti, der die Ausdehnungslehre auf verschiedene Zweige der Differentialgeometrie der Kurven und Flächen angewendet hat.[1])

Im folgenden sollen, im Anschluß an die Burali-Fortischen Arbeiten, die Haupteigenschaften und Formeln der n-fachen Orthogonalsysteme abgeleitet werden.

Einleitung. — Wir stellen zunächst diejenigen Begriffe und Formeln der Ausdehnungslehre, die im folgenden Anwendung finden, zusammen. Für die Begründung und ausführliche Darstellung verweisen wir auf die Lehrbücher von Peano[2]) und Burali-Forti.[3])

a) Ist I ein Vektor, m eine reelle (von Null verschiedene) Zahl, so bedeutet das Produkt $U = mI$ einen zu I parallelen Vektor, der mit I gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, je nachdem m positiv oder negativ ist. Ist die Länge des Vektors I gleich der Einheit (Einheitsvektor), so ist die Länge von U, die wir mit mod U bezeichnen, gleich dem absoluten Wert von m.

b) Unter $U + V + W + \cdots$ verstehen wir die geometrische Summe der Vektoren $U, V, W \cdots$

c) Drei Vektoren, die zu einer Ebene parallel sind, heißen komplanar. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Vektor W komplanar zu den (nicht parallelen) Vektoren U und V ist, wird ausgedrückt durch

$$W = xU + yV,$$

wobei x und y reelle Zahlen sind.

---

1) Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann. Paris 1897. — Sopra alcune questioni di geometria differenziale. Rendiconti del circ. mat. di Palermo **12** (1898), 111—132. — Le formule di Frenet per le superfici. Atti Torino **37** (1902—3), 233—246.

2) G. Peano, Calcolo geometrico 1888. — Grundzüge des geometrischen Kalküls. Deutsche Ausg. von A. Schepp, Leipzig 1891, B. G. Teubner.

3) Burali-Forti, Introduction à la géométrie différentielle. Paris 1897.

d) Jeder Vektor U läßt sich (im gewöhnlichen, 3-dimensionalen Raum) auf die Form

$$U = xI + yJ + zK$$

bringen, wobei I, J, K drei gegebene, nicht komplanare Vektoren und x, y, z reelle Zahlen sind.

e) Unter dem *äußeren Produkt* $U \cdot V$ zweier Vektoren verstehen wir das Parallelogramm, dessen Seiten den Vektoren U und V gleich und parallel sind, und zwar mit Rücksicht auf Größe, Umlaufsinn und Stellung seiner Ebene. Die absolute Größe des Parallelogramms, die wir mit mod $(U \cdot V)$ bezeichnen, ist gleich mod $U \cdot$ mod $V \cdot \sin(U, V)$. Die Gleichung $U \cdot V = U_1 \cdot V_1$ bedeutet somit nach obiger Definition: 1. daß mod $(U \cdot V)$ = mod $(U_1 \cdot V_1)$; 2. daß die beiden Parallelogramme dieselbe Umlaufsrichtung haben; 3. daß ihre Ebenen parallel sind.

Für das äußere Produkt $U \cdot V$ gilt das assoziative, nicht aber das kommutative Gesetz. Es ist somit $U \cdot V = - V \cdot U$, daher $U \cdot U = 0$. Die Gleichung $U \cdot V = 0$ sagt aus, daß die Vektoren U und V parallel sind, sie ist daher gleichbedeutend mit der Gleichung $U = m \cdot V$, wo m eine reelle Zahl ist.

f) Unter dem *inneren Produkt* $U | V$ der beiden Vektoren U und V verstehen wir die Zahl

$$\text{mod } U \cdot \text{mod } V \cdot \cos(U, V).$$

Für das innere Produkt gilt das assoziative und kommutative Gesetz; es ist daher $U | V = V | U$. Ferner ist $U | U = (\text{mod } U)^2$. Für den Einheitsvektor I ist $I | I = 1$. Die Bedingung für die Orthogonalität der Vektoren U und V ist $U | V = 0$.

Ist I ein Einheitsvektor, so gibt $U | I$ die Länge der Projektion von U auf I an. Sind daher I, J, K drei nicht komplanare Einheitsvektoren, so ist nach d) ein beliebiger Vektor U darstellbar in der Form:

$$U = (U | I) \cdot I + (U | J) \cdot J + (U | K) \cdot K.$$

g) Ist O ein fester Punkt, U ein Vektor, so bedeutet $P = O + U$ den Endpunkt P des mit seinem Anfangspunkt in O liegenden Vektors U. Ist U nach drei senkrechten Einheitsvektoren I, J, K zerlegt, so ist

$$P = O + xI + yJ + zK.$$

Dabei sind die Zahlen x, y, z identisch mit den kartesischen Koordinaten von P in einem System, dessen Anfangspunkt in O liegt, und dessen Achsen zu I, J, K parallel sind.

h) Wir können den Punkt P als Funktion einer numerischen Variabeln t ansehen. Beim Variieren von t beschreibt P eine Kurve. Der Differentialquotient $\frac{dP}{dt}$ des Punktes P bedeutet einen Vektor, der zur Tangente der Kurve im Punkt P parallel ist. Die Länge ds des Bogenelements ist gleich mod dP. Der Krümmungsradius ϱ der Kurve ist gegeben durch $\frac{1}{\varrho} = \text{mod}\left(\frac{d^2P}{ds^2}\right)$. Der Differentialquotient eines Punktes ist ein Vektor, der Differentialquotient eines Vektors ist wieder ein Vektor.

Anwendung. — Wir legen nun einen n-dimensionalen ebenen Raum

zugrunde und betrachten den Punkt P als Funktion von n numerischen Variabeln $u_1, u_2, \cdots u_n$. Ist u_i veränderlich, während alle übrigen u konstant bleiben, so beschreibt P eine Kurve, die wir mit u_i bezeichnen; sind u_i und u_k veränderlich, so beschreibt P eine 2-dimensionale Fläche; ist u_i konstant, während sämtliche übrigen u veränderlich sind, so beschreibt P die $(n-1)$-dimensionale Fläche (Hyperfläche) $u_i = \text{const.}$ Durch jeden Punkt des Raums gehen also n Kurven u_i; jede dieser Kurven ist der Schnitt von $(n-1)$ Hyperflächen $u_k = \text{const.}$ $(i \neq k)$.

Die Richtung der Tangente an eine beliebige durch P gehende Kurve ist gegeben durch den Vektor

$$dP = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial u_i} \cdot du_i \tag{1}$$

(Einl. h.).

Der Vektor $\frac{\partial P}{\partial u_i}$ ist parallel zu der Tangente an die Kurve u_i im Punkt P.

Wir setzen nun voraus, daß die Kurven u_i sich in P ***senkrecht durchschneiden***, d. h. daß

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} \,\Big|\, \frac{\partial P}{\partial u_k} = 0 \qquad (i \neq k). \tag{2}$$

Das Quadrat des Linienelements ds nimmt dann folgende Form an (Einl. f):

$$ds^2 = (\operatorname{mod} dP)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{mod} \frac{\partial P}{\partial u_i}\right)^2 \cdot du_i^2. \tag{3}$$

Bezeichnet man mit ds_i das Linienelement der Kurve u_i, so ist hiernach:

$$ds_i = \left(\operatorname{mod} \frac{\partial P}{\partial u_i}\right) du_i. \tag{4}$$

Nach (2) ist der Vektor $\frac{\partial P}{\partial u_i}$ senkrecht auf $(n-1)$ Vektoren $\frac{\partial P}{\partial u_k}$, d. h. senkrecht auf $(n-1)$ durch P gehenden Linienelementen ds_k $(k \neq i)$. Da diese sämtlich der Hyperfläche $u_i = \text{const.}$ angehören, so ist der Vektor $\frac{\partial P}{\partial u_i}$ parallel zur Normale dieser Hyperfläche. Gl. (2) ist daher die Bedingung dafür, daß die Hyperflächen $u_i = \text{const.}$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ ein *n-faches Orthogonalsystem* bilden.

Durch Differentiation nach u_l folgt aus (2):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u_i \partial u_l} \,\Big|\, \frac{\partial P}{\partial u_k} + \frac{\partial^2 P}{\partial u_k \partial u_l} \,\Big|\, \frac{\partial P}{\partial u_i} = 0. \tag{5}$$

Aus dieser Gl. und den beiden andern, die man hieraus durch zyklische Vertauschung der Indices i, k, l ableitet, folgt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u_i \partial u_k} \,\Big|\, \frac{\partial P}{\partial u_l} = 0. \qquad (i \neq k \neq l) \tag{6}$$

Durch die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} = \left(\operatorname{mod} \frac{\partial P}{\partial u_i}\right) \cdot T_i \tag{7}$$

definieren wir einen zu $\frac{\partial P}{\partial u_i}$ parallelen Einheitsvektor T_i (s. Einl. a).

Nach Einl. [illegible] und Gl. (2) ist dann:

$$(2^*) \qquad T_i \,|\, T_i = 1; \quad T_i \,|\, T_k = 0 \qquad (i \neq k).$$

Differenziert man (7) nach u_k und bildet das innere Produkt bzw. T_i, so geht (6) über in:

$$(6^*) \qquad \frac{\partial T_l}{\partial u_k} \,\Big|\, T_i = 0 \qquad (l \neq i \neq k).$$

Ferner folgt aus (2*):

$$(6^{**}) \qquad \frac{\partial T_i}{\partial u_k} \,\Big|\, T_i = 0.$$

Nun stellen wir den Vektor $\frac{\partial T_i}{\partial u_k}$ als Funktion der Einheitsvektoren $T_1, T_2, \cdots T_n$ dar. Wir sehen $\frac{\partial T_i}{\partial u_k}$ als geometrische Summe seiner Projektionen auf die $T_1, T_2, \cdots T_n$ an. Nach Einl. f) können wir dies durch folgende Gl. ausdrücken:

$$(8) \qquad \frac{\partial T_i}{\partial u_k} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial T_i}{\partial u_k} \,\Big|\, T_l \right) \cdot T_l .$$

Wegen (6*) und (6**) reduziert sich diese Summe auf ein einziges Glied, so daß

$$(9) \qquad \frac{\partial T_i}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial T_i}{\partial u_k} \,\Big|\, T_k \right) \cdot T_k \qquad (i \neq k).$$

Da $\frac{\partial T_i}{\partial u_k} \,|\, T_k$ eine Zahlengröße ist (Einl. f), so sagt diese Gl. aus, daß die beiden *Vektoren* $\frac{\partial T_i}{\partial u_k}$ und T_k *parallel* sind. Wir können daher Gl. (9) nach Einl. a) auch in der Form

$$(9^*) \qquad \frac{\partial T_i}{\partial u_k} = \left(\mathrm{mod}\, \frac{\partial T_i}{\partial u_k} \right) \cdot T_k \qquad (i \neq k)$$

schreiben.

In Gl. (8)* ist das verallgemeinerte *Dupinsche Theorem* enthalten, dem zufolge die Kurven u Krümmungslinien der durch sie hindurchgehenden Hyperflächen sind. Um zu beweisen, daß z. B. die Kurve u_k eine Krümmungslinie der Hyperfläche $u_i = \mathrm{const.}$ ist, zeigen wir, daß die längs der Kurve u_k errichteten Normalen der Hyperfläche $u_i = \mathrm{const.}$ eine abwickelbare Fläche bilden. Die Normale im Punkt P der Fläche $u_i = \mathrm{const.}$ ist parallel zum Vektor T_i; die Normale im konsekutiven, auf der Kurve u_k gelegenen Punkt P' ist parallel zum Vektor $T_i' = T_i + \frac{\partial T_i}{\partial u_k} du_k$. Nach Gl. (9) hat T_i' die Form $T_i + \lambda T_k$; die Vektoren T_i, T_i', T_k sind somit komplanar (Einl. c). Da nun PP' parallel zu T_k ist, so müssen die beiden in P und P' errichteten Flächennormalen mit T_k in einer Ebene liegen und sich schneiden.

Die Gl. (9) gilt nicht für $k = i$. In diesem Falle hat man nach Gl. (8):

$$\frac{\partial T_i}{\partial u_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial T_i}{\partial u_i} \,\Big|\, T_k \right) \cdot T_k .$$

Da nach Gl. (2*), (9) und (9*)

$$\frac{\partial T_i}{\partial u_i} \Big| T_i = 0; \quad \frac{\partial T_i}{\partial u_i} \Big| T_k = - \frac{\partial T_k}{\partial u_i} \Big| T_i = - \operatorname{mod} \frac{\partial T_k}{\partial u_i}$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial T_i}{\partial u_i} = - \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{mod} \frac{\partial T_k}{\partial u_i} \right) T_k. \tag{10}$$

Hierbei ist in der Summe rechts der Koeffizient von T_i gleich Null.

Die Koeffizienten $\operatorname{mod} \frac{\partial T_i}{\partial u_k}$ der Gl. (9*) und (10) lassen sich durch die *Hauptkrümmungsradien* der Hyperfläche $u_i = \text{const.}$ ersetzen. Als Krümmungslinien der Hyperflächen definieren wir diejenigen Flächenkurven, längs deren die konsekutiven Flächennormalen sich schneiden. Da die Normale der Fläche $u_i = \text{const.}$ in P parallel zum Vektor T_i ist, so gilt für einen beliebigen Punkt Q der Normalen

$$Q = P + r \cdot T_i.$$

Hierbei bezeichnet r den Abstand der Punkte P und Q (in der Richtung von T_i positiv gemessen). Soll die konsekutive Normale durch denselben Punkt Q gehen, so muß sein:

$$dP + r \cdot dT_i + dr \cdot T_i = 0.$$

Durch innere Multiplikation mit T_i folgt hieraus:

$$dP \,|\, T_i + r \cdot (T_i \,|\, dT_i) + dr \cdot (T_i \,|\, T_i) = 0.$$

Da die Normalenrichtung T_i senkrecht zur Tangentenrichtung dP ist, so ist $dP \,|\, T_i = 0$. Ferner ist wegen Gl. (2*): $T_i \,|\, T_i = 1$; $T_i \,|\, dT_i = 0$. Es folgt daher $dr = 0$, und man hat:

$$dP = - r \cdot dT_i, \tag{11}$$

d. h. der Vektor dP, der die Richtung der Kurve angibt, muß parallel zu dT_i sein. Ist nun u_k eine Krümmungslinie und r_{ik} der zugehörige Wert von r (Hauptkrümmungsradius), so ist nach (11):

$$\frac{\partial P}{\partial u_k} = - r_{ik} \cdot \frac{\partial T_i}{\partial u_k}$$

oder, wenn man beiderseits den mod nimmt:

$$\frac{1}{r_{ik}} = - \frac{\operatorname{mod} \frac{\partial T_i}{\partial u_k}}{\operatorname{mod} \frac{\partial P}{\partial u_k}}. \tag{12}$$

Führt man außerdem in den Gl. (9*) und (10) die Ableitung nach der Bogenlänge[1]) durch die Gl.

$$\frac{\partial}{\partial s_k} = \frac{\partial}{\partial u_k} \cdot \frac{d u_k}{d s_k} = \frac{1}{\operatorname{mod} \frac{\partial P}{\partial u_k}} \cdot \frac{\partial}{\partial u_k}$$

1) Encyklopädie der math. Wiss. III D 3, Nr. 8.

ein (s. Gl. 4), so erhält man folgende Formeln:

$$(13)\qquad \frac{\partial T_i}{\partial s_k} = -\frac{1}{r_{ik}}\cdot T_k, \qquad \frac{\partial T_i}{\partial s_i} = +\sum_k \frac{1}{r_{ki}}\, T_k.$$

(Die Summe erstreckt sich über $k = 1, \cdots n$ mit Ausnahme von $k = i$.) Aus Gl. (13) lassen sich weitere, für n-fache Orthogonalsysteme geltende Formeln in einfacher Weise ableiten.

Die *erste Krümmung* $1/\varrho_i$ der Kurve u_i läßt sich als Funktion der Normalkrümmungen $1/r_{ki}$ dieser Kurve bezüglich der durch sie gehenden Hyperflächen $u_k =$ const. ausdrücken. Nach Einl. h) ist nämlich:

$$\frac{1}{\varrho_i} = \mathrm{mod}\,\frac{\partial^2 P}{\partial s_i^2} = \mathrm{mod}\,\frac{\partial T_i}{\partial s_i}.$$

Hieraus und aus Gl. (13) folgt:

$$(14)\qquad \left(\frac{1}{\varrho_i}\right)^2 = \frac{\partial T_k}{\partial s_i}\,\bigg|\,\frac{\partial T_i}{\partial s_i} = \sum_k \left(\frac{1}{r_{ki}}\right)^2 \quad (k = 1, \cdots i-1,\, i+1, \cdots n).$$

Die von Darboux verallgemeinerten Laméschen *Gleichungen* ergeben sich aus (13) durch Anwendung der Integrabilitätsbedingung[1])

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial s_k}\left(\frac{\partial u}{\partial s_i}\right) + \left(\frac{\partial T_k}{\partial s_i}\,\bigg|\,T_i\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial s_i} = \frac{\partial}{\partial s_i}\left(\frac{\partial u}{\partial s_k}\right) + \left(\frac{\partial T_i}{\partial s_k}\,\bigg|\,T_k\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial s_k}.$$

Hierin ist u eine von der Lage des Punktes P abhängige Größe, s_i und s_k sind zwei senkrecht von P ausgehende Linienelemente mit den Richtungen T_i und T_k. Setzt man in (15) die Werte $\frac{\partial u}{\partial s_i} = \frac{\partial T_i}{\partial s_i}$ und $\frac{\partial u}{\partial s_k} = \frac{\partial T_i}{\partial s_k}$ aus (13) ein, so erhält man, da die Gl. (15) identisch erfüllt sein muß, folgende Gleichungssysteme:

$$(16)\qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{\alpha i}}\right)}{\partial s_k} + \frac{1}{r_{ki}}\left(\frac{1}{r_{\alpha k}} - \frac{1}{r_{\alpha i}}\right) = 0, \quad \frac{\partial\frac{1}{r_{ik}}}{\partial s_i} + \frac{\partial\frac{1}{r_{ki}}}{\partial s_k} = \sum_l \frac{1}{r_{li}}\cdot\frac{1}{r_{lk}} + \frac{1}{r_{ik}^2} + \frac{1}{r_{ki}^2}.$$

Diese Gleichungen gelten für $k \neq i$ und $k \neq \alpha$. Die Summe ist über $l = 1, \cdots n$ mit Ausnahme von i und k zu nehmen. Endlich lassen sich in (16) die Hauptkrümmungsradien r_{ik} durch die Koeffizienten des Linienelements (s. Gl. 3) ersetzen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$H_i^2 = \frac{\partial P}{\partial u_i}\,\bigg|\,\frac{\partial P}{\partial u_i} = \left(\mathrm{mod}\,\frac{\partial P}{\partial u_i}\right)^2,$$

so erhält man durch eine einfache Rechnung aus (12) mit Benutzung von (7), (2) und (2*):

$$\frac{1}{r_{ik}} = -\frac{1}{H_i\cdot H_k}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial u_i}.$$

---

[1]) Burali-Forti, Atti Torino 37 (1902—3), 244, Gl. 12.

Führt man diese Werte in (16) ein, so ergeben sich die von **Darboux**[1]) angegebenen Gleichungen:

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_\alpha}{\partial u_i \partial u_k} - \dfrac{1}{H_i}\cdot\dfrac{\partial H_i}{\partial u_k}\cdot\dfrac{\partial H_\alpha}{\partial u_i} - \dfrac{1}{H_k}\cdot\dfrac{\partial H_k}{\partial u_i}\cdot\dfrac{\partial H_\alpha}{\partial u_k} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u_i}\left(\dfrac{1}{H_i}\cdot\dfrac{\partial H_k}{\partial u_i}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_k}\left(\dfrac{1}{H_k}\cdot\dfrac{\partial H_i}{\partial u_k}\right) + \sum_l \dfrac{1}{H_l^2}\cdot\dfrac{\partial H_i}{\partial u_l}\cdot\dfrac{\partial H_k}{\partial u_l} = 0. \end{cases}$$

Diese Gl. gelten für $i \neq k$. Die Summe ist über $l = 1, \cdots n$ mit Ausnahme von i und k zu erstrecken.

Stuttgart, 13. Dezember 1903. E. Rath.

1) G. **Darboux**, Leçons sur les systèmes orthogonaux. Paris 1898. Vol. 1, pag. 161, 162.

Über die Darstellbarkeit der Zahlen quadratischer und kubischer Zahlkörper als Quadratsummen.

1. Im folgenden bedeute: P den absoluten Rationalitätsbereich, $P(z)$ den durch Adjunktion von z zu P entstehenden Zahlkörper, $P(z_1) = P(z_2)$, daß jede Zahl von $P(z_1)$ auch in $P(z_2)$ zu finden ist und umgekehrt. Hat eine Gleichung $\sum_{\nu=0}^{2} a_\nu x^\nu = 0$ n Wurzeln $x_1, \ldots x_n$, und ist $f(x)$ eine Zahl aus $P(x_1)$, so sollen $f(x_2), \ldots f(x_n)$ die zu $f(x_1)$ konjugierten Zahlen, $P(x_2), \ldots P(x_n)$ die zu $P(x_1)$ konjugierten Körper heißen. Ist $f(x_1)$ reell und positiv und sind alle zu $f(x_1)$ konjugierten Zahlen *nicht* negativ-reell, also positiv-reell oder komplex, so soll $f(x_1)$ *total positiv* heißen. Eine komplexe Zahl $a + bi$, deren Koordinaten a und b beide ganz oder rational sind, werde als ganze oder rationale komplexe Zahl bezeichnet. Ein Körper heiße reell, wenn er nur reelle Zahlen enthält, sonst komplex.

2. Alle quadratischen Körper sind mit ihren konjugierten identisch. Die Adjunktion der Wurzel einer quadratischen Gleichung mit reellen rationalen Koeffizienten führt stets auf einen Körper der Form $P(\sqrt{z})$. Hier sind vier Fälle möglich:

I. z ist eine (positive) Quadratzahl. $P(\sqrt{z}) = P$; alle positiven rationalen Zahlen sind durch höchstens 4 Quadrate darstellbar.

II. $-z$ ist eine Quadratzahl. In $P(\sqrt{z}) = P(i)$ sind alle Zahlen schon durch 2 Quadrate darstellbar.[1])

III. z ist negativ, $-z$ kein Quadrat. In dem Körper $P(i\sqrt{-z})$ sind alle Zahlen durch 5 Quadrate darstellbar, von denen 4 reell sind.[2])

IV. z ist positiv und keine Quadratzahl. Dann gilt der Satz: „Alle total positiven Zahlen des Körpers $P(\sqrt{z})$ können auf i. a. unendlich verschiedene Arten in Summen von 5 Quadraten zerlegt werden, von denen 4 reell sind."

Das soll nun gezeigt werden.

1) S. Arch. d. Math. und Phys. (3) 6, 176.
2) S. Arch. d. Math. und Phys. (3) 7, 268

3. Zunächst darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit z als ganze Zahl n genommen werden, denn für $z = \frac{m}{m'}$ folgt: $P(\sqrt{z}) \equiv P\left(\sqrt{\frac{m}{m'}}\right) = P(\sqrt{mm'})$. Damit eine Darstellung

(a) $$\alpha + \beta\sqrt{n} = \sum_\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu \sqrt{n})^2$$

überhaupt möglich sei, muß auch

(b) $$\alpha - \beta\sqrt{n} = \sum_\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu \sqrt{n})^2$$

positiv sein, d. h. $\alpha + \beta\sqrt{n}$ muß total positiv sein. In diesem Falle ist $\alpha > 0$ und $\frac{\alpha}{|\beta|} > \sqrt{n}$. Soll:

(1) $$\alpha + \beta\sqrt{n} = \sum_\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu \sqrt{n})^2$$

sein, so muß gelten:

(2) $$\sum_\nu \alpha_\nu \beta_\nu = \frac{\beta}{2},$$

(3) $$\sum_\nu (\alpha_\nu^2 + n\beta_\nu^2) = \alpha.$$

Auf Grund von (b) darf $\beta > 0$ angenommen werden. Es bezeichne nun $\{\xi\}$ eine Zahl, die positiv-rational ist und der irrationalen Zahl ξ so nahe liegt, als es im speziellen Falle nötig ist. Setzt man dann:

(4) $$\alpha_1 = \left\{\sqrt{\frac{\beta}{2}\sqrt{n}}\right\}, \qquad \beta_1 = \left\{\frac{\beta}{2\sqrt{\frac{\beta}{2}\sqrt{n}}}\right\}, \qquad \beta_2 = \beta_3 = \cdots = 0,$$

so ist (2) identisch erfüllt, während (3) übergeht in:

(5) $$\sum_{\nu=2} \alpha_\nu^2 = \alpha - \beta\sqrt{n} - \eta = \zeta.$$

Hierin ist η eine Zahl, die bei passender Wahl von α_1 und daraus folgender von β_1 beliebig klein gemacht werden kann. Es ist also stets zu erreichen, daß die *rationale* Zahl ζ positiv ist; sie ist dann in 4 Quadrate zerlegbar. Damit ist der in Nr. 2, IV ausgesprochene Satz bewiesen.

4. Zu P werde $\sqrt[3]{n}$ adjungiert, worin n eine reelle rationale Zahl bedeutet, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv und ganzzahlig vorausgesetzt werden kann. Da $\sqrt[3]{n} = \frac{n}{(\sqrt[3]{n})^2}$, so ist jede positive Zahl von $P(\sqrt[3]{n})$ durch $\leqq 12$ Quadrate darstellbar. Die beiden konjugierten Körper sind komplex und fallen in den einen $P(\varrho\sqrt[3]{n})$ zusammen, wenn

$$\varrho^2 + \varrho + 1 = 0,$$

d. h. ϱ eine primitive 3. Einheitswurzel ist. Nun ist $\varrho = \frac{1}{\varrho^2}$, $-\varrho = 1^2 + \varrho^2$, $-\varrho = \frac{1}{\varrho^2} + 1^2$, $-1 = \varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}$. Daher ist in $P(\varrho\sqrt[3]{n})$ *jede* Zahl in höchstens 24 Quadratzahlen zerlegbar.

Potsdam, am 23. August 1904. Otto Meissner.

Bemerkung zur Lehre von den diophantischen Gleichungen.

Die bekannten Auflösungsmethoden für die unbestimmten Gleichungen ersten Grades, die sog. diophantischen Gleichungen, führen in letzter Linie entweder auf den euklidischen Algorithmus (Lagrange, ..) oder auf den Fermatschen Lehrsatz (Libri, Binet, ..), richtiger gesagt auf den Algorithmus

$$(1) \qquad \alpha r_\lambda - r_{\lambda+1} = k a_\lambda (0 < r_\lambda < k,\ 0 \leqq a_\lambda < \alpha;\ \lambda = 1, 2, \cdots),$$

zurück. Obwohl in praktischer Beziehung das erstere Verfahren, d. h. die Kettenbruchauflösung, fast ausschließlich in Betracht kommt, so scheint uns dennoch die Auflösung vermittels des Algorithmus (1) dem Wesen der Materie näher zu stehen. Um dies etwas näher zu erläutern, bedienen wir uns eines Algorithmus, den wir an anderer Stelle[1]) mitgeteilt haben, und den wir hier in Kürze auf einem etwas anderen Wege von neuem herleiten wollen.

Aus dem Algorithmus (1) folgt bekanntlich für die Darstellung des Bruches $\frac{r_\lambda}{k}$ im Zahlensysteme mit der Grundzahl α (α prim zu k):

$$(2) \qquad \frac{r_\lambda}{k} = (0,\ a_\lambda a_{\lambda+1} \cdots a_{\lambda+\delta-1} \cdots)_\alpha \quad (\lambda = 1, 2, \cdots),$$

wo δ die Anzahl der Ziffern der Periode bedeutet, so daß also in (2) die Ziffern nach $a_{\lambda+\delta-1} = a_{\lambda-1}$ periodisch wiederkehren. Gleichung (1) kann auch geschrieben werden:

$$(3) \qquad (\alpha + uk) r_\lambda - r_{\lambda+1} = k(a_\lambda + u r_\lambda) \quad (u = 1, 2, \cdots),$$

d. h. die Ziffern des Bruches $\frac{r_1}{k}$ im Zahlensysteme $(\alpha + uk)$ werden aus den entsprechenden Ziffern im Systeme α gefunden, indem man die mit u multiplizierten jeweiligen Reste addiert; die Reste stimmen in beiden Zahlensystemen genau überein.

Addiert man nun zu der Identität

$$\alpha a_\lambda + a_{\lambda+1} = \alpha a_\lambda + a_{\lambda+1}$$

die Gleichung

$$u k a_\lambda + u r_{\lambda+1} = u \alpha r_\lambda,$$

die vermöge (1) für jeden Wert von u richtig ist, so ergibt sich:

$$(4) \qquad (\alpha + uk) a_\lambda + (a_{\lambda+1} + u r_{\lambda+1}) = \alpha(a_\lambda + u r_\lambda) + a_{\lambda+1}.$$

Führt man hierin α' für $\alpha + uk$ ein und bezeichnet gleichzeitig die Ziffern des Bruches $\frac{r_1}{k}$ im Zahlensysteme α' mit $a_1', a_2', \cdots$, so kann man nach (3) a_λ' für $a_\lambda + u r_\lambda$ setzen. Unter diesen Umständen nimmt Gleichung (4) die Form an:

$$(5) \qquad \alpha' a_\lambda + a_{\lambda+1}' = \alpha a_\lambda' + a_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots).$$

Wird $u = 1$ gesetzt, so läßt sich (5) folgendermaßen schreiben:

$$(6) \qquad \alpha a_\lambda' - \alpha' a_\lambda = r_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots).$$

---

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1894, **39**, 24; vergl. auch Bachmann, Niederd. Zahlenth. I, S. 361.

Dieser Algorithmus löst, wie man leicht bemerkt, die diophantische Gleichung

$$(7) \qquad ax - by = c,$$

in welcher a, b, c positive ganze Zahlen bedeuten, in den kleinsten positiven ganzen Zahlen auf. Wir dürfen dabei, wie sogleich noch etwas näher begründet werden soll, unbeschadet der Allgemeinheit der Betrachtung, annehmen, daß $a < b - a < b$ und $c < b - a$ sei. Setzt man unter dieser Voraussetzung $a = \alpha$, $b = \alpha'$, $b - a = k$ (prim zu α), $c = r_1$ und

$$\frac{r_1}{k} = (0,\, a_1 a_2 \cdots a_\delta \cdots)_\alpha = (0,\, a_1' a_2' \cdots a_\delta'' \cdots)_{\alpha'},$$

so stellen die beiden Ziffern $a_\delta' = a_\delta + r_\delta$ und a_δ die Auflösung der Gleichung (7) in den kleinsten positiven ganzen Zahlen dar. Gleichzeitig sind allgemein die Ziffern $a_\lambda' = a_\lambda + r_\lambda$ und a_λ die Lösungen der Gleichungen

$$ax - by = r_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots)$$

in den kleinsten positiven ganzen Zahlen. Sollten mit den Resten r_λ nicht alle ganzen Zahlen $< k$ erschöpft sein, so sei s_1 eine solche, die nicht unter den r_λ vorkommt. Alsdann liefert in derselben Weise wie oben die Darstellung

$$\frac{s_1}{k} = (0,\, b_1 b_2 \cdots b_\delta \cdots)_\alpha = (0,\, b_1' b_2' \cdots b_\delta' \cdots)_{\alpha'}$$

die Auflösungen der Gleichungen

$$ax - by = s_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \cdots)$$

u. s. f., bis alle Zahlen $< k$ erschöpft sind.

Wenn in (7) $c > k$ sein würde, etwa $c = c' + vk$ $(c' < k)$, und (x, y) stellte eine Lösung der Gleichung

$$ax - by = c'$$

dar, so wäre $(x - v,\ y - v)$ eine Lösung der Gleichung (7). Würde $a > k$ sein, und wäre etwa $a = a' + wk$, $b = b' + wk$ $(a' < k)$, so erhielte man nach (3) die Lösungen von (7) ohne weiteres aus denjenigen der Gleichung

$$a'x - b'y = c.$$

Falls endlich in (7) $a > b$ wäre, so brauchte man nur $x = y - z$ zu setzen, um eine Gleichung

$$(a - b)y - az = c \quad \text{oder} \quad a'y - b'z = c$$

zu erhalten, in welcher $a' < b'$ sein würde.

Wenn an Stelle von (7) die Gleichung $ax + by = c$ vorliegt, so genügen ihr die Zahlen $(x, -y)$, sofern (x, y) eine Lösung der Gleichung $ax - by = c$ vorstellt.

Aus alledem geht hervor, daß die Lösungen der Gleichung (7) *wesentlich* von der Zahl $k = b - a$ abhängen. Die Lösungen aller (unendlich vielen) Gleichungen, für die k denselben Wert hat, stehen in naher verwandtschaftlicher Beziehung zueinander, die wir jedoch hier nicht weiter verfolgen wollen, weil sie an anderer Stelle eine nähere Besprechung erfahren wird.

Desgleichen wird über die auf Algorithmen höheren Grades bezüglichen Analoga bei anderer Gelegenheit zu berichten sein.

Darmstadt. J. KRAUS.

Über den sogenannten Brocardschen Punkt.

Da sich in Folge der nötigen Erledigung untergeordneter Formalien der Druck meines Referates für die Enzyklopädie ungewöhnlich lange hinzieht, gebe ich folgende Notiz, die bereits aus dem Jahre 1894 stammt:

Will man die Brocardschen Punkte Crelle absprechen, so gebührt die Priorität dem Danziger Gymnasiallehrer H. Hoffmann, der Grun. Archiv **9** (1847), 280: „In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu zeichnen usw.", *beide* Brocardschen Punkte und die wesentlichen Eigenschaften samt

$$\cot x = \sum \cot A \qquad \text{und} \qquad 2\sin^3 x = \sin(A - x)\sin(B - x)\sin(C - x)$$

fand. Reuschle, 1853, Progr. Tübing. S. 4 lange vor Marqfroy; Nouv. ann. (2) **10**, 142 hat dieselbe Gleichung und zeigt, daß sie mit der ersten äquivalent ist. Übrigens hat C. F. A. Jacobi in seiner Dissertation Leipzig 1825 den Brocardschen Punkt schon vor Hoffmann behandelt.

Straßburg i. E., im Juli 1904. MAX SIMON.

Eine Eigentümlichkeit der Näherungswerte von $\sqrt{2}$.

Bezeichnet man die Näherungswerte von $\sqrt{2}$ mit $\frac{Z_\alpha}{N_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$, so ist für jedes ganzzahlige positive α:

$$(\sqrt{2} - 1)^\alpha = (-1)^{\alpha-1}(\sqrt{2}\,.\,N_\alpha - Z_\alpha).$$

Um das zu beweisen, gehen wir von dem Kettenbruch

$$K = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \cdots$$

aus, dessen Näherungswerte $\frac{P_\alpha}{Q_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ seien, und untersuchen, unter welcher Bedingung die Relation

$$(\sqrt{k} - 1)^\alpha = (-1)^{\alpha-1}(\sqrt{k}\,.\,Q_\alpha - P_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

gilt.

Es ist zunächst:

$$(\sqrt{k}-1)^{\alpha+1} = (\sqrt{k}-1)^\alpha \cdot (\sqrt{k}-1) = (-1)^{\alpha-1}(\sqrt{k}\cdot Q_\alpha - P_\alpha)(\sqrt{k}-1)$$

oder $(\sqrt{k} - 1)^{\alpha+1} = (-1)^\alpha\,[(Q_\alpha + P_\alpha)\sqrt{k} - (KQ_\alpha + P_\alpha)]$.

Andererseits muß

$$(\sqrt{k} - 1)^{\alpha+1} = (-1)^\alpha\,[\sqrt{k}Q_{\alpha+1} - P_{\alpha+1}]$$

sein; folglich müssen die Gleichungen bestehen:

$$Q_\alpha + P_\alpha = Q_{\alpha+1}, \qquad kQ_\alpha + P_\alpha = P_{\alpha+1}.$$

Nun ist aber bei dem betrachteten Kettenbruch stets:

$$P_\nu = Q_{\nu-1} + Q_\nu.$$

Demnach wird aus den vorstehenden beiden Gleichungen:

$$Q_{\alpha+1} - 2Q_\alpha - Q_{\alpha-1} = 0$$

nur

$$Q_{\alpha+1} - kQ_\alpha - Q_{\alpha-1} = 0.$$

Hieraus ergibt sich durch Subtraktion $(k-2)Q_\alpha = 0$ oder $k = 2$. Damit ist gezeigt, daß die Relation:

$$(\sqrt{k} - 1)^\alpha = (-1)^{\alpha-1}(\sqrt{k}Q_\alpha - P_\alpha)$$

nur für $k = 2$ *gültig ist.*

Hamburg, den 15. Januar 1905. J. Schröder.

Gleichbrocardische Dreiecke.

Der Satz, auf welchen sich die Anfrage **23** (Bd. VIII, S. 331) des Herrn Capilleri bezieht, ergibt sich unmittelbar aus Formeln, welche ich in *Mathesis*, 1881, Seite 117 aufgestellt habe Da der Brocardsche Winkel ω eines Dreiecks ABC der Gleichung

$$\cot\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,\triangle}$$

genügt, nennt man heute *gleichbrocardisch* die Dreiecke, in welchen das Verhältnis $(a^2 + b^2 + c^2) : \triangle$ denselben Wert hat; in den ersten Zeiten (1886—87—88) sagte man *symbrocardal*, *cobrocardal*, Ausdrücke, die wohl besser die Gemeinschaftlichkeit eines Brocardschen Punktes oder Kreises bezeichnen.

Reihen von gleichbrocardischen Dreiecken erhält man leicht mit Hilfe des folgenden Theorems, welches Herr Artzt und ich[1]) unabhängig von einander und auf verschiedenen Wegen gefunden:

Alle gleichseitigen Dreiecke einer Ebene liefern durch senkrechte Projektion auf eine zweite Ebene lauter gleichbrocardische Dreiecke.

Z. B. aus einem gleichseitigen Dreiecke ABC leitet man andere solche Dreiecke ab, indem man als Ecken Punkte A', B', C' nimmt, welche die Seiten nach demselben Verhältnisse teilen, oder als Seiten die Verbindungslinien AA', BB', CC'; diese Linien sind auch äquipollent zu den Seiten eines regelmäßigen Dreiecks. Die Schwerpunkte von drei beliebigen Massen α, β, γ, welche man nacheinander in A, B, C, dann in B, C, A, dann in C, A, B anbringt, sind auch die Ecken eines solchen Dreiecks. Eine orthogonale Projektion der Figur zeigt, daß dieselben Konstruktionen, bei einem beliebigen Dreiecke ausgeführt, gleichbrocardische Dreiecke liefert.

---

1) Artzt, Beiträge zur Geometrie des Brocardschen Kreises, Recklinghausen, 1886. Diese Schrift kenne ich nur durch Zitate in der geschichtlichen Studie von Emmerich: Der Brocardsche Winkel des Dreiecks, Mühlheim a. d. Ruhr, 1889. — Neuberg, Sur les triangles équibrocardiens, *AFAS*, Oran, 1888. *AFAS* = Association française pour l'avancement des sciences.

Betrachtet man alle einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Dreiecke, so erhält man durch eine senkrechte Projektion alle einer Ellipse eingeschriebenen Dreiecke größten Inhalts; letztere Dreiecke sind gleichbrocardisch und haben gemeinsamen Schwerpunkt im Zentrum der Ellipse.

Eine fast erschöpfende Darstellung dieses Gegenstandes und zahlreiche Literaturnachweise findet man in Emmerichs Buch: Die Brocardschen Gebilde.

Das oben erwähnte Theorem läßt eine interessante Erweiterung zu, die ich mir gestatte hier wiederzugeben.

Wenn das Dreieck ABC eine senkrechte Projektion des Dreiecks $A'B'C'$ ist und a'', b'', c'' die Strecken AA', BB' CC' bezeichnen, so hat man

$$a'^2 = a^2 + (b'' - c'')^2, \quad b'^2 = b^2 + (c'' - a'')^2, \quad c'^2 = c^2 + (a'' - b'')^2,$$

und nach Elimination der Größen a'', b'', c'':

$$\text{(I)} \qquad \sqrt{a'^2 - a^2} + \sqrt{b'^2 - b^2} + \sqrt{c'^2 - c^2} = 0.$$

Ist dagegen ABC eine Gegenprojektion von $A'B'C'$, d. h. ist $A'B'C'$ eine senkrechte Projektion von ABC, so bekommt man dieselbe Gleichung mit $\sqrt{-1}$ multipliziert. In beiden Fällen gibt die Wegschaffung der Wurzeln:

$$\text{(II)} \qquad \Delta'^2 - 2\,T^2 + \Delta^2 = 0,$$

wenn man setzt

$$16\,\Delta^2 = -\Sigma a^4 + 2\,\Sigma a^2 b^2, \quad 16\,\Delta'^2 = -\Sigma a'^4 + 2\,\Sigma a'^2 b'^2,$$
$$32\,T^2 = -\Sigma a^2 a'^2 + \Sigma(a^2 b'^2 + a'^2 b^2) = \Sigma a^2 (b'^2 + c'^2 - a'^2).$$

Δ und Δ' sind die Flächeninhalte der beiden Dreiecke; $32\,T^2$ ist die Polarform von $16\,\Delta^2$ für die Veränderlichen a^2, b^2, c^2.

Für (II) kann man auch schreiben:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\Delta}{\Delta'} + \frac{\Delta'}{\Delta} = 2\,\frac{T^2}{\Delta\Delta'}\,\Sigma(\cot\alpha \cot\beta' + \cot\alpha' \cot\beta),$$

wenn man beachtet, daß

$$\frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{4\,\Delta'} = \frac{2\,b'c' \cos\alpha'}{2\,b'c' \sin\alpha'} = \cot\alpha',$$
$$\frac{a^2}{2\,\Delta} = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma} = \cot\beta + \cot\gamma.$$

Ist φ der Winkel der Ebenen ABC, $A'B'C'$, so hat man entweder $\Delta = \Delta' \cos\varphi$ oder $\Delta' = \Delta \cos\varphi$ und die Formel (III) wird

$$\cos\varphi + \sec\varphi = \Sigma(\cot\alpha \cot\beta' + \cot\alpha' \cot\beta).$$

Im besonderen Falle, wo $\alpha' = \beta' = \gamma' = \frac{\pi}{3}$, bekommt man

$$\cos\varphi + \sec\varphi = 2\cot\omega \cot\frac{\pi}{3}.$$

Lüttich, März 1905. J. Neuberg.

Die Bestimmung einer beliebigen Hyperbel aus zwei gleichseitigen Hyperbeln.

Die Gleichung der Ellipse in Vektorform lautet:

$$\mathfrak{v}_e = \mathfrak{a} \cos \varphi + \mathfrak{b} \sin \varphi. \tag{1}$$

Daraus folgt ohne weiteres die bekannte Konstruktion, siehe Fig. 1.

Die entsprechende Gleichung der Hyperbel ist:

$$\mathfrak{v}_h = \mathfrak{a} \cosh \psi + \mathfrak{b} \sinh \psi \tag{2}$$

Aus dieser folgt die analoge Konstruktion der Hyperbel aus den beiden gleichseitigen Hyperbeln mit den Achsen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, wie diejenige der Ellipse aus den beiden Kreisen mit den Durchmessern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

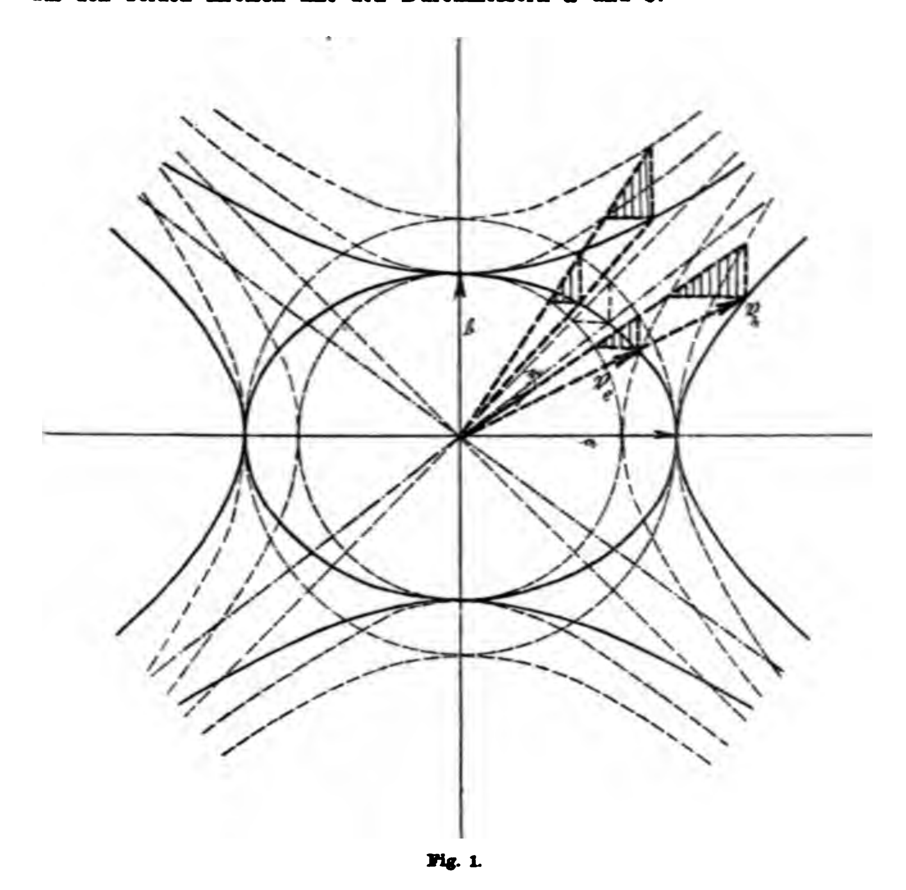


Fig. 1.

Ziehen wir nun einen Strahl in der Richtung $\mathfrak{r}_1$ und suchen auf die obige Weise den Radiusvektor $\mathfrak{v}_e$ der Ellipse und denjenigen $\mathfrak{v}_h$ der Hyperbel, so fallen beide in eine gemeinsame Richtungslinie. Wie man speziell die Asymptoten der beliebigen Hyperbel aus denen der gleichseitigen findet, ist ohne weiteres ersichtlich. Dem zugehörigen Ellipsenpunkt entspricht dann ein unendlich ferner Punkt der Hyperbel.

Der Beweis für $\mathfrak{v}_h \parallel \mathfrak{v}_e$ kann in folgender Weise geschehen. In Fig. 2 ist ein Kreis und eine gleichseitige Hyperbel vom Radius 1 dargestellt. Es ist nun:

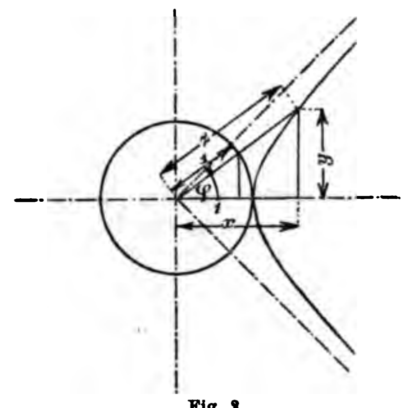


Fig. 2.

$$\cosh \psi = z \cos \varphi, \quad \sinh \psi = z \sin \varphi$$

daher nach (1) und (2)

$$\mathfrak{v}_h = z \mathfrak{v}_e \tag{3}$$

z ist eine Funktion von φ, die sich leicht bestimmen läßt. Es ist, wenn wir

$$x = \cosh \psi, \quad y = \sinh \psi$$

setzen,

$$x^2 - y^2 = z^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 1,$$

daher $z^2 \cos 2\varphi = 1$,

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{\cos 2\varphi}} \tag{4}$$

Wir können uns also eine Hyperbel aus einer Ellipse mit gleichen Achsen entstanden denken, indem wir die Radienvektoren der Ellipse im Verhältnis $1 : z$ vergrößern.

Wenn wir die Dyadic[1]) $\Phi = \mathfrak{a}\mathfrak{i} + \mathfrak{b}\mathfrak{j}$ zur Darstellung der Ellipsengleichung verwenden, so haben wir:

$$\mathfrak{v}_e = \Phi \cdot \mathfrak{r}_1. \tag{5}$$

Wollen wir dieselbe Darstellung für die Hyperbel verwenden, so müssen wir Φ noch mit z multiplizieren, also:

$$\Psi = z\Phi = z\mathfrak{a}\mathfrak{i} + z\mathfrak{b}\mathfrak{j}$$

und

$$\mathfrak{v}_h = \Psi \cdot \mathfrak{r}_1. \tag{6}$$

Die Dyadic Φ im ersten Fall ist konstant, während die Dyadic Ψ im zweiten Fall eine Funktion der Richtung des $\mathfrak{r}_1$ ist.

Entsprechende Verallgemeinerungen werden sich im Raume ergeben.

Veränderliche Dyadics werden sich auch sonst zur Darstellung von Kurven und Flächen verwenden lassen.

Stuttgart. VICTOR FISCHER.

1) Über Dyadics siehe Gibbs-Wilson, Vektoranalysis. Newyork u. London 1901. Fischer, Vektordifferentiation und Vektorintegration. Leipzig 1904, A. Barth.

Eine Eigenschaft der sogenannten Gaußschen Bildpunkte der imaginären Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche 2. O.

Jst

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + \cdots + 2a_{14}x + \cdots + a_{44} = \tag{1}$$

die Gleichung einer Mittelpunktsfläche 2. Ordnung F^2 in rechtwinkligen Koordinaten, so läßt sich bekanntlich der Wert $f(x_1, y_1, z_1)$ für die Koordina-

eines Punktes D, der nicht auf der Fläche liegt, folgendermaßen deuten. Eine durch D gehende Gerade schneide die Fläche in A und B: es sei $DA = r_1$, $DB = r_2$; ϱ die Länge des der Geraden parallelen Halbmessers der Fläche, x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Mittelpunktes O der Fläche, so ist

$$f(x_1, y_1, z_1) = \frac{r_1 r_2}{\varrho^2} f(x_0, y_0, z_0),$$

oder wenn man $\frac{f(x, y, z)}{f(x_0, y_0, z_0)} = \varphi(x, y, z)$ setzt, $\varphi(x_1, y_1, z_1) = \frac{r_1 r_2}{\varrho^2}$.[1])

Dies ergibt sich wohl am einfachsten, wenn man mit α, β, γ die Winkel der Geraden mit den Koordinatenachsen, mit r die Entfernung des Punktes (x, y, z) von (x_1, y_1, z_1) bezeichnet, also die Gleichung der Geraden in die Form

$$x = x_1 + r \cdot \cos\alpha, \quad y = y_1 + r \cdot \cos\beta, \quad z = z_1 + r \cdot \cos\gamma$$

setzt und $f(x, y, z)$ nach Potenzen von r entwickelt. Man erhält dann:

$$r_1 r_2 = \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{N} \quad \text{und ebenso} \tag{2}$$

$$\varrho^2 = \frac{f(x_0, y_0, z_0)}{N}, \quad \text{wo} \quad N = \tag{3}$$

$a_{11} \cos^2\alpha + 2a_{12} \cos\alpha\cos\beta + a_{22}\cos^2\beta + 2a_{13}\cos\alpha\cos\gamma + 2a_{23}\cos\beta\cos\gamma + a_{33}\cos^2\gamma$ ist, und daraus folgt die erwähnte Beziehung.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß für eine durch D gehende, die Fläche **nicht** *schneidende Gerade L*

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \frac{p^2}{\varrho^2}$$

ist, wenn p die Entfernung des Punktes D von einem der „Gaußschen Bildpunkte"[2]) der beiden konjugiert-imaginären Schnittpunkte von L mit F^2 in der durch L und O gehenden Ebene bezeichnet. Diese Bildpunkte erhält man, wenn man in der genannten Ebene auf L im Zentrum C der durch F_2 auf L erzeugten Involution konjugierter Punkte die Senkrechte errichtet und nach beiden Seiten von C aus eine Strecke gleich der Potenz der Involution abträgt (d. h. gleich der Wurzel aus dem konstanten Produkt der Abstände, die zwei involutorisch gepaarte Punkte vom Punkte C besitzen). Die Endpunkte der Senkrechten sind dann die Gaußschen Bildpunkte. Sie lassen sich auch definieren als das dritte Paar Gegenecken eines vollständigen Vierseits, für das das gegebene Paar imaginärer Punkte und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte die anderen Gegeneckenpaare sind.

Die Gerade L sei durch zwei ihrer Punkte $D(x_1, y_1, z_1)$ und $E(x_2, y_2, z_2)$ bestimmt. Die Koordinaten ihrer Schnittpunkte F und G mit F^2 findet man, indem man in (1)

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k} \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k} \quad z = \frac{z_1 + kz_2}{1+k}$$

---

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. 5. Aufl. § 161.

2) Vgl. F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. I. S. 73

einsetzt und die Gleichung nach k auflöst. Aus (1) wird, wenn man die Nenner fortbringt:

$$S_1 + 2k \cdot P + k^2 S_2^2 = 0, \quad \text{worin}$$

$$S_1 = f(x_1, y_1, z_1), \quad S_2 = f(x_2, y_2, z_2),$$

$$P = a_{11} x_1 x_2 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{22} y_1 y_2 + \cdots + a_{14}(x_1 + x_4) + \cdots + a_{44}.$$

Daraus folgt:

$$k = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - S_1 S_2}}{S_2},$$

und man erhält demnach die Koordinaten von F bezw. G, wenn man in

$$\frac{S_2 x_1 + (-P \pm \sqrt{P^2 - S_1 S_2}) x_2}{S_2 - P \pm \sqrt{P^2 - S_1 S_2}}; \quad \frac{S_2 y_1 + (-P \pm \sqrt{P^2 - S_1 S_2}) y_2}{S_2 - P \pm \sqrt{P^2 - S_1 S_2}};$$

$$\frac{S_2 z_1 + (-P \pm \sqrt{P^2 - S_1 S_2}) z_2}{S_2 - P \pm \sqrt{P^2 - S_1 S_2}}$$

die oberen, bezw. die unteren Zeichen nimmt.

Daraus folgen mittels einer leichten Rechnung die Koordinaten des reellen Mittelpunktes C von FG:

$$\frac{x_1(S_2 - P) + x_2(S_1 - P)}{S_2 - 2P + S_1}; \quad \frac{y_1(S_2 - P) + y_2(S_1 - P)}{S_2 - 2P + S_1}; \quad \frac{z_1(S_2 - P) + z_2(S_1 - P)}{S_2 - 2P + S_1}.$$

C teilt also DE im Verhältnis $\frac{S_1 - P}{S_2 - P}$.

Ferner ergibt sich mit Hilfe der Koordinaten von F und G, wenn $DE^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d^2$ gesetzt wird,

$$-\frac{FG^2}{4} = \frac{(P^2 - S_1 S_2) d^2}{(S_2 - 2P + S_1)^2};$$

denn der Ausdruck auf der rechten Seite hat, da F und G konjugiert-imaginär sein sollen, einen reellen negativen Wert. Ebenso erhält man: $CE^2 = \frac{(P - S_1)^2 d^2}{(S_2 - 2P + S_1)^2}$, und folglich, wenn Q der Gaußsche Bildpunkt von F und G ist:

$$QE^2 = QC^2 + CE^2 = \frac{FG^2}{4} + CE^2 = \frac{d^2 S_1}{S_1 - 2P + S_2}.$$

Nun ist aber:

$$S_1 + S_2 - 2P = a_{11}(x_1 - x_2)^2 + 2a_{12}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + a_{22}(y_1 - y_2)^2 + \\ + 2a_{13}(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) + a_{33}(z_1 - z_2)^2 = N \cdot d^2,$$

wenn α, β, γ die Neigungswinkel von L gegen die Koordinatenachsen sind, also nach (3):

$S_1 + S_2 - 2P = \frac{d^2 S_0}{\varrho^2}$. Mithin ist $QE^2 = \frac{S_1}{S_0} \cdot \varrho^2$ oder $\varphi(x_1, y_1, z_1) = \frac{p}{\varrho}$

Charlottenburg, Dezember 1903. E. Meyer.

Über den sogenannten irreduzibelen Fall der kubischen Gleichung.

Wenn man den irreduzibelen Fall der kubischen Gleichung ohne Hereinziehung des Imaginären und zugleich ohne unsymmetrische Bevorzugung einer Wurzel zu behandeln wünscht, kann man folgenden Weg[1]) einschlagen.

Die Gleichung mit reellen Koeffizienten laute

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c = 0. \tag{1}$$

Wir setzen

$$x = uy + v \tag{2}$$

und erhalten:

$$u^3y^3 + 3(v+a)u^2y^2 + 3(v^2 + 2av + b)uy + (v^3 + 3av^2 + 3bv + c) = 0. \tag{3}$$

Wir suchen u und v so zu bestimmen, daß den drei Gleichungen genügt wird:

$$v + a = -qu, \quad v^2 + 2av + b = -u^2, \tag{4}$$
$$v^3 + 3av^2 + 3bv + c = qu^3.$$

Multiplizieren wir die beiden ersten Gleichungen und subtrahieren dann von der dritten, so kommt $2(b - a^2)v + c - ab = 0$, also:

$$v = -\tfrac{1}{2}\frac{ab - c}{a^2 - b}. \tag{5}$$

Wird nach Einsetzung dieses Wertes für v die linke Seite der mittleren Gleichung (4) negativ, so wird u reell:

$$u = \sqrt{-\tfrac{1}{4}\left(\frac{ab-c}{a^2-b}\right)^2 + a\frac{ab-c}{a^2-b} - b} \tag{6}$$

und q reell

$$q = \frac{-v-a}{u}. \tag{7}$$

Wir können also die Gleichung (3) nun schreiben: $y^3 - 3qy^2 - 3y + q = 0$ oder

$$\frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} = q. \tag{8}$$

Wird hierin $q = \operatorname{tg}\alpha$ gesetzt, so ist $y = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$. Nehmen wir der Einfachheit wegen, wie üblich $a = 0$, so haben wir folgende auf rein reellem Wege abgeleitete *Lösung des irreduzibelen Falles* der kubischen Gleichung

$$x^3 + 3bx + c = 0.$$

Setze $$u = \sqrt{-\tfrac{1}{4}\frac{c^2}{b^2} - b} \quad \text{und} \quad \frac{c}{2bu} = \operatorname{tg}\alpha,$$

---

1) Die Methode der Lösung stimmt der Sache nach mit der von F. H. Stoll überein („Mathematisch-physikalische Miscellen". II. Progr. Bensheim 1876). Herr Matthiessen hat im Archiv (3) 2, 109—110, 1902, diese Lösung ebenfalls ohne Heranziehung des Imaginären abgeleitet. Obgleich also der Weg des Herrn Godt von dem des Herrn Matthiessen nicht gerade abweicht, haben wir die vorliegende Notiz wegen des interessanten Hinweises auf den Zusammenhang mit anderen geometrischen Fragen aufgenommen. Red.

so sind die gesuchten Wurzeln:

$$x_1 = -\frac{c}{2b} + u \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3},$$

$$x_2 = -\frac{c}{2b} + u \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha + \pi}{3},$$

$$x_3 = -\frac{c}{2b} + u \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha + 2\pi}{3}.$$

Wer sich zu vergewissern wünscht, auf welchem natürlichen Wege diese Lösung zu finden, und wie einfach sie geometrisch zu deuten ist, der vergleiche: Godt, Über einige sog. merkwürdige Punkte des Dreiecks. Lübeck, Progr. des Katharineums. 1904. Nr. 63 und bemerke dabei nur, daß im vorliegenden Falle die Wurzeln der Gleichung von den Punkten Δ und Δ' aus durch Strahlen ausgeschnitten werden, die paarweise Winkel von 60^0 bilden.

Lübeck, 5. Dezember 1904. W Godt.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu Band I_2, Seite 577.

In Fußnote 58 lies: Seelhoff, Zeitschr. Math. Phys. **31**, 1886, p. 166—173. — Im Texte, Zeile 5/4 von unten füge hinzu: $2^{2^{11}} + 1$ ist durch $319\,489 \times 974\,489$ teilbar, nach Cunningham, Brit. Assoc. Rep. 1899, p. 653—654. Vielleicht hätte hinzugefügt werden können, daß nach Eisenstein $2 + 1$, $2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} + 1$ lauter Primzahlen sind, sowie daß nach Catalan (Mél. math. I, p. 376, 1885) $2^p - 1$ Primzahl ist, falls $p = 2^q - 1$. (Beide Behauptungen sind noch unbewiesen.)

Über die Zerlegung der Zahlen in Faktoren ist in England in neuerer Zeit (Educ. Times, Mess. of Math. usw.) sehr viel geschrieben; die wichtigsten Abhandlungen sind:

C. E. Bickmore, On the numerical factors of $a^n - 1$. Mess. (2) **25**, 1—44; **26**, 1—38. (1895/6).

W. D. Christie, Note on the factorization etc. Ed. T. **69**, 99—104. (1898).

H. I. Woodall, Method on factorization. Ed. T. **70**, 68—71; **71**, 124—125. (1899).

D. Biddle, A further method etc. Mess. (2) **30**, 66—70. (1900).

D. Biddle, Note on the reduction of formulae etc. Ed. T. **74**, 147—152. (1901).

J. Tennan, On the factorization of high numbers. Mess. (2) **30**, 190—199. (1901).

A. Cunningham and Cullen, On idoneal numbers. Brit. Ass. Rep. (1901) 552.

Cunningham gibt in seinen zahlreichen Arbeiten auch mehrere nützliche Tabellen, so dreiziffrige Endungen von Quadratzahlen.

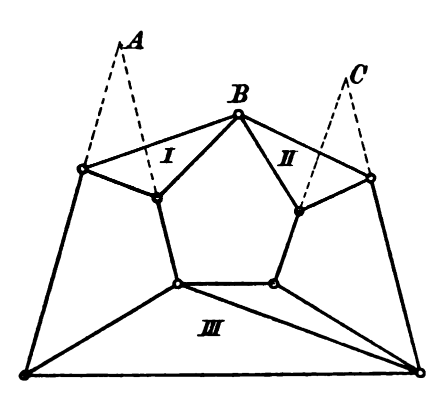
Potsdam, am 25. März 1905. Otto Meissner.

Zu Bd. IV, Abschn. 39, S. 412.

Die Kennzeichen der Beweglichkeit ebener einfacher Fachwerke.

(Auszug aus einem Briefe von M. Grübler an L. Henneberg.[1])

Im Bd. IV 1 der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" schließen Sie den Abschnitt 39 (S. 412) Ihres Artikels über die graphische Statik mit dem folgenden Satz: „Auch die angeführten Untersuchungen von M. Grübler, in denen die Drehungszentren der einzelnen Stäbe bestimmt werden, haben zu einer Methode zur Untersuchung des Grenzfalles geführt. Dieselbe läuft jedoch im wesentlichen auf die Methode von H. Müller-Breslau hinaus, insofern die Endpunkte der normalen Geschwindigkeiten auch als Drehungszentren angesehen werden können". Diese Behauptung trifft jedoch nicht zu. Das von mir in der Rig. Ind. Zeit. 1887 S. 51 und 1888 S. 278 mitgeteilte Kennzeichen der Beweglichkeit eines ebenen einfachen Fachwerkes beruht darauf, daß das Fachwerk in den fraglichen Fällen als übergeschlossene kinematische Kette angesehen werden kann. Liegen dann die Pole (Drehungszentren) der Relativbewegungen irgend dreier nicht in einem Knotenpunkte zusammenstoßender Glieder auf einer Geraden, so ist das Fachwerk beweglich, im anderen Falle nicht. So ist z. B. das beistehende Fachwerk (s. die Figur) beweglich oder nicht, wenn die drei Pole A, B, C der Relativbewegungen der beiden Dreiecke I und II und des Viereckes III in einer Geraden liegen oder nicht. Die Methode von Müller-Breslau dagegen beruht darauf, daß die Endpunkte der senkrechten Geschwindigkeiten eines ebenen starren Systems (bei dessen komplaner Bewegung) ein ähnliches und ähnlichliegendes System bilden. Läßt sich also zu einem ebenen einfachen Fachwerke ein ähnliches und ähnlichliegendes Fachwerk zeichnen, so ist ersteres starr, im anderen Falle nicht. Die beiden Methoden haben wegen der Verschiedenheit ihres Ausgangspunktes keinen inneren Zusammenhang und sind folglich nicht auf einander zurückführbar.



Zu demselben Artikel, p. 351, Note 9 teilt mir Herr C. F. Geiser mit, daß Culmann nicht der erste Direktor des Züricher Polytechnikums war (er war Direktor von 1872—1875). L. Henneberg.

1) Mit Genehmigung von Herrn M. Grübler von Herrn L. Henneberg übersandt.

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

O. von und zu Aufsess, Die physikalischen Eigenschaften der Seen. Aus der Sammlung „Die Wissenschaft" Heft 4. Braunschweig 1905, Vieweg u. Sohn 120 S.

P. Bachmann, Zahlentheorie. V. Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 548 S. 17 ℳ

A. Börsch, Bericht über Lotabweichungen (1903). Abdr. a. d. Abhand. d. 14. allgem. Konf. d. internat. Erdm. Leiden 1905.

A. Cabreira. Quelques mots sur les mathématiques en Portugal. Notice et défense des travaux. Avec biographie de l'auteur par A. S. Lucas. Lissabon 1905, I. d'Andrade. 64 S.

Die Neubauten der königlichen Sächsischen Technischen Hochschule zu Dresden. 1905. 56 S.

O. Frölich, Die Entwicklung der elektrischen Messungen. Sammlung aus „Die Wissenschaft". Braunschweig 1905, Vieweg & Sohn. 192 S. 6,80 ℳ

E. Grimsehl, Angewandte Potentialtheorie I. Leipzig 1905, Göschen. (Sammlung Schubert 38) 219 S. 6 ℳ

O. Gutsche, Mathematische Übungsaufgaben. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 82 S.

E. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit 32 Figuren im Text. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 235 S. 5,60 ℳ

G. O. James, Elements of the kinematics of a point and the rational mechanics of a particle. New York 1905, John Wiley and Sons. 176 S. 2 $.

M. Krause, Über die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts auf höhern Schulen seit 1890, insbesondere über die Einführung der Differential- und Integralrechnung in dieselben. Abh. der naturw. Ges. Isis in Dresden, 1904, Heft II.

L. Krüger, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. Veröffentlichung des Kgl. preuß. geodät. Inst. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 24 S.

Laguerre, Oeuvres publiées sous les auspices de l'académie des sciences par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. Tome II. Géométrie. Paris 1905, Gauthier-Villars. 715 S.

W. Lorey, Über die Wohltat und das Werden der Zahl. Progr. Gymnas. Görlitz 1905. 10 S.

G. Mahler, Physikalische Aufgabensammlung. Leipzig 1905, Göschen, Sammlung Göschen Nr. 243. 117 S. 0,80 ℳ

E. Maillet, Les rêves et l'inspiration mathématiques (Enquête et résultats). Extrait du Bull. de la Soc. Philomat. 1905. 44 S.

R. Marcolongo, Meccanica razionale. I. Cinematica — Statica 271 S. L. 3. — II. Dinamica. Principi di idromeccanica. 324 S. Milano 1905, U. Hoepli. L. 3.

H. Poincaré. Leçons de mécanique céleste. Tome I. Théorie générale des perturbations planétaires. Paris 1905, Gauthier-Villars. 365 S.

K. Snyder. Das Weltbild der modernen Naturwissenschaft nach den Ergebnissen der neuesten Forschungen. Übers. von H. Kleinpeter. Leipzig 1905, A. Barth. 306 S. 6,60 ℳ

J. Thomae, Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 44 S.

J. J. Thomson, Elettricità e materia. Traduzione con aggiunte del G. Faè. Milano 1905, U. Hoepli. 199 S. L. 2.

Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker Kongresses in Heidelberg 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses A Krazer. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 755 S.

W. Walther und M. Röttinger. Technische Wärmelehre (Thermodynamik). Leipzig 1905, Göschen. Sammlung Göschen Nr. 242. 144 S. 0,80 ℳ.

B. Weinstein. Thermodynamik und Kinetik der Körper. Dritter Band. Erster Halbband: Die verdünnten Lösungen. Die Dissoziation. — Thermodynamik der Elektrizität und des Magnetismus (Erster Teil). Braunschweig 1905, Vieweg und Sohn. 461 S.

F. Wislicenus. Der Kalender in gemeinverständlicher Darstellung. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 69. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 118 S.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

E. Eckhardt, J. Edalji, P. Epstein, A. Fleck, A. Gleichen, W. Godt, H. Graf, R. Güntsche, G. Holzmüller, J. Horn, Ed. Janisch, E. P. Jourdain, F. Jung, W. Kapteyn, A. Kiefer, G. Kober, P. Kokott, M. Krause, M. Lerch, W. Ludwig, E. Malo, L. Matthiessen, O. Meissner, W. F. Meyer, J. Neuberg, Th. Reye, J. Rausch, L. Saalschütz, T. Sawayama, P. Schafheitlin, E. Schultz, R. Schüssler, C. Segre, O. Spieß, H. Stahl, R. Sturm, G. Teixeira, H. Thieme, W. Velten, A. Vicuna, J. de Vries, G. Wallenberg, A. Wendler, K. Zorawski.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

[illegible]

[illegible]

E. LAMPE
[illegible]

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN.

9. BAND. 3. HEFT.

MIT 12 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 16. AUGUST 1905.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigskirchstraße 6 I

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

Über Tetraeder, deren Kanten eine Fläche zweiter Ordnung berühren.

Von TH. REYE in Straßburg i. E.

Ein Tetraeder und eine Fläche zweiter Ordnung nenne ich „einander anbeschrieben“, wenn die sechs Kanten des Tetraeders die Fläche berühren. Von ihnen gelten folgende Sätze, die mir bis auf einzelne neu zu sein scheinen.

1. Einer Fläche zweiter Ordnung lassen sich ∞^6 Tetraeder anbeschreiben; doch sind diese nur dann reell, wenn die Fläche keine reelle Gerade enthält.

2. Jede Tangente t einer nicht geradlinigen Fläche F^2 zweiter Ordnung, z. B. einer Kugelfläche, ist Kante von ∞^3 der Fläche anbeschriebenen Tetraedern. Zwei beliebige Punkte von t sind Eckpunkte von ∞^1 dieser Tetraeder; der Ort ihrer übrigen Eckpunkte ist ein Kegelschnitt, der die zu t polare Tangente in ihrem Schnittpunkt mit t berührt. Jedes Tangentendreieck der Fläche F^2 ist in zwei ihr anbeschriebenen Tetraedern enthalten.

3. Zwei Ebenen α, β, die sich in einer Tangente t der Fläche F^2 schneiden, sind in ∞^1 der Fläche anbeschriebenen Tetraedern enthalten. Die übrigen Ebenen dieser Tetraeder umhüllen einen Kegel zweiter Ordnung, der die zu t polare Tangente und die Schnittkurven von F^2 mit α und β enthält. Jedes Tangentendreikant der Fläche ist in zwei ihr anbeschriebenen Tetraedern enthalten.

4. Von einem der Fläche F^2 zweiter Ordnung anbeschriebenen Tetraeder sind allemal die Gegenkanten konjugiert in bezug auf F^2, d. h. jede seiner Kanten schneidet die Polare der gegenüberliegenden Kante (**2.**, **3.**). Die Kanten und Eckpunkte der anbeschriebenen reellen Tetraeder liegen alle auf einer (der äußeren) Seite der Fläche.

5. Die Polarebenen der Eckpunkte eines der Fläche F^2 anbeschriebenen Tetraeders bilden ein zweites ihr anbeschriebenes Tetraeder. Die zwölf Kanten dieser beiden Tetraeder sind paarweise reziprok polar und berühren die Fläche in den nämlichen sechs Punkten. Jede Kante des einen Tetraeders schneidet zwei Gegenkanten des andern (**4.**); die

Tetraeder sind demnach „desmisch“ und liegen auf vier Arten perspektiv.[1])

6. Die sechs Ebenen, die je eine Kante eines der F^2 anbeschriebenen Tetraeders mit dem Berührungspunkte und der Polare der gegenüberliegenden Kante verbinden, schneiden sich in einem Punkte S und zu dreien in den vier Geraden, die S mit den vier Eckpunkten verbinden: in demselben Punkte S schneiden sich folglich die drei Geraden g, die die Berührungspunkte von je zwei Gegenkanten verbinden (Steiner[2])). Der Punkt S möge der „Berührungspol“ der Fläche und des ihr anbeschriebenen Tetraeders heißen; er liegt innerhalb der Fläche.

7. Die sechs Schnittpunkte der Tetraederkanten mit den Polaren ihrer Gegenkanten liegen in einer Ebene σ und zu dreien in den vier Schnittgeraden von σ mit den Ebenen des Tetraeders. Bezüglich der Fläche F^2 ist σ die Polarebene des Berührungspoles S. Die drei Paar Berührungsebenen von F^2, in denen die drei Paar Gegenkanten des Tetraeders liegen, schneiden sich in drei Geraden g_1 der Ebene σ, nämlich in den Polaren der drei Geraden g, die die Berührungspunkte von je zwei Gegenkanten verbinden.

8. Diese drei Geraden g sind konjugiert und bilden mit ihren Polaren g_1 die drei Paar Gegenkanten eines Polartetraeders von F^2. Das anbeschriebene Tetraeder und das zu ihm polare bilden mit diesem Polartetraeder ein „desmisches Tripel“. Nämlich jede Kante eines beliebigen der drei Tetraeder schneidet zwei Paar Gegenkanten der beiden übrigen in zwei Punkten und liegt mit ihnen in zwei Ebenen; diese Ebenen sind durch zwei Ebenen des Tetraeders harmonisch getrennt, die beiden Schnittpunkte aber durch zwei seiner Eckpunkte. Jede Ebene des Tetraeders ist die Involutionsebene, und der gegenüberliegende Eckpunkt ist das Involutionszentrum einer perspektiven Involution, die die übrigen beiden Tetraeder ineinander transformiert.[3])

9. Einem gegebenen Tetraeder lassen sich ∞^3 Flächen F^2 zweiter Ordnung anbeschreiben. Wird sein Berührungspol S beliebig angenommen, so sind die Berührungspunkte der sechs Kanten bestimmt (**6.**) und mit ihnen eine der anbeschriebenen Flächen F^2 (Steiner a. a. O.).

10. Zwei Räume lassen sich kollinear so aufeinander beziehen, daß in ihnen zwei Tetraeder, die je einer Fläche zweiter Ordnung an-

---

1) Vgl. Hermes in Crelles Journal 56 S. 213 (1859); Stephanos in Bulletin des sciences math. et astron., 2ᵉ. Série, t. 3 (1879); Veronese im Memorie della R. Accad. dei Lincei (1880—81); Reye in Acta math. I S. 99 (1882).

2) Steiner, Gesammelte Werke I S. 187 und in Gergonne, Annales de Math. t 19 p. 1—8.

3) Reye in Acta math. I S. 100.

beschrieben sind, und zugleich deren Berührungspole einander entsprechen. Die beiden Flächen aber entsprechen dann einander in den kollinearen Räumen (**9.**), sind also kollinear aufeinander bezogen.

11. Eine Fläche zweiter Ordnung geht bekanntlich durch ∞^6 Kollineationen in sich selbst über. Die ihr anbeschriebenen ∞^6 Tetraeder werden durch diese Kollineationen ineinander transformiert, und zwar ein beliebiges von ihnen in jedes der übrigen Tetraeder durch 24 der Kollineationen (vgl. **10.**).

12. Einer Kugel $\varkappa$ lassen sich ∞^3 reguläre Tetraeder anbeschreiben. Sie gehen durch Drehungen um die Durchmesser von $\varkappa$ ineinander über und haben das Kugelzentrum zum gemeinsamen Berührungspol. Sie alle sind einer mit $\varkappa$ konzentrischen Kugel $\varkappa_1$ einbeschrieben und einer anderen konzentrischen $\varkappa_2$ umbeschrieben; die Radien von $\varkappa$, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ verhalten sich wie $1 : \sqrt{3} : \sqrt{\frac{1}{3}}$. Jede Tangente t der Kugel $\varkappa$ ist Kante von einem der anbeschriebenen regulären Tetraeder; seine drei Paar Gegenkanten kreuzen sich rechtwinklig, und ihre Berührungspunkte liegen auf drei konjugierten Durchmessern der Kugel. Je zwei dieser Durchmesser bilden mit den Richtungen der beiden Gegenkanten, die den dritten Durchmesser schneiden, zwei halbe rechte Winkel; sie trennen also die unendlich fernen Punkte dieser zwei Gegenkanten harmonisch.

13. Jeder nicht geradlinigen Fläche F^2 zweiter Ordnung lassen sich ∞^3 Tetraeder so anbeschreiben, daß sie einen beliebigen von F^2 eingeschlossenen Punkt S zum gemeinsamen Berührungspol haben (**12.**, **10.**). Sie alle sind einer zweiten Fläche F_1^2 zweiter Ordnung ein- und einer dritten F_2^2 umbeschrieben. Die Flächen F^2, F_1^2, F_2^2 berühren sich längs des imaginären Kegelschnittes, den die Polarebene von S mit F^2 gemein hat. Jede Tangente t von F^2 ist Kante von einem der ∞^3 Tetraeder; die ihr gegenüberliegende Kante t_1 schneidet die zu t polare Tangente (**4.**) und berührt F^2 in dem Punkte, der mit S und dem Berührungspunkte von t in einer Geraden liegt. Die Berührungspunkte der übrigen zwei Paar Gegenkanten des Tetraeders liegen mit S in zwei konjugierten Geraden g', g'', welche die Polare von g schneiden und die Schnittpunkte dieser Polare und der Tangenten t, t_1 harmonisch trennen (**12.**). Sie sind hiernach konstruierbar, durch sie aber sind die übrigen vier mit t und t_1 inzidenten Tetraederkanten bestimmt.

14. Jeder außerhalb der Fläche F^2 gelegene Punkt A ist Eckpunkt von ∞^3 ihr anbeschriebenen Tetraedern (**2.**). Diese werden durch die ∞^3 Kollineationen, für welche F^2 und A invariant sind, ineinander transformiert. In ihnen liegen dem Eckpunkte A die ∞^2 Berührungsebenen einer Fläche zweiter Ordnung gegenüber, und zwar jede der

Ebenen in ∞^1 der Tetraeder; diese ∞^1 Tetraeder aber haben alle denselben Berührungspol S. Der Ort der Berührungspole jener ∞^3 anbeschriebenen Tetraeder, die A zum Eckpunkt haben, ist eine Fläche zweiter Ordnung; sie berührt die Fläche F^2 längs ihrer Schnittkurve mit der Polarebene von A.

15. Jede die Fläche F^2 schneidende Ebene α ist in ∞^3 der Fläche anbeschriebenen Tetraedern enthalten (**3.**). In ihnen liegen der Ebene α die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung gegenüber, und zwar jeder der Punkte in ∞^1 der Tetraeder; diese ∞^1 Tetraeder haben alle denselben Berührungspol. Der Ort der Berührungspole jener ∞^3 anbeschriebenen Tetraeder, die die Ebene α enthalten, ist eine Fläche zweiter Ordnung; sie berührt die Fläche F^2 längs ihrer Schnittkurve mit α.

Straßburg, 27. Juni 1905.

Zur Lehre von den quadratischen Resten.

Von L. Saalschütz in Königsberg in Pr.

1. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf quadratische Reste und Nichtreste der Primzahlen von der Form

$$p = 4n + 1.$$

Bezeichnen wir mit a einen quadratischen Rest, mit b einen quadratischen Nichtrest für p, so lautet das Eulersche Kriterium dafür, ob eine gegebene Zahl Rest oder Nichtrest ist, folgendermaßen[1]):

$$\left.\begin{cases} a^{2n} \equiv 1 \\ b^{2n} \equiv -1 \end{cases}\right\} \pmod{p}. \tag{1}$$

Damit beweist man leicht folgenden bereits bekannten Satz:

Satz I. Ist a quadratischer Rest für p, so ist auch $p - a$ quadratischer Rest, ist b quadratischer Nichtrest, so $p - b$ ebenfalls.[2])

Insbesondere sind 1 und -1 quadratische Reste.

2. *Satz II. Alle quadratischen Reste zerfallen in zwei Gruppen von je n Elementen; die Elemente der ersten Gruppe sind, für den Modul p, kongruent den Quadraten von Resten, diejenigen der anderen Gruppe kongruent den Quadraten von Nichtresten.*

---

1) Siehe z. B. Bachmann, „Niedere Zahlentheorie“, 1. Teil 1902 in der Teubnerschen Sammlung von mathematischen Lehrbüchern, Seite 188, auf welches Werk sich auch die folgenden Zitate beziehen.

2) Siehe a. a. O. S. 300.

Beweis. Sei a_1 ein quadratischer Rest, dann ist a_1^2 auch quadratischer Rest oder kongruent einem solchen, etwa ϱ_1 (mod. p). Nach *Satz I* ist dann $p - a_1$ ebenfalls ein quadratischer Rest, also haben wir

$$(2) \qquad (p - a_1)^2 \equiv a_1^2 \equiv \varrho_1 \text{ (mod. } p).$$

Ist nun a_2 ein von a_1 und von $p - a_1$ verschiedener quadratischer Rest und $a_2^2 \equiv \varrho_2$, so ist

$$\varrho_2 - \varrho_1 \equiv (a_2^2 - a_1^2) \text{ (mod. } p),$$

aber $a_2 + a_1$ nicht gleich p und $< 2p$, also inkongruent p, und $a_2 - a_1$ ebenfalls, folglich sind ϱ_2 und ϱ_1 voneinander verschieden. Aus den $2n$ quadratischen Resten erhalten wir also n verschiedene Werte:

$$\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3 \cdots \varrho_n.$$

Die noch übrigen n quadratischen Reste sind nicht kongruent den Quadraten von Resten, sie können also nur, da a^2 inkongruent b^2 ist, den Quadraten von Nichtresten kongruent sein. Wir bezeichnen sie mit

$$\nu_1\ \nu_2\ \nu_3 \cdots \nu_n.$$

Setzen wir in (1) ϱ statt a^2, ν statt b^2, wobei wir, wie im folgenden, irgend ein (beliebiges) Element aus der Klasse der (ϱ) einfach mit ϱ, ein solches aus der Klasse der (ν) einfach mit ν bezeichnen, so ergeben sich die charakteristischen Gleichungen:

$$(3) \qquad \varrho^n \equiv 1, \quad \nu^n \equiv -1 \text{ (mod. } p).$$

Insbesondere ist für ein *ungerades* n: 1 ein ϱ, -1 ein ν, für ein *gerades* n sind beide: 1 wie -1, zu den ϱ gehörig. Daraus folgt:

Satz III. Ist für ein ungerades n der quadratische Rest a ein ϱ, so ist $p - a$ (oder $-a$) ein ν, und umgekehrt; für ein gerades n jedoch gehören a und $p - a$ gleichzeitig zur Klasse der ϱ oder zur Klasse der ν.

Sind ferner ϱ_h, ϱ_k, ν_i, ν_g beliebige Elemente aus der Klasse der ϱ, bezüglich der ν, so sind $\varrho_h \cdot \varrho_k$, $\nu_i \cdot \nu_g$, $\varrho_h \cdot \nu_i$ als Produkte quadratischer Reste wieder quadratische Reste; welcher Klasse sie aber angehören, sagt der folgende Satz.

Satz IV. Das Produkt zweier Elemente aus der Klasse der (ϱ) oder zweier Elemente aus der Klasse der (ν) gehört zur Klasse der (ϱ), das Produkt eines Elementes aus der Klasse der (ϱ) und eines Elementes aus der Klasse der (ν) gehört zur Klasse der (ν), oder in verkürztem Ausdruck:

$$(4) \qquad \varrho \times \varrho = \varrho, \quad \nu \times \nu = \varrho, \quad \varrho \times \nu = \nu.$$

Denn in der Tat ist nach (3):

$$(\varrho_h \cdot \varrho_k)^n \equiv 1, \quad (\nu_g \cdot \nu_k)^n \equiv 1, \quad (\varrho_h \cdot \nu_g)^n \equiv -1 \text{ (mod. } p),$$

womit der Beweis geführt ist.

Multipliziert man zwei Nichtreste miteinander, so kann ein ϱ ein ν entstehen; man kann aber die Nichtreste so in zwei Gru verteilen, daß man sofort ersehen kann, welche Art von quadratisc Rest durch das Produkt hervorgebracht wird.

Ein einfaches Verfahren zu diesem Zwecke ist folgendes. greife irgend einen Nichtrest, er sei b_0, heraus, multipliziere ihn allen Nichtresten: diejenigen, die dabei ein ν ergeben, setze man m in *eine* Gruppe, die anderen in eine *andere* Gruppe, dann ist das dukt zweier Zahlen derselben Gruppe ein ν, zweier Zahlen aus schiedenen Gruppen ein ϱ. Der Beweis beruht auf folgendem S

Gibt das Produkt zweier Nichtreste b_h und b_k ein ν, so verh sie sich einem dritten Nichtrest b_i gegenüber gleichartig, ergibt Produkt ein ϱ, so verhalten sie sich einem dritten Nichtrest gegen ungleichartig. Denn

$$(b_h b_k b_i)^2 = \nu = b_h b_k \cdot b_h b_i \cdot b_k b_i.$$

3. Wir haben nunmehr zu unterscheiden, ob n *ungerade* *gerade* ist.

Quadrieren wir im ersten Falle, also wenn p von der F $p = 8z + 5$, die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ weiter, so können nur wied entstehen, (auch die Quadrate der ν liefern dieselben ϱ); da aber w ein ϱ_h kongruent einem ϱ_k, noch (siehe Satz III) ein ϱ_h^2 kongr einem ϱ_k^2 ist, so kann sich die Anzahl der ϱ dabei nicht weiter ringern, hingegen können sie in einzelne Gruppen oder *Perioden*, wir es nennen wollen, zerfallen, wovon wir später ausführlicher r werden. Vgl. die angefügten Beispiele.

Ist jedoch n *gerade*, also $p = 8z + 1$, so setzen wir $2n_1$ st und ordnen die beiden Gruppen der quadratischen Reste der Größe

$$(\varrho) \qquad \varrho_1 = 1,\ \varrho_2, \ldots \varrho_{n_1},\ \varrho_{n_1+1}, \ldots \varrho_{n-1},\ \varrho_n,$$

$$(\nu) \qquad \nu_1,\ \nu_2, \ldots \nu_{n_1},\ \nu_{n_1+1}, \ldots \nu_{n-1},\ \nu_n,$$

dann ist (nach Satz III)

$$\varrho_h + \varrho_{n+1-h} = p, \quad \nu_h + \nu_{n+1-h} = p$$

und daher

$$\varrho_{n+1-h}^2 \equiv \varrho_h^2, \quad \nu_{n+1-i}^2 \equiv \nu_i^2 \pmod{p}.$$

Erheben wir also die (ϱ) zum Quadrat, so erscheinen wieder mente der Reihe ϱ, aber jedes zweimal, wir erhalten also nur n_1 einander verschiedene Elemente, die wir als ϱ' bezeichnen wo Quadrieren wir die (ν), so erscheinen auch Elemente aus der R der (ϱ); da aber weder ein ν gleich einem ϱ_h, noch gleich $p - \varrho_h$

so sind diese ϱ_h verschieden von den (ϱ'), wir nennen sie ν' und erhalten somit die beiden voneinander verschiedenen Gruppen:

$$(\varrho') \qquad \varrho_1' \varrho_2' \ldots \varrho_{n_1}',$$
$$(\nu') \qquad \nu_1' \nu_2' \ldots \nu_{n_1}',$$

welche zusammen die (ϱ) bilden.

Die Kongruenzen (3) schreiben wir jetzt in der Form

$$(5) \qquad (\varrho_h^2)^{n_1} \equiv \varrho_h'^{n_1} \equiv 1, \ (\nu_i^2)^{n_1} \equiv \nu_i'^{n_1} \equiv -1 \ (\text{mod. } p)$$

und schließen daraus wie früher

$$(6) \qquad \varrho' \times \varrho' = \varrho', \quad \nu' \times \nu' = \varrho', \quad \varrho' \times \nu' = \nu'.$$

Das Produkt zweier ν ist nach (4) ein ϱ, ob aber ein ϱ' oder ν', läßt sich mit Hilfe eines bestimmten ν' und eines bestimmten ν, oder auch nur eines bestimmten ν in ähnlicher Art feststellen, wie es am Ende von **2.** bezüglich der Nichtreste geschah. Wir gehen aber darauf nicht näher ein.

Ist n_1 *ungerade*, so ist, (5) zufolge, 1 ein ϱ', -1 ein ν', also ist wegen der 3ten (6) $-\varrho'$ ein ν', oder es ist, bei beliebiger Annahme des Index h und richtig dazu gewähltem Index i:

$$(7) \qquad \varrho_h' + \nu_i' = p.$$

Bei weiterer Quadrierung reproduzieren sich die ϱ_h', und die $\nu_i'^2$ ergeben ebenfalls die ϱ_h', da beide Sorten quadratischer Reste Teile von ϱ_h bilden, durch deren Quadrierung keine anderen Zahlen als die ϱ_h' entstehen. Weitere Quadrierung veranlaßt also keine neuen Spaltungen, sondern die Gruppe (ϱ') bleibt allein und unverändert bestehen.

Ist n_1 *gerade* $= 2n_2$, und denken wir uns die ϱ_h', wie die ν_i', der Größe nach geordnet, so ist

$$\varrho_h' + \varrho_{n_1+1-h}' = p, \quad \nu_i' + \nu_{n_1+1-i}' = p,$$

durch die Quadrierung der ϱ' entsteht ein zweimal erscheinendes, System der ϱ', das wir als (ϱ'') bezeichnen, durch Quadrierung der ν' ergibt sich, ebenfalls zweimal, das System der anderen Elemente der ϱ_h', wir bezeichnen dasselbe als (ν''), also

$$(\varrho'') \qquad \varrho_1'' \varrho_2'' \ldots \varrho_{n_2}'';$$
$$(\nu'') \qquad \nu_1'' \nu_2'' \ldots \nu_{n_2}''.$$

Die (ϱ'') und die (ν'') bilden zusammen die (ϱ'). In dieser Art kann man nun weiter fortfahren, bis man zu zwei Systemen mit ungerader Anzahl n_t der Elemente $\varrho^{(t)}$ und $\nu^{(t)}$ gelangt, bei welchen die Operation ihr Ende erreicht.

Für alle diese Systeme gelten, wie leicht zu sehen, folgende mit (3) und (5), sowie mit (4) und (6) analoge Gleichungen:

$$\varrho^{(s)^{n_s}} \equiv 1, \quad \nu^{(s)^{n_s}} \equiv -1 \pmod{p}, \tag{8}$$

$$\varrho^{(s)} \times \varrho^{(s)} = \varrho^{(s)}, \quad \nu^{(s)} \times \nu^{(s)} = \varrho^{(s)}, \quad \varrho^{(s)} \times \nu^{(s)} = \nu^{(s)}. \tag{9}$$

Dagegen ist für $s < t$

$$\varrho_h^{(s)} + \varrho_{n_s+1-h}^{(s)} = p, \quad \nu_i^{(s)} + \nu_{n_s+1-i}^{(s)} = p, \tag{10}$$

aber für $s = t$:

$$\varrho_h^{(t)} + \nu_{n_t+1-h}^{(t)} = p. \tag{11}$$

4. Bevor wir diese allgemeinen Betrachtungen zum Abschluß bringen, schalten wir einige speziellere Sätze ein, ohne jedoch deren Beweis hinzuzufügen.[1])

Satz V. Folgende Summen: die Summe der (ϱ), *wie die der* (ν), *die Summe der* (ϱ'), *wie die der* (ν') *usw., endlich die Summe der* ($\varrho^{(t)}$), *wie die der* ($\nu^{(t)}$), *sind sämtlich durch* p *teilbar. (Nur wenn* $n_t = 1$, $\varrho^{(t)} = 1$, $\nu^{(t)} = p - 1$, *tritt eine Ausnahme ein, indem die letzten Summen nicht durch* p *teilbar sind.)*

Satz VI. Ergänzung des sogenannten Gaußschen Lemmas.[2]) *Man multipliziere einen zur Prüfung vorgelegten quadratischen Rest* a *mit den* n *Nichtresten unterhalb* $\frac{1}{2}p$ *und suche die positiven oder negativen, absolut kleinsten Reste nach* p *auf; ist die Anzahl der negativen Reste ungerade, so gehört* a *zur Klasse der* ν, *ist sie gerade, so gehört* a *zur Klasse der* ϱ.

Satz VII. Die Zahl $2n = \frac{1}{2}(p-1) = r$ *ist quadratischer Nichtrest oder Rest, je nachdem* n *ungerade oder gerade ist, dagegen ist* n *immer quadratischer Rest und zwar immer ein* ϱ.

Ist n gerade, so gehört r zur Klasse der ϱ oder zur Klasse der ν, je nachdem die Zahl 2 (die für ein gerades n immer quadratischer Rest ist) zur Klasse der ϱ oder zur Klasse der ν gehört.

Satz VIII. Bezeichnen wir das Intervall $1 \ldots n$ *als das 1te,* $n+1 \ldots 2n$ *als das 2te, so gelten folgende Ergänzungen bekannter Sätze*[3]) *über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste.*

Für *ungerades* n ist die Anzahl der ν im 1ten Intervall gleich der Anzahl der ungeraden ν in den 1ten beiden, und die Anzahl der ν im 2ten Intervall gleich derjenigen der geraden ν in den 1ten beiden. Genau ebenso für die ϱ.

1) Die Beweise befinden sich in den Händen der geehrten Redaktion.

2) Siehe a. a. O. S. 100.

3) Siehe a. a. O. S. 300ff.

Für *gerades n*, falls 2 zur Klasse der ϱ gehört, ist die Anzahl der ν im 1ten Intervall gleich derjenigen der geraden ν in den 1ten beiden und die Anzahl der ν im 2ten Intervall gleich derjenigen der ungeraden ν in den 1ten beiden; falls aber die Zahl 2 zur Klasse der ν gehört, ist die Anzahl der ν im 1ten Intervall gleich derjenigen der geraden ϱ in den 1ten beiden, und die Anzahl der ν im 2ten Intervall gleich derjenigen der ungeraden ϱ in den 1ten beiden. Hier darf nicht ν mit ϱ vertauscht werden.

Satz IX. Für ein gerades n ist die Anzahl der quadratischen Reste, wie die der Nichtreste in jedem der beiden Intervalle $1 \ldots n$ *und* $n+1 \ldots 2n$ *gerade oder ungerade, je nachdem 2 der Klasse der* ϱ *oder der Klasse der* ν *angehört.*

Satz X. Bedeutet b einen beliebigen Nichtrest, und ist wieder $r = \frac{p-1}{2} = 2n$, *so ist*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r \equiv \varepsilon \cdot b^n \pmod{p}, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

worin der Wert von ε *unter anderem auch von dem gewählten b abhängig ist.*

Ist n ungerade, so ist

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \times 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (r-1) \equiv \varepsilon \pmod{p},$$

und ε bestimmt sich nach folgender Regel:

Man zähle die quadratischen Nichtreste unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$, ihre Anzahl sei ζ, dann sammle man die Nichtreste unter den Zahlen 2, 4, 6, $\ldots n-1$ und $n+2$, $n+4$, $\ldots r-1$ und entscheide[1]), ob ihr Produkt q zu den ν oder zu den ϱ gehört, setze endlich

$$\mu = \zeta + \begin{cases} 1, & \text{wenn } q \text{ ein } \nu, \\ 0, & \text{„ „ „ } \varrho, \end{cases}$$

dann ist

$$\varepsilon = (-1)^\mu.$$

Ist n eine *gerade* Zahl $= 2n_1$, so läßt sich der Satz auch auf die Form bringen:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r \equiv \pm \nu^{n_1} \pmod{p},$$

worin ν ein beliebiges aus der Klasse der ν bedeutet, oder auch, wenn 2 zur Klasse der ν gehört, auf die Form:

$$\frac{r!}{2^n} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

---

1) Wenn man will, mittels der am Ende von 2. mitgeteilten Methode.

Auch hier ist die Bestimmung des Zeichens möglich, jedoch so weitläufig, daß wir von der Durchführung absehen.

5. Wir haben die quadratischen Reste für eine Primzahl der Form $p = 4n + 1$ für ungerades und für gerades n durch fortgesetztes Quadrieren bis auf ein System einer ungeraden Anzahl von Elementen gebracht. Wir wollen nun zeigen, wie man dies System mittels anderer Hilfsmittel erhalten und daraus nach und nach auf die quadratischen Reste zurückschließen kann.

Die Elemente dieses Systems sind:

$$\varrho_1^{(t)} = 1, \quad \varrho_2^{(t)}, \quad \varrho_3^{(t)}, \ldots \varrho_{n_t}^{(t)},$$

oder wenn wir der Kürze wegen τ statt n_t und σ statt $\varrho^{(t)}$ schreiben:

$$(12) \qquad \sigma_1 = 1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ldots \sigma_\tau.$$

Die σ können sich durch nochmaliges Quadrieren in ihrer Gesamtheit nicht mehr verändern, da nach (9) $\sigma \cdot \sigma = \sigma$, also auch $\sigma_h^2 = \sigma_k$ ist, und da ferner die Summe irgend welcher zweier σ nicht $= p$ (siehe 11)) und also auch kein Element $p - 1$ (oder -1) unter ihnen vorhanden ist; wir können sie daher so geordnet denken, daß folgendes System von Gleichungen besteht

$$(13) \qquad \sigma_2^2 \equiv \sigma_3, \ \sigma_3^2 \equiv \sigma_4, \ \sigma_4^2 \equiv \sigma_5, \ \ldots \sigma_m^2 \equiv \sigma_2 \ (\text{mod. } p),$$

daraus folgt

$$(14) \qquad \sigma_2^{2^{m-1}} \equiv \sigma_2 \ \text{ oder } \ \sigma_2^{2^{m-1}-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } p).$$

Hierbei kann m gleich oder kleiner als τ sein; da nun auch

$$(15) \qquad \sigma_2^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod. } p),$$

so muß $2^{m-1} - 1$ mit $p - 1$ oder, da ersteres ungerade ist, mit τ einen Faktor gemeinsam haben. Ist τ eine Primzahl, so muß es ein Teiler von $2^{m-1} - 1$ sein, und ist noch 2 primitive Wurzel für τ, so muß $m = \tau$ sein. In diesem Falle, und nur in diesem Falle, besteht also das System der σ, abgesehen von der 1, aus *einer* Periode. Ist τ eine Primzahl, für welche 2 nicht primitive Wurzel ist, so gehört 2 zu einem Exponenten d, der ein Teiler von $\tau - 1$ ist, und zwar sei $\tau - 1 = kd$; dann erhalten wir k Perioden zu je d Gliedern.

Allgemein ist aber in folgender Art zu verfahren. Sei ξ eine *primitive* Wurzel der Kongruenz

$$(16) \qquad x^\tau \equiv 1 \ (\text{mod. } p),$$

d. h. der ersten Kongruenz (8) für $s = t$, der jedes σ genügen muß. Dann lassen sich die quadratischen Reste σ der Zeile (12) so ordnen:

$$1, \ \xi, \ \xi^2, \ \xi^3, \ldots \xi^{\tau-1},$$

und es kommt die Aufgabe darauf hinaus, die Exponenten $1, 2, 3, \ldots, \tau - 1, \tau$ zweckmäßig zu gruppieren. Sei nun d_h irgend ein Teiler von τ mit Einschluß von 1 und von τ selbst, und bedeute φ die bekannte zahlentheoretische Funktion, so ist bekanntlich

$$\sum_h \varphi(d_h) = \tau,$$

und man erhält die gewünschte Anordnung, indem man sich einer gebräuchlichen Beweismethode dieses Satzes erinnert. Versteht man nämlich allgemein unter $\Phi(n)$ den Inbegriff aller Zahlen, die kleiner als n und zu n teilerfremd sind, so bilde man die Zahlen $\frac{\tau}{d_h}\Phi(d_h)$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, wobei $\Phi(1) = 1$ ist. Wie man leicht übersieht, wird dabei die ganze Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \ldots \tau$ genau reproduziert.[1])

Sei nun d irgend einer der Teiler $d_1, d_2, d_3, \ldots$, so gilt, da alle Teiler ungerade und somit 2 prim gegen alle ist, die Kongruenz

$$2^{\varphi(d)} \equiv 1 \pmod{d}. \tag{17}$$

Gehöre nun 2 zum Exponenten $\frac{\varphi(d)}{h} = \delta$ (nur wenn d eine Primzahlpotenz ist, kann 2 eine primitive Wurzel der Kongruenz (17) sein), so lassen sich δ der Zahlen $\Phi(d)$ 1, 2 etc. durch Potenzen von 2 darstellen, an deren Stelle für Zahlen $> d$ selbstverständlich die Reste nach d zu substituieren sind. Ist dies geschehen, so nehme man irgend eine andere der Zahlen $\Phi(d)$, etwa z; auch diese genügt der Kongruenz

$$x^{\varphi(d)} \equiv 1 \pmod{d}; \tag{18}$$

da nun auch

$$2^{s\delta} \equiv 1 \pmod{d}$$

---

1) *Beispiel* $\tau = 45 = 3^2 \cdot 5$.

$d_1 = 45$, $\Phi(d_1) = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 37, 38, 41, 43, 44$; $\quad \frac{\tau}{d_1}\Phi(d_1) = 1, 2, 4, 7$ etc. $\quad \varphi(d_1) = 24$;

$d_2 = 15$, $\Phi(d_2) = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$; $\quad \frac{\tau}{d_2}\Phi(d_2) = 3, 6, 12, 21, 24, 33, 39, 42$ $\quad \varphi(d_2) = 8$;

$d_3 = 5$, $\Phi(d_3) = 1, 2, 3, 4$; $\quad \frac{\tau}{d_3}\Phi(d_3) = 9, 18, 27, 36$ $\quad \varphi(d_3) = 4$;

$d_4 = 9$, $\Phi(d_4) = 1, 2, 4, 5, 7, 8$; $\quad \frac{\tau}{d_4}\Phi(d_4) = 5, 10, 20, 25, 35, 40$ $\quad \varphi(d_4) = 6$;

$d_5 = 3$, $\Phi(d_5) = 1, 2$; $\quad \frac{\tau}{d_5}\Phi(d_5) = 15, 30$ $\quad \varphi(d_5) = 2$;

$d_6 = 1$, $\Phi(d_6) = 1$; $\quad \frac{\tau}{d_6}\Phi(d_6) = 45$ $\quad \varphi(d_6) = 1$.

ist, wo s irgend eine der Zahlen 1, 2, ... δ bedeutet, so ist auch $2^s \cdot z$ eine Wurzel der Kongruenz (18), d. h. die Zahlen z, $2z$, $2^2 z$, ... $2^{\delta-1} z$ gehören ebenfalls der Reihe $\Phi(d)$ an. Ist die Zahlenreihe $\Phi(d)$ damit noch nicht erschöpft, so kann man eine der noch übrigen Zahlen, etwa z_1, herausgreifen und die Gruppe z_1, $2z_1$, $2^2 z_1$, ... $2^{\delta-1} z_1$ bilden, und wenn man in dieser Art weiter fortfährt, so zerteilt man dadurch die Zahlen $\Phi(d)$ in h Gruppen zu je δ Zahlen. Nimmt man die Zahlen einer solchen Gruppe nach Multiplikation mit $\frac{\tau}{d}$ als Exponenten von ξ an, wie z. B.

$$\xi^{\frac{\tau}{d} z}, \; \xi^{\frac{\tau}{d} \cdot 2z}, \; \xi^{\frac{\tau}{d} \cdot 2^2 z}, \; \ldots \xi^{\frac{\tau}{d} \cdot 2^{\delta-1} z}, \tag{19}$$

so hat man dadurch eine *Periode der quadratischen Reste* σ *gewonnen, d. h. eine Reihe von Zahlen, deren jede das Quadrat der vorangehenden und deren erste das Quadrat der letzten ist. Vollführt man diese Operation für alle Teiler von* τ, *so hat man dadurch alle quadratischen Reste* σ *in Perioden der geschilderten Art geteilt.* —

Eine primitive Wurzel ξ der Kongruenz (16) kann leicht mit Hilfe der primitiven Wurzeln für Primzahlen, für welche Tabellen vorhanden sind, ermittelt werden. Ist nämlich λ eine primitive Wurzel für p, und ist

$$p = 4n + 1, \quad n = q\tau, \tag{20}$$

so ist

$$\xi = -\lambda^{2q}. \tag{21}$$

Denn $\xi^\tau \equiv -\lambda^{2q\tau} \equiv -\lambda^{2n}$; da nun λ primitive Wurzel für p ist, so kann nur $\lambda^{2n} \equiv -1 \pmod{p}$ sein, also ist $\xi^\tau \equiv 1 \pmod{p}$. Wäre aber schon $\xi^\alpha \equiv 1 \pmod{p}$, wo α ein Teiler von τ, also auch ungerade sein müßte, so wäre wegen (21) $\lambda^{2\alpha q} \equiv -1 \pmod{p}$, also $\lambda^{4\alpha q} \equiv 1 \pmod{p}$, wo $\alpha q < n$, also λ gegen die Voraussetzung keine primitive Wurzel für p wäre.

6. Sind nunmehr die σ oder $\varrho^{(t)}$ in der beschriebenen Art ermittelt, so können wir umgekehrt sämtliche quadratischen Reste und Nichtreste für p finden. Zuerst folgen sehr leicht die $\nu^{(t)}$ mittels (11) aus den $\varrho^{(t)}$. Die $\varrho^{(t)}$ und die $\nu^{(t)}$ bilden zusammen die $\varrho^{(t-1)}$. Um die $\nu^{(t-1)}$ zu finden, suche man unter den $\nu^{(t)}$ ein Quadrat oder eine Zahl, die, um ein Vielfaches von p vermehrt, ein Quadrat ist. Eine solche Zahl zu finden, ist immer möglich. Die nach Belieben positiv oder negativ genommene Quadratwurzel aus dieser Zahl ist ein $\nu^{(t-1)}$, wir nennen es $\nu_0^{(t-1)}$; multipliziert man dieses mit allen $\varrho^{(t-1)}$, so erhält man sämtliche $\nu^{(t-1)}$. Die $\varrho^{(t-1)}$ und die $\nu^{(t-1)}$ bilden zusammen die $\varrho^{(t-2)}$, und die $\nu^{(t-2)}$ findet man aus den $\nu^{(t-1)}$ und den $\varrho^{(t-2)}$ in gleicher

Art wie die $\nu^{(t-1)}$ aus den $\nu^{(t)}$ und den $\varrho^{(t-1)}$, und so kann man bis zu den ϱ und ν, und schließlich bis zu den a und b gelangen, wobei man die letzteren mittels der ν und der a oder einfacher, indem man die von a nicht okkupierten Plätze der Zahlenreihe $1, 2, \ldots 4n$ für die b in Anspruch nimmt, finden kann.

Beispiel $p = 73$, $n = 18$, $n_1 = \tau = 9$, $q = 2$.

Für $d_1 = 9$, $d_2 = 3$, $d_3 = 1$ sind die Zahlengruppen $\frac{\tau}{d_k}\Phi(d_k)(k = 1, 2, 3)$ folgende: 1, 2, 4, 8, 7, 5; 3, 6; 9. Die kleinste primitive Wurzel für 73 ist 5, also nach (21)

$$\xi \equiv -5^4 \equiv 32 \pmod{73}$$

oder auch

$$\xi \equiv 32^2 \equiv 2 \pmod{73},$$

da der Exponent 2 prim gegen $\tau = 9$ ist. Mit $\xi = 2$ erhalten wir die Perioden für σ oder ϱ':

$\varrho' = 2, 4, 16, 37, 55, 32; 8, 64; 1$, also der Größe nach:

$\varrho' = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 55, 57, 64$; daraus $\nu' = p - \varrho$:

$\nu' = 9, 18, 36, 41, 57, 65, 69, 71, 72.$

$$\sum\varrho' = 219 \equiv 0, \sum\nu' = 438 \equiv 0 \pmod{73}.$$

Quadrate unter den ν' sind 9 und 36, also können wir für ν_0 eine der Zahlen ± 3 oder ± 6 nehmen. Z. B. wird für $\nu_0 = 3$: $\nu = 3, 6, 12$ etc. $27, 54, 108 \equiv 35$ etc., also der Größe nach geordnet:

$\varrho = 1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 64, 65, 69, 71, 72;$

$\nu = 3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70.$

Die ϱ und die ν bilden zusammen die quadratischen Reste, die zwischen 1 und 72 fehlenden Zahlen sind die quadratischen Nichtreste.

7. *Weitere Beispiele.* — 1) Für p von der Form $8z + 5 : p = 29, 37, 53, 61$; 2) für p von der Form $8z + 1 : p = 17, 41$.

$p = 29.$ $a = 1, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 28.$

$\varrho = 1, 7, 16, 20, 23, 24, 25;$ $\nu = 4, 5, 6, 9, 13, 22, 28.$

Perioden der $\varrho = 1; 7, 20, 23; 16, 24, 25.$

$p = 37.$ $a = 1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 21, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 36.$

$\varrho = 1, 7, 9, 10, 12, 16, 26, 33, 34;$ $\nu = 3, 4, 11, 21, 25, 27, 28, 30, 36.$

Perioden der $\varrho = 1; 7, 12, 33, 16, 34, 9; 10, 26.$

$p = 53.$ $a = 1, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 24, 25, 28, 29, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 46, 47, 49, 52.$

$\varrho = 1, 10, 13, 15, 16, 24, 28, 36, 42, 44, 46, 47, 49;$

$\nu = 4, 6, 7, 9, 11, 17, 25, 29, 37, 38, 40, 43, 52.$

Perioden der $\varrho = 1$; 10, 47, 36, 24, 46, 7, 49, 16, 44, 28, 42, 15, 13.

$p = 61$. $a = 1$, 3, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 22, 25, 27, 34, 36, 39, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 56, 57, 58, 60.

$\varrho = 1$, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58;

$\nu = 3$, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60;

Perioden der $\varrho = 1$; 13, 47; 9, 20, 34, 58; 12, 22, 57, 16; 15, 42, 56, 25.

$p = 17$. $a = 1$, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16;

$\varrho = 1$, 4, 13, 16; $\nu = 2$, 8, 9, 15; $\varrho' = 1$, 16; $\nu' = 4$, 13; $\varrho'' = 1$; $\nu'' = 16$.

$p = 41$. $a = 1$, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 31, 32, 33, 36, 37, 39, 40.

$\varrho = 1$, 4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40.

$\nu = 2$, 5, 8, 9, 20, 21, 32, 33, 36, 39.

$\varrho' = 1$, 10, 16, 18, 37; $\nu' = 4$, 23, 25, 31, 40.

Perioden der $\varrho' = 1$; 10, 18, 37, 16.

Königsberg, d. 9. Januar 1904.

Über die Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung.

Von Otto Staude in Rostock.

Die analytische Bestimmung der Erzeugenden einer durch ihre Gleichung gegebenen Fläche 2. Ordnung wird gewöhnlich an eine *Normalform* dieser Gleichung angeknüpft.[1]) Dabei erledigt sich das Problem zwar einfacher, aber sein Charakter tritt weniger deutlich hervor, als bei Zugrundelegung der *allgemeinen* Gleichung der Fläche 2. Ordnung.

Der Kernpunkt des Problems ist nämlich die Bestimmung der Wurzeln und Elementarteiler einer *Determinante* 6. *Grades*. Die Determinanten dieser Art sind ganz allgemein von Voss[2]) untersucht worden. Aber seine Bezeichnungsweise paßt sich nicht unmittelbar an die übliche Benennung der Plückerschen Linienkoordinaten an. Bei der Wichtigkeit des Problems dürfte es daher angemessen sein, demselben eine unabhängige Darstellung zu widmen, welche, ohne allgemeine Sätze vorauszusetzen, doch die analytischen Grundlagen des

1) Wie bei Lindemann, Vorlesungen über Geometrie (Raum) S. 144.

2) Voss, Math. Ann. **10** (1876) S. 143; **13** (1878) S. 320.

Problems in allgemeiner Fassung hervortreten läßt. Dies ist in No. **1—10** der vorliegenden Abhandlung geschehen, indem die Gleichungen von zweimal 6 linearen Komplexen (Formeln (24) und (25)) hergeleitet sind, von denen je drei eine Schar von Erzeugenden der allgemein gegebenen Fläche (1) und (2) bestimmen.

Im Anschluß hieran ist in No. **11—18** die bisher noch nicht behandelte Frage nach den analytischen Kriterien für die Unabhängigkeit irgend dreier von den genannten Komplexen erledigt. Den Mittelpunkt dieser Betrachtung bilden gewisse Identitäten (No. **17**), welche die Erzeugung der Fläche 2. Ordnung und 2. Klasse durch drei lineare Komplexe unmittelbar zum Ausdruck bringen.

1. *Bezeichnungen.* — Die *Gleichungen einer Fläche* 2. Ordnung und 2. Klasse in Punkt- und Ebenenkoordinaten seien:

$$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl} x_k x_l = 0 \qquad (a_{kl} = a_{lk}) \tag{1}$$

und

$$F = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl} u_k u_l = 0, \tag{2}$$

wo die Koeffizienten A_{kl} die Unterdeterminanten der *nicht verschwindenden Determinante*:

$$A = |a_{kl}| \tag{3}$$

bedeuten.

Die *Unterdeterminanten 2. Grades* von A:

$$\alpha_{kl,mn} = \begin{vmatrix} a_{km} & a_{kn} \\ a_{lm} & a_{ln} \end{vmatrix} \tag{4}$$

sind durch eine Zeilenkombination kl und eine Kolonnenkombination mn bestimmt. Wir bezeichnen[1]) die Kombinationen:

$$kl = 23,\ 31,\ 12,\ 14,\ 24,\ 34 \tag{5}$$

bei fester Reihenfolge der beiden Elemente k und l bezüglich mit:

$$h = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \tag{6}$$

und setzen demzufolge:

$$\alpha_{kl,mn} = \alpha_{hi}, \tag{7}$$

wenn kl die $h$te und mn die $i$te Kombination der Reihe (5) ist, z. B.

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

1) Nach **Baltzer**, Determinanten. 4. Aufl. S. 9.

Wegen $a_{kl} = a_{lk}$ ist auch

(8) $$\alpha_{kl} = \alpha_{lk}.$$

Mit $\bar{k}$ bezeichnen wir die zu k „*komplementäre*" Kombination der Reihe (5), die mit k zusammen alle 4 Zahlen 1 2 3 4 enthält, z. B. $\bar{k} = 24$ zu $k = 31$.

Zwischen den Unterdeterminanten α_{kl} bestehen die Beziehungen[1]):

(9) $$\sum_1^6{}^k \alpha_{kl}\alpha_{\bar{k}m} = A \text{ für } m = \bar{l}; \quad = 0 \text{ für } m \neq \bar{l}.$$

Die 6 Strahlenkoordinaten der Verbindungslinie zweier Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ bezeichnen wir mit Benutzung der Nummern (6) für die Kombinationen (5) mit:

(10) $$p_k = p_{kl} = x_k^{(1)} x_l^{(2)} - x_l^{(1)} x_k^{(2)},$$

z. B. $$p_2 = x_3^{(1)} x_1^{(2)} - x_1^{(1)} x_3^{(2)}.$$

Diese Koordinaten erfüllen die Bedingung:

(11) $$P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = \tfrac{1}{2}\sum_1^6{}^k p_k p_{\bar{k}} = 0.$$

2. *Bedingungen der Erzeugenden der Fläche.* — Zwischen zwei *reziproken Polaren* p und p' der Fläche (1) bestehen die 6 Gleichungen[2]):

(12) $$\varrho p'_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_l, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Eine *Erzeugende* p der Fläche ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß sie mit ihrer reziproken Polaren p' zusammenfällt. Ihre Koordinaten müssen also die 6 Gleichungen erfüllen:

(13) $$\varrho p_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^l \alpha_{kl} p_l,$$

zu denen noch die Forderung (11) tritt.

3. *Die Determinante des Problems.* — Damit die 6 linearen homogenen Gleichungen (13) zwischen den 6 Größen p_l bestehen können, muß zuerst der Faktor ϱ eine Wurzel der *Gleichung 6. Grades* sein

1) Ebenda, S. 30.

2) Lindemann, Vorles. über Geometrie (Raum), S. 142.

$$(14)\quad \Theta(\varrho) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}-\varrho & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25}-\varrho & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36}-\varrho \\ \alpha_{41}-\varrho & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52}-\varrho & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63}-\varrho & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} = 0,$$

deren Eigenschaften wir zuerst ermitteln.

4. *Die Reziprozität der Gleichung $\Theta(\varrho) = 0$.* — Die Determinante

$$(15)\qquad \Theta(0) = \mathsf{A} = |\alpha_{kl}|$$

hat[1]) den Wert:

$$(16)\qquad \mathsf{A} = A^3.$$

Man erhält nun, indem man A in der Form:

$$(17)\qquad \mathsf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} \\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

anwendet, nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten und unter Benutzung der Gleichungen (9):

$$\mathsf{A}\cdot\Theta(\varrho) = \begin{vmatrix} A-\alpha_{41}\varrho & -\alpha_{51}\varrho & -\alpha_{61}\varrho & -\alpha_{11}\varrho & -\alpha_{21}\varrho & -\alpha_{31}\varrho \\ -\alpha_{42}\varrho & A-\alpha_{52}\varrho & -\alpha_{62}\varrho & -\alpha_{12}\varrho & -\alpha_{22}\varrho & -\alpha_{32}\varrho \\ -\alpha_{43}\varrho & -\alpha_{53}\varrho & A-\alpha_{63}\varrho & -\alpha_{13}\varrho & -\alpha_{23}\varrho & -\alpha_{33}\varrho \\ -\alpha_{44}\varrho & -\alpha_{54}\varrho & -\alpha_{64}\varrho & A-\alpha_{14}\varrho & -\alpha_{24}\varrho & -\alpha_{34}\varrho \\ -\alpha_{45}\varrho & -\alpha_{55}\varrho & -\alpha_{65}\varrho & -\alpha_{15}\varrho & A-\alpha_{25}\varrho & -\alpha_{35}\varrho \\ -\alpha_{46}\varrho & -\alpha_{56}\varrho & -\alpha_{66}\varrho & -\alpha_{16}\varrho & -\alpha_{26}\varrho & A-\alpha_{36}\varrho \end{vmatrix},$$

oder wenn man rechts den Faktor $(-\varrho)^6$ heraushebt, die drei letzten Kolonnen mit den drei ersten und α_{kl} mit α_{lk} vertauscht:

$$(18)\qquad A^3\cdot\Theta(\varrho) = -\varrho^6\cdot\Theta\left(\frac{A}{\varrho}\right).^{2})$$

1) Nach **Baltzer**, Determinanten, S. 63.

2) Vgl. **Voss**, Math. Ann. **13** (1878) S. 322; vgl. auch **Baltzer**, Det. S. 184; Enzyklopädie I B 2, S. 332.

Setzt man in diese Gleichung für $\Theta(\varrho)$ eine ganze Funktion 6. Grades mit unbestimmten Koeffizienten ein und vergleicht beiderseits die Koeffizienten gleicher Potenzen von ϱ, so ergibt sich, daß der Koeffizient von ϱ^3 verschwinden muß, im übrigen aber $\Theta(\varrho)$ die Form hat:

$$\Theta(\varrho) = A^3 - A^2 b\varrho - Ac\varrho^2 + c\varrho^4 + b\varrho^5 - \varrho^6, \tag{19}$$

wo für $\Theta(0)$ der Wert (15), (16) gesetzt ist, b und c aber noch zu bestimmen bleiben.

5. *Bestimmung des Koeffizienten b.* — Den Koeffizienten: $-A^2 b$ von ϱ erhält man nach (14) auch in der Form:

$$-A^2 b = \Theta'(0) = -2\left(\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{14}} + \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{25}} + \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{36}}\right) = -2A^2(\alpha_{14} + \alpha_{25} + \alpha_{36}).\text{[1]}$$

Der Faktor von $-2A^2$ aber, die Summe der drei Unterdeterminanten α_{14}, α_{25}, α_{36} ist Null[2]), so daß: $b = 0$, und damit nach (19):

$$\Theta(\varrho) = A^3 - Ac\varrho^2 + c\varrho^4 - \varrho^6. \tag{20}$$

6. *Das Produkt* $\Theta(\varrho)\cdot\Theta(-\varrho)$. — Multipliziert man die Determinante $\Theta(\varrho)$ aus (14) mit der Determinante $\Theta(-\varrho)$, für die man aber die in (17) für A getroffene Anordnung der Zeilen und Kolonnen wählt, so folgt nach (9):

$$\Theta(\varrho)\cdot\Theta(-\varrho) = \begin{vmatrix} A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

oder[3]):

$$\Theta(\varrho)\cdot\Theta(-\varrho) = (A-\varrho^2)^6. \tag{21}$$

7. $\Theta(\varrho)$ *als vollständiger Kubus.* — Nach (20) ist nun $\Theta(-\varrho) = \Theta(\varrho)$ und daher nach (21):

$$\Theta^2(\varrho) = (A-\varrho^2)^6,$$

und, da nach (20) ϱ^6 den Koeffizienten -1 hat[4]):

$$\Theta(\varrho) = (A-\varrho^2)^3. \tag{22}$$

---

1) Nach den Frankeschen Sätzen, nach denen allgemein $\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \alpha_{kl}} = A^2\cdot\alpha_{kl}$, vgl. Franke, J. f. Math. **61** (1863) S. 355; Baltzer, Det. S. 63.

2) Wie direkt aus der Definition (4) folgt.

3) Vgl. Voss, Math. Ann. **13** S. 325.

4) Zum Vergleich sei bemerkt, daß die Determinante $\Theta(\varrho)$ schon in dem *allgemeinen* Falle, wo die Elemente der α_{kl} (vgl. (4)) nicht der Bedingung

Die Gleichung 6. Grades (14) hat also zwei dreifache Wurzeln:

$$\varrho = +\sqrt{A} \quad \text{und} \quad \varrho = -\sqrt{A}. \tag{23}$$

8. *Die Elementarteiler von $\Theta(\varrho)$.* — Nach dem Multiplikationsverfahren von No. 6 ist, wenn wir für die Bildung der Ableitungen von $\Theta(\varrho)$ vorübergehend α_{kl} und α_{lk} als verschieden behandeln:

$$\frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12}} \cdot \Theta(-\varrho) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25}-\varrho & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36}-\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41}+\varrho & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} & \alpha_{52}+\varrho & \alpha_{53} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63}+\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{45} & \alpha_{55} & \alpha_{65} & \alpha_{15} & \alpha_{25}+\varrho & \alpha_{35} \\ 0 & A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A-\varrho^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \alpha_{45}(A-\varrho^2)^5$$

oder da nach (22):

$$\Theta(-\varrho) = \Theta(\varrho) = (A-\varrho^2)^3$$

ist:

$$\frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12}} = (A-\varrho^2)^2 \cdot \alpha_{45}; \quad \text{ebenso:} \quad \frac{\partial \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{14}} = (A-\varrho^2)^2 \cdot (\alpha_{41}+\varrho), \text{ usw.}$$

Auf entsprechende Weise erhält man:

$$\frac{\partial^2 \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{12} \cdot \partial \alpha_{31}} = (A-\varrho^2) \begin{vmatrix} \alpha_{45} & \alpha_{65} \\ \alpha_{44} & \alpha_{64} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \Theta(\varrho)}{\partial \alpha_{14}\, \partial \alpha_{65}} = (A-\varrho^2) \begin{vmatrix} \alpha_{41}+\varrho & \alpha_{42} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \text{ usw.}$$

Jede der beiden dreifachen Wurzeln (23) der Determinante $\Theta(\varrho)$ ist also zweifache Wurzel aller Unterdeterminanten 5. Grades und einfache Wurzel aller Unterdeterminanten 4. Grades.[1])

9. *Folgerungen für die Gleichungen (13).* — Die Gleichungen (13) können nach Nr. 3 und Nr. 7 nur bestehen, wenn der Faktor ϱ einen

---

$a_{kl} = a_{lk}$ genügen, *einmal* den Faktor $A-\varrho^2$ hat. In dem *Spezialfall* $a_{kk} = 0$, $a_{kl} = -a_{lk}$ ist $A = (a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34})^2$ und wird:

$$\Theta(\varrho) = (A-\varrho^2)(\sqrt{A}+\varrho)^4 = (\sqrt{A}-\varrho)(\sqrt{A}+\varrho)^5, \tag{22'}$$

falls $\sqrt{A} = a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34}$ genommen ist.

1) Vgl. Voss, Math. Ann. 10, S. 147. — Für die Determinante (22′) in Nr. 7, Anmerkung, ist die fünffache Wurzel von $\Theta(\varrho)$ vierfache Wurzel aller Unterdeterminanten 5. Grades usw. bis zuletzt einfache Wurzel aller Unterdeterminanten 2. Grades.

der Werte (23) hat. Nach Nr. 2 sind also die Erzeugenden der Fläche durch das eine oder andere der beiden Gleichungensysteme:

$$(24)\qquad \sqrt{A}\cdot p_k = \sum_1^6 {}^l \alpha_{kl} p_l, \qquad (25)\qquad -\sqrt{A}\cdot p_k = \sum_1^6 {}^l \alpha_{kl} p_l$$

dargestellt, zu denen noch die Bedingung (11) tritt.

Nach Nr. 8 sind aber in jedem solchen System drei Gleichungen eine Folge der drei andern, so daß jedes die Gleichungen von *drei linearen Komplexen* vertritt. Die gemeinsamen Geraden von drei linearen Komplexen bilden aber eine Regelschar. In diesem Sinne *stellen also die Gleichungensysteme (24) und (25) die beiden Regelscharen von Erzeugenden der Fläche (1) dar.*

10. *Beziehung der beiden Regelscharen untereinander.* — Ist p irgend eine Gerade der einen und p' irgend eine der anderen Schar, so ist nach (24) und der mit einer nur formellen Änderung geschriebenen Formel (25):

$$\sqrt{A}\cdot p_k = \sum_1^6 {}^l \alpha_{kl} p_l, \qquad -\sqrt{A}\cdot p'_k = \sum_1^6 {}^m \alpha_{km} p'_m .$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen und Summation über k folgt:

$$-A\cdot \sum_1^6 {}^k p_k p'_k = \sum_1^6 {}^l \sum_1^6 {}^m \left(\sum_1^6 {}^k \alpha_{kl}\alpha_{km}\right) p_l p'_m ,$$

oder nach (9):

$$-A\cdot \sum_1^6 {}^k p_k p'_k = A\cdot \sum_1^6 {}^l p_l p'_l ,$$

oder da beide Summen dieselben sind:

$$2A\cdot \sum_1^6 {}^k p_k p'_k = 0 .$$

Dies bedeutet aber, da $A \neq 0$, den Satz:

Jede Gerade der einen Schar (24) oder (25) schneidet jede Gerade der andern.

11. *Bemerkung über die Bedingung der vereinigten Lage von Punkt und Geraden.* — Die Bedingungen für die vereinigte Lage eines Punktes x und einer Geraden p lauten:

$$(26)\qquad \begin{cases} P_1 = p_6 x_2 - p_5 x_3 + p_1 x_4 = 0 \\ P_2 = p_4 x_3 - p_6 x_1 + p_2 x_4 = 0 \\ P_3 = p_5 x_1 - p_4 x_2 + p_3 x_4 = 0 \\ P_4 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0 , \end{cases}$$

wo P_1, P_2, P_3, P_4 nur als Abkürzungen für die linken Seiten der Gleichungen gebraucht werden.

Betrachtet man hier *die p als gegebene*, der Bedingung (11) genügende Größen, so ist[1]) die Determinante der in den x linearen Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} 0 & p_6 & -p_5 & p_1 \\ -p_6 & 0 & p_4 & p_2 \\ p_5 & -p_4 & 0 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} = -P^2 = 0,$$

und verschwinden auch alle Unterdeterminanten 3. Grades als Unterdeterminanten 3. Grades einer verschwindenden schiefen Determinante 4. Grades.[2]) Den Gleichungen (26) genügen daher ∞^1 Punkte x, die schon durch zwei Gleichungen bestimmt sind. Z. B. geben für $p_6 \neq 0$ die beiden ersten Gleichungen x_1 und x_2 linear und homogen durch x_3 und x_4 dargestellt.

Betrachtet man dagegen *die x als gegeben*, so genügen den Gleichungen (26) ∞^2 Gerade, die schon durch drei Gleichungen bestimmt sind. Z. B. geben für $x_4 \neq 0$ die drei ersten Gleichungen p_1, p_2, p_3 linear und homogen durch p_4, p_5, p_6 dargestellt. Diese Werte p_1, p_2, p_3 genügen aber von selbst für alle Werte von p_4, p_5, p_6 nicht nur der 4. Gleichung (26), da identisch:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 = 0,$$

sondern auch der Gleichung (11), da identisch:

$$P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 = x_4P.$$

Als lineare Gleichungen in den 6 Größen p zählen also die 4 Gleichungen (26) für 3 unabhängige und ziehen als solche die Gleichung (11) nach sich.

12. *Gerade und Punkte der Regelfläche dreier linearen Komplexe.* — Die Gleichungen dreier linearen Komplexe seien:

$$(27) \qquad \sum_1^6 c_{ki}p_i = 0, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Die gemeinsamen Geraden der drei Komplexe bilden eine Regelschar. *Ein Punkt x, der mit einer Geraden der Regelschar vereinigt liegt*, genügt den Gleichungen (26), während gleichzeitig zwischen den 6 Größen p die Gleichungen (27) und (11) bestehen. Nach Nr. 11 ist

1) Lindemann, a. a. O. S. 101. 2) Baltzer, Determin. S. 17.

aber, wenn es sich um Berechnung, bezüglich Elimination der p handelt, eine der Gleichungen (26) — für $x_4 \neq 0$ die letzte — und die Gleichung (11) überflüssig. Es bleiben also nur 6 in den p lineare Gleichungen:

$$(28)\quad \begin{cases} c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + c_{13}p_3 + c_{14}p_4 + c_{15}p_5 + c_{16}p_6 = 0 \\ c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + c_{23}p_3 + c_{24}p_4 + c_{25}p_5 + c_{26}p_6 = 0 \\ c_{31}p_1 + c_{32}p_2 + c_{33}p_3 + c_{34}p_4 + c_{35}p_5 + c_{36}p_6 = 0 \\ x_4p_1 \qquad\qquad - x_3p_5 + x_2p_6 = 0 \\ \qquad x_4p_2 \qquad + x_3p_4 \qquad - x_1p_6 = 0 \\ \qquad\qquad x_4p_3 - x_2p_4 + x_1p_5 \qquad = 0. \end{cases}$$

Die Elimination der p aus diesen gibt in:

$$(29)\quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 & 0 & x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

die Bedingung für den Punkt x. Es ist *die Gleichung der Regelfläche der 3 Komplexe (27) in Punktkoordinaten. Die Gleichungen (28) selbst bestimmen die Koordinaten p derjenigen Geraden der Regelschar (27), die durch einen gegebenen Punkt x der Fläche (29) geht.*

13. *Die Gleichung der Regelfläche der 3 Komplexe in Punktkoordinaten.* — Entwickelt man die Determinante (29) nach den Unterdeterminanten der 3 ersten und 3 letzten Zeilen und setzt zur Abkürzung:

$$(30)\quad \begin{vmatrix} c_{1k} & c_{1l} & c_{1m} \\ c_{2k} & c_{2l} & c_{2m} \\ c_{3k} & c_{3l} & c_{3m} \end{vmatrix} = (klm) = -(lkm),$$

so lautet die Gleichung (29):

$$(31)\quad x_4 \cdot g = 0,$$

wo

$$(32)\quad \begin{aligned} g = {} & (234)x_1^2 + (315)x_2^2 + (126)x_3^2 + (456)x_4^2 \\ & + [(125) + (316)]x_2x_3 + [(245) - (364)]x_1x_4 \\ & + [(236) + (124)]x_3x_1 + [(356) - (145)]x_2x_4 \\ & + [(314) + (235)]x_1x_2 + [(164) - (256)]x_3x_4. \end{aligned}$$

Hätten wir bei vorstehendem Verfahren, statt die 4. Gleichung (26) zulassen (Nr. **12**), die 1., 2. oder 3. weggelassen, so hätten wir t (31) erhalten:

$$) \qquad x_1 \cdot g = 0 \qquad x_2 \cdot g = 0 \qquad x_3 \cdot g = 0.$$

aber x_1, x_2, x_3, x_4 nicht alle 0 sind, folgt aus (31) und (33):

$$) \qquad g = 0.$$

s ist also die Gleichung der Regelfläche 2. Ordnung der 3 Kom-e (27) in Punktkoordinaten; vgl. (32).[1])

14. *Die Gleichung der Regelfläche der 3 Komplexe in Ebenen-rdinaten.* — Die zu Nr. **11**—**13** duale Betrachtung ergibt als Be-gung dafür, daß eine Ebene u mit einer gemeinsamen Geraden der Komplexe (27) vereinigt liegt:

$$) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ 0 & -u_3 & u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 & u_4 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} = 0$$

nach den Unterdeterminanten 3. Grades der 3 ersten Zeilen ent-lt:

$$u_4 G = 0$$

ne den Faktor u_4:

$$\begin{aligned} G = (561)u_1^2 + (642)u_2^2 + (453)u_3^2 + (123)u_4^2 \\ + [(452) + (643)]u_2 u_3 + [(512) - (631)]u_1 u_4 \\ + [(563) + (451)]u_3 u_1 + [(623) - (412)]u_2 u_4 \\ + [(641) + (562)]u_1 u_2 + [(431) - (523)]u_3 u_4 = 0. \end{aligned}$$

[1]) Ableitung der Gleichung (34), (32) aus (27) ist zuerst von Plücker, . 466; 505 (1865) und Neue Geometrie (1868) S. 112 ff. gegeben, ferner edenen Wegen von Gordan, Zeitschr. f. Math. 13 (1868) S. 59; th. Ann. 4 (1871) S. 558; Pasch, J. f. Math. 75 (1873) S. 131 ff.; vgl. dler, Raum 1, 4. Aufl., S. 142. Doehlemann, Arch. Math. Phys. S. 166. Das Auftreten der *überflüssigen* Faktoren x_1, x_2, x_3, x_4 in

Die Koeffizienten in (32) und (37) unterscheiden sich nur *du Vertauschung der Indices 1, 2, 3 bezüglich mit 4, 5, 6.*

15. *Die Frage der Auswahl dreier unabhängiger unter den G chungen (24) und (25).* — Aus 3 von den 6 linearen Komplexen (oder (25) müssen sich nach dem Verfahren von Nr. **12—14** *wie rückwärts die Gleichungen (1) und (2) ergeben*, wie aus (27) Gleichungen (34), (32) und (37). Wären nun die Koeffizienten die letztgenannten, falls wir für die 3 Komplexe (27) irgend 3 aus (oder (25) ausgewählte Komplexe annehmen, direkt wieder die Koe zienten a_{kl} und A_{kl} von (1) und (2), so würden *irgend drei* Kompl aus (24) oder (25) eine Regelschar der Fläche (1), (2) bestimmen. I ist aber nicht der Fall.

Die Auswahl von dreien unter den 6 Komplexen (24) oder (kann nämlich auf 20 Weisen geschehen. Dabei wird sich zeig daß *jede dieser 20 Auswahlen durch einen gemeinsamen Faktor der Koeffizienten der Gleichung (34), (32) oder (37) charakterisiert ist*, des Verschwinden im einzelnen Falle gerade die betreffende Auswahl *unbrauchbar* kennzeichnet. Um daher die Frage nach der Ausw *dreier unabhängiger* unter den 6 Gleichungen (24) oder (25) zu e scheiden, müssen diese 20 Faktoren ermittelt werden.

16. *Die Unterdeterminanten 3. Grades der Determinante* A. — I in (32) und (37) mit (klm) bezeichneten Koeffizienten sind im v liegenden Falle Unterdeterminanten der Determinante $\Theta(\varrho)$ in (14), bildet mit dem Werte $\varrho = \pm\sqrt{A}$. Diese kommen aber im wese lichen auf die Unterdeterminanten 3. Grades der Determinante A in (zurück. Diese sind durch eine Zeilen- und eine Kolonnenkombinat 3. Grades der 6 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 individualisiert. Beide Ko binationen sind vertauschbar. Wir geben, ohne auf die einfache leitung[1]) einzugehen, die Werte eines Teiles dieser Unterdetermina 3. Grades, soweit er hier in Frage kommt, in den folgenden Tabellen an:

---

(31) und (33) liegt insofern in der Natur der Sache, als schon die Bedingung (26) für die vereinigte Lage von Punkt und Geraden „überzählig“ sind, und s ohne eine solche Voraussetzung, wie $x_4 \neq 0$, nicht entscheiden läßt, welche den 4 Gleichungen wegfallen darf.

1) Sie beruht im wesentlichen darauf, daß jede der Determinanten 3. Gra A_{kl} gewisse α_{kl} als ihre Unterdeterminanten 2. Grades hat, und daß daher rü wärts die Determinanten der α_{kl} sich durch A_{kl} und seine Elemente a_{kl} ausdrück vergl. Baltzer, Det. S. 58, sowie die Dissertation von F. Brockmann, Rost 1904. Einige der Formeln (38) gibt Plücker, System (1846), S. 58, VIIIa.

(38)

	561	642	453	123	234	315	126	456
561	A^2_{11}	A^2_{12}	A^2_{13}	A^2_{14}	0	0	0	0
642		A^2_{22}	A^2_{23}	A^2_{24}	0	0	0	0
453			A^2_{33}	A^2_{34}	0	0	0	0
123				A^2_{44}	0	0	0	0
234					$A\,a^2_{11}$	$A\,a^2_{12}$	$A\,a^2_{13}$	$A\,a^2_{14}$
315						$A\,a^2_{22}$	$A\,a^2_{23}$	$A\,a^2_{24}$
126							$A\,a^2_{33}$	$A\,a^2_{34}$
456								$A\,a^2_{44}$

Dies bedeutet also z. B. dem 2. und 20. ausgefüllten Felde der Tabelle entsprechend:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} \\ \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41} \\ \alpha_{25} & \alpha_{26} & \alpha_{21} \end{vmatrix} = A^2_{12}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{13} \\ \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{23} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{63} \end{vmatrix} = 0.$$

(39)

	245, 364	356, 145	164, 256	512, 613	623, 421	431, 532
561	$A_{21}A_{31}$	$A_{31}A_{11}$	$A_{11}A_{21}$	$A_{11}A_{41}$	$A_{21}A_{41}$	$A_{31}A_{41}$
642	$A_{22}A_{32}$	$A_{32}A_{12}$	$A_{12}A_{22}$	$A_{12}A_{42}$	$A_{22}A_{42}$	$A_{32}A_{42}$
453	$A_{23}A_{33}$	$A_{33}A_{13}$	$A_{13}A_{23}$	$A_{13}A_{43}$	$A_{23}A_{43}$	$A_{33}A_{43}$
123	$A_{24}A_{34}$	$A_{34}A_{14}$	$A_{14}A_{24}$	$A_{14}A_{44}$	$A_{24}A_{44}$	$A_{34}A_{44}$

(40)

	512, 631	623, 412	431, 523	245, 346	356, 154	164, 265
234	$A\,a_{21}a_{31}$	$A\,a_{31}a_{11}$	$A\,a_{11}a_{21}$	$A\,a_{11}a_{41}$	$A\,a_{21}a_{41}$	$A\,a_{31}a_{41}$
315	$A\,a_{22}a_{32}$	$A\,a_{32}a_{12}$	$A\,a_{12}a_{22}$	$A\,a_{12}a_{42}$	$A\,a_{22}a_{42}$	$A\,a_{32}a_{42}$
126	$A\,a_{23}a_{33}$	$A\,a_{33}a_{13}$	$A\,a_{13}a_{23}$	$A\,a_{13}a_{43}$	$A\,a_{23}a_{43}$	$A\,a_{33}a_{43}$
456	$A\,a_{24}a_{34}$	$A\,a_{34}a_{14}$	$A\,a_{14}a_{24}$	$A\,a_{14}a_{44}$	$A\,a_{24}a_{44}$	$A\,a_{34}a_{44}$

Hier kann von den 2 über jeder Kolonne stehenden Kombinationen sowohl die eine, wie die andere genommen werden, also z. B. dem ersten Felde der Tabelle (39) entnommen:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{25} & \alpha_{26} & \alpha_{21} \\ \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41} \\ \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{35} & \alpha_{36} & \alpha_{31} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} \\ \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41} \end{vmatrix} = A_{21} A_{31}.$$

17. *Rückkehr von den Gleichungen (24) und (25) zu (1) und (2).* — Unter Benutzung der Tabelle in Nr. **16** ergibt sich nun, wenn wir von den 6 linearen Komplexen (24) etwa die der Zeilenkombination (123) entsprechenden herausgreifen und nach (35) und (29) zu der von ihnen erzeugten Regelfläche übergehen:

$$(41)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} - \sqrt{A} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} - \sqrt{A} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} - \sqrt{A} \\ 0 & -u_3 & u_2 & u_4 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & -u_1 & 0 & u_4 & 0 \\ -u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 & u_4 \end{vmatrix} = u_4 A_{44} F,$$

$$(42)\quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} - \sqrt{A} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} - \sqrt{A} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} - \sqrt{A} \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 & 0 & x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = - x_4 \sqrt{A} A_{44} f,$$

mit beliebigem, aber beiderseits gleichem Vorzeichen von $\sqrt{A}$. Die linke wie die rechte Seite beider Gleichungen sind in den Koeffizienten a_{kl} von f vom 6. Grade.

Die Identitäten (41) und (42) sind für $A_{44} \neq 0$ der unmittelbare Ausdruck dafür, daß jede Tangentialebene u und jeder Punkt x der Fläche $F = 0$ oder $f = 0$ mit einer gemeinsamen Geraden der 3 ersten Komplexe (24) vereinigt liegt.

Wie nun der Zeilenkombination (123) beim Übergang von (24) zu F der Faktor A_{44} in (41) und beim Übergang zu f der Faktor $\sqrt{A} \cdot A_{44}$ in (42) entspricht, so ergeben sich für die 20 Zeilenkombinationen (klm) der Gleichungen (24) beim Übergang zu F folgende Faktoren 3. Grades in den a_{kl}:

$$(43)\quad\begin{cases}(561):A_{11} & (642):A_{22} & (453):A_{33} & (123):A_{44}\\ (234):a_{11}\sqrt{A} & (315):a_{22}\sqrt{A} & (126):a_{33}\sqrt{A} & (456):a_{44}\sqrt{A}\\ (512):A_{14}-a_{23}\sqrt{A} & (623):A_{24}-a_{31}\sqrt{A} & (431)=A_{34}-a_{12}\sqrt{A} & \\ (631):A_{14}+a_{23}\sqrt{A} & (412):A_{24}+a_{31}\sqrt{A} & (523)=A_{34}+a_{1}\sqrt{A} & \\ (245):A_{23}-a_{14}\sqrt{A} & (356):A_{31}-a_{24}\sqrt{A} & (164)=A_{12}-a_{34}\sqrt{A} & \\ (364):A_{23}+a_{14}\sqrt{A} & (145):A_{31}+a_{24}\sqrt{A} & (256)=A_{12}+a_{34}\sqrt{A}; & \end{cases}$$

und beim Übergang zu f die nur um $\sqrt{A}$ von diesen verschiedenen Faktoren:

$$(44)\quad (561):A_{11}\sqrt{A}\ (234):Aa_{11}\ (512):Aa_{23}-A_{14}\sqrt{A}\ \ (245):Aa_{14}-A_{23}\sqrt{A}\ \text{usw.}$$

Die Formeln (41) bis (44) beziehen sich auf die 6 Gleichungen (24). Um sie auf die 6 Gleichungen (25) anzuwenden, hat man überall das Vorzeichen von $\sqrt{A}$ umzukehren, sodaß z. B. gegenüber (43) zu den Kombinationen (512), (631), (245), (364) die Faktoren gehören:

$$(45)\quad\begin{cases}(512):A_{14}+a_{23}\sqrt{A} & (245):A_{23}+a_{14}\sqrt{A}\\ (631):A_{14}-a_{23}\sqrt{A} & (364):A_{23}-a_{14}\sqrt{A}\quad\text{usw.}\end{cases}$$

Die 20 Faktoren (43) können nun für $A \neq 0$ niemals alle verschwinden. Denn aus:

$$A_{14}-a_{23}\sqrt{A}=0 \qquad A_{14}+a_{23}\sqrt{A}=0$$

würde folgen:

$$A_{14}=0, \qquad a_{23}=0.$$

Mit den 20 Faktoren (43) würden daher alle 20 Koeffizienten a_{kl} und A_{kl} in (1) und (2) verschwinden, was ausgeschlossen ist.

Daher *kann man aus (43) stets* einen nicht verschwindenden Faktor und entsprechend *eine Kombination von dreien der 6 Komplexe (24) oder (25) auswählen, welche wirklich die Fläche (1), (2) erzeugen, indem ihnen eine Identität von der Form (41) oder (42) entspricht.*

18. *Abhängigkeit der Auswahl vom Vorzeichen von $\sqrt{A}$.* — Die Abhängigkeit eines Teils der Faktoren (43) von dem Vorzeichen von $\sqrt{A}$ (vgl. (43) mit (45)) bedingt, *daß unter Umständen eine Zeilenkombination, die für eine der beiden Regelscharen (24) und (25) zulässig ist, es für die andere nicht ist.*

Wir erläutern dies an dem Beispiel der Fläche 2. O. und 2. Kl.:

$$f=2a_{23}x_2x_3+2a_{14}x_1x_4=0, \qquad F=2A_{23}u_2u_3+2A_{14}u_1u_4=0.$$

Hier ist:

$$A = a_{23}^2 a_{14}^2 \quad A_{23} = a_{23} a_{14}^2 \quad A_{14} = a_{23}^2 a_{14}$$

$$a_{11} = 0 \quad a_{22} = 0 \quad a_{33} = 0 \quad a_{44} = 0 \quad a_{31} = 0 \quad a_{12} = 0 \quad a_{24} = 0 \quad a_{34} = 0$$

$$A_{11} = 0 \quad A_{22} = 0 \quad A_{33} = 0 \quad A_{44} = 0 \quad A_{31} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{24} = 0 \quad A_{34} = 0$$

Wir verfügen über das Vorzeichen von $\sqrt{A}$, indem wir setzen:

$$\sqrt{A} = a_{23} a_{14}.$$

Dann sind von den 20 Faktoren (43) nur zwei von 0 verschieden, nämlich:

$$(631): A_{14} + a_{23}\sqrt{A} = 2a_{23}^2 a_{14}, \quad (364): A_{23} + a_{14}\sqrt{A} = 2a_{23}a_{14}^2$$

und von den 20 Faktoren (45) ebenso:

$$(512): A_{14} + a_{23}\sqrt{A} = 2a_{23}^2 a_{14}, \quad (245): A_{23} + a_{14}\sqrt{A} = 2a_{23}a_{14}^2.$$

Daher sind von (24) nur die Zeilenkombinationen (136) und (346), von (25) nur (125) und (245) zulässig.

In der Tat verschwinden alle α_{kl} bis auf die vier:

$$\alpha_{11} = -a_{23}^2, \quad \alpha_{44} = -a_{14}^2, \quad \alpha_{25} = a_{23}a_{14}, \quad \alpha_{36} = -a_{23}a_{14}.$$

Die Gleichungen (24) und (25) lauten daher mit Substitution des Wertes von $\sqrt{A}$ und gekürzt:

$$(24')\quad \begin{cases} a_{23}p_1 + a_{14}p_4 = 0 \\ \text{———} \quad \text{——} \\ p_6 = 0 \\ a_{23}p_1 + a_{14}p_4 = 0 \\ \text{————} \\ p_3 = 0 \end{cases} \qquad (25')\quad \begin{cases} a_{23}p_1 - a_{14}p_4 = 0 \\ p_5 = 0 \\ \text{————} \\ a_{23}p_1 - a_{14}p_4 = 0 \\ p_2 = 0 \\ \text{————} \end{cases},$$

wo die Striche die Gleichungen andeuten, deren sämtliche Koeffizienten verschwinden Hier ist nun evident, daß *bei (24') nur die Zeilen (136) und (346), bei (25') nur die Zeilen (125) und (245) je 3 unabhängige Gleichungen bilden,* wie es unsere allgemeine Theorie erfordert.

Rostock, den 31. Oktober 1903.

Neuere Anschauungen der Elektrizitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektrizität.

Von Eduard Riecke in Göttingen.

(Schluß.)

9.[1]) *Ionisierung durch Kathodenstrahlen.* — Wir wenden uns nun zu Untersuchungen, durch welche die Ergebnisse der bisherigen Betrachtung nach einer ganz anderen Seite hin ergänzt werden. Als Quellen der Ionisierung haben wir bisher nur die Flammen und die Röntgenstrahlen kennen gelernt. Es gibt aber noch eine Reihe anderer Vorgänge, durch welche in einem neutralen Gase Ionen erzeugt werden.

Bei der Ionenbildung in Flammen kann die Ursache der Erscheinung in den chemischen Prozessen liegen, die sich in der Flamme abspielen; die Ionisierung kann auch eine einfache Folge der erhöhten Temperatur sein. Für die letztere Auffassung spricht der Umstand, daß die Luft auch durch erhitzte Metalle ionisiert werden kann.

Eine sehr wichtige Beobachtung, welche nach verschiedenen Seiten hin aufklärend gewirkt und eine neue Quelle der Ionisierung aufgedeckt hat, verdanken wir Lenard. Es gelang ihm zunächst die Kathodenstrahlen, die in hochevakuierten Geißlerschen Röhren von der negativen Elektrode ausgesandt werden, in die freie Luft austreten zu lassen. Es beruht dies auf der Fähigkeit jener Strahlen, dünne Metallschichten z. B. Aluminiumblatt zu durchdringen. Man verschließt die Geißlersche Röhre auf der der Kathode gegenüberliegenden Seite mit einer Metallplatte, die in der Mitte eine kleine Öffnung hat; diese wird mit einem Aluminiumblatt überdeckt. Man läßt nun aus diesem Aluminiumfenster Kathodenstrahlen in die Luft austreten. Stellt man vor das Fenster ein geladenes Elektroskop, so wird dieses entladen gleichgültig, welches das Zeichen der ihm mitgeteilten Elektrizität ist. Die Wirkung beruht darauf, daß die Kathodenstrahlen in der Luft Ionen erzeugen. Die Kathodenstrahlen selber bestehen aus negativ elektrischen Teilchen, Elektronen, deren Masse überaus klein, etwa 2000 Mal kleiner als die eines Wasserstoffatomes ist. Durch die abstoßenden Kräfte, die von der negativen Ladung der Kathode ausgehen, werden sie von der letzteren gelöst und erlangen in dem vor der Kathode sich ausbreitenden Felde eine sehr große der Lichtgeschwin-

1) Riecke, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, math. phys. Kl. 1903. Heft II.

digkeit sich nähernde Geschwindigkeit. Durch ihren Stoß zerlegen sie die Moleküle der Luft in positiv und negativ elektrische Bestandteile; diese müssen sich dann wieder mit neutralen Molekülen der Luft verbinden, um die Ionen zu bilden, welche, wie wir gesehen haben, ein größeres Gewicht als die Moleküle der Luft besitzen.

10. *Ionisierung durch ultraviolette Strahlen.* — Die ionisierende Wirkung der Kathodenstrahlen erklärt in überraschender Weise eine andere von Hallwachs entdeckte Tatsache. Wenn man eine negativ geladene Metallplatte mit ultraviolettem Lichte bestrahlt, so verliert sie ihre Ladung sehr schnell. Bei positiver Ladung tritt keine Änderung in den Verhältnissen der Zerstreuung ein. Lenard hat gezeigt, daß die Erscheinung nicht durch eine unmittelbare Wirkung des ultravioletten Lichtes erzeugt wird. Die primäre Wirkung besteht darin, daß die in der Platte absorbierten Lichtstrahlen Kathodenstrahlen aus dem Metalle entwickeln. Diese führen negative Elektrizität mit sich fort und bedingen dadurch die rasche Zerstreuung der Ladung. Dazu trägt aber noch ein zweiter Umstand bei; die Elektronen, die sich von dem Metalle lösen, stoßen auf die Moleküle der Luft und erzeugen positive und negative Ionen. Die positiven werden von der negativ elektrischen Metallplatte angezogen und neutralisieren einen Teil ihrer Ladung. Die negativen Ionen werden abgestoßen und entfernen sich von der Platte, bis sie ihre Ladung an irgend welche in der Umgebung befindliche Konduktoren abgeben.

Aus den Beobachtungen von Lenard folgt noch eine andere wichtige Tatsache. Die ionisierende Wirkung von Kathodenstrahlen, die aus einer negativ geladenen Metallplatte durch Belichtung in einem luftverdünnten Raum entwickelt werden, hört auf, wenn die Spannung der Platte weniger als 11 Volt beträgt. Die Geschwindigkeit, welche die Elektronen unter diesen Umständen erreichen, ist etwa 200 Mal kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Bei noch kleineren Geschwindigkeiten sind also die Elektronen nicht mehr imstande die neutralen Moleküle der Luft in Ionen zu zerlegen.

11. *Ionisierung durch Becquerelstrahlen; Becquerelstrahlen und Kathodenstrahlen.* — Auf die im vorhergehenden betrachtete Eigenschaft der Kathodenstrahlen reduziert sich noch eine Erzeugungsart der Ionen, die für uns von hervorragendem Interesse ist, die Erzeugung der Ionen durch Becquerelstrahlen. Die Entdeckung dieser Strahlen knüpft sich zuerst an eine von Becquerel beobachtete Tatsache: das metallische Uran besitzt die Fähigkeit geladene Konduktoren, die in seine Nähe gebracht werden, ihrer Elektrizität zu berauben. Es zeigte sich, daß diese Eigenschaft nicht dem Uran selber zukommt, sondern gewissen

Metallen, die allerdings in verschwindender Menge in den Uranerzen sich finden. Man hat insbesondere von zwei solchen Metallen Verbindungen in annähernder Reinheit dargestellt, von dem Radium und dem Polonium. Das erste ist in seinen chemischen Reaktionen nahezu identisch mit dem Baryum, der zweite mit dem Wismuth. Außer in den Erzen des Urans finden sich diese Metalle auch in thorhaltigen Mineralien. Körper, welche wie das Radium und das Polonium die Eigenschaft haben geladene Konduktoren zu entladen, nennen wir radioaktiv. Die weitere Untersuchung hat gezeigt, daß die radioaktiven Substanzen Strahlen aussenden, die im wesentlichen identisch sind mit den Kathodenstrahlen. Wie diese erregen sie Fluoreszenz und besitzen photographische Wirkungen; wie diese erzeugen sie Ionen und darauf beruht ihre entladende Wirkung; sie unterscheiden sich aber von den Kathodenstrahlen durch die sehr viel größere Geschwindigkeit, mit der sich die Elektronen in ihnen bewegen. Nach den Messungen von Kaufmann steigt diese von 80 bis auf 95 Prozent der Lichtgeschwindigkeit. Zugleich hat sich aber noch ein anderes höchst überraschendes Resultat ergeben. Bei den Kathodenstrahlen ist die Masse der sie bildenden Elektronen konstant d. h. unabhängig von ihrer Geschwindigkeit; bei den Becquerelstrahlen dagegen wird diese Masse umso größer, je größer ihre Geschwindigkeit ist. Diese Veränderlichkeit der Masse widerspricht einem fundamentalen Prinzipe der Physik. Abraham hat den Widerspruch durch eine mit den Beobachtungen gut übereinstimmende Theorie in folgender Weise gehoben. Die Elektronen besitzen nach ihm überhaupt keine Masse in dem gewöhnlichen mechanischen Sinne. Sie erzeugen aber durch ihre Bewegung elektrische und magnetische Veränderungen in dem sie umgebenden Felde; diese wirken auf die bewegten Elektronen zurück mit einer Kraft, die der Beschleunigung proportional und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. So kommt es, daß die Elektronen sich bewegen, als ob sie mechanische Masse besäßen; aber diese Masse ist abhängig von der Geschwindigkeit und von den elektromagnetischen Eigenschaften des die Elektronen umgebenden Raumes, sie ist nicht mechanischer sondern elektromagnetischer Natur. Körper, welche Becquerelstrahlen aussenden, verlieren hiernach nichts von ihrer ponderabeln Masse. Betrachten wir die negative Elektrizität als einen Bestandteil des Äthers, so stellen sich Kathodenstrahlen und Becquerelstrahlen als reine Vorgänge in diesem dar, als Vorgänge die man dem Fortschreiten eines Wirbels in einer Flüssigkeit vergleichen kann. Es unterliegt keinem Zweifel, daß man damit der Wellentheorie der Kathodenstrahlen, wie sie von Hertz bevorzugt worden war, wieder näher gerückt ist.

12. *Induzierte Radioaktivität.* — Wir sind durch die letzten Betrachtungen über das gesteckte Ziel hinausgeführt worden, kehren aber nun zu der Untersuchung der Becquerelstrahlen zurück, um den früheren Bericht in einigen Punkten zu ergänzen. Zunächst ist zu bemerken, daß die Eigenschaft Becquerelstrahlen auszusenden nicht an einen bestimmten Aggregatzustand gebunden ist. Herr und Frau Curie, denen zuerst die Darstellung von Radiumsalzen in annähernder Reinheit gelungen ist, haben aus Radiumpräparaten aktive Gase entwickelt. Als ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis führen wir an, daß Körper, die sich in der Nähe von Radiumpräparaten befinden, selber vorübergehend radioaktiv werden. Man bezeichnet die so erzeugte Aktivität als eine induzierte. Es handelt sich dabei nicht um eine unmittelbare Wirkung der Strahlen; denn der Erfolg tritt auch ein, wenn die zu aktivierenden Körper gegen direkte Strahlung geschützt sind. Man kann daran denken, daß zunächst in der Luft ein radioaktives Gas entstehe und daß dieses die damit zur Berührung gelangenden Körper aktiv mache.

Eine wichtige auf diese Verhältnisse bezügliche Beobachtung wurde von Rutherford gemacht. Er lud einen in der Nähe eines Thoriumpräparates befindlichen Draht mit negativer Elektrizität. Der Draht wurde dann radioaktiv. Rutherford löste die Oberflächenschicht des Drahtes in Salzsäure; wurde die Lösung eingedampft, so war der trockene Rückstand viel stärker radioaktiv als die Thorerde selber.

Elster und Geitel fanden, daß der Rutherfordsche Versuch auch in Luft gelingt. Wenn man einen Draht in Luft ausspannt, ihn negativ lädt und ein paar Stunden exponiert, so wird er radioaktiv. Man kann die aktive Oberflächenschicht mit einem Lederlappen abwischen; sie wird dann auf eine verhältnismäßig kleine Fläche konzentriert und kann nun auch durch die photographische Wirksamkeit der von ihr ausgesandten Strahlen nachgewiesen werden. Aus dem Versuche folgt, daß die radioaktiven Bestandteile der Luft, welche auf dem negativ elektrischen Drahte sich sammeln, selber positiv elektrisch sind.

Positive Ladung des ausgespannten Drahtes erzeugt nach den Versuchen von Elster und Geitel nur eine sehr schwache Aktivität.

13.[1]) *Ionen in der freien Atmosphäre.* — Die bekannte Erscheinung der Elektrizitätszerstreuung, des allmähligen Verschwindens der einem Konduktor erteilten Ladung, pflegte man früher als eine Wirkung der in der Luft suspendierten Staubteilchen und Nebeltröpfchen zu er-

1) In den Sitzungsberichten der Münchner Akademie geht dieser Nummer ein Kapitel voran, das die Überschrift trägt: Die Wiedervereinigung der Ionen und ihre maximale Dichte. Red.

klären. Nun fanden aber Elster und Geitel, daß die Zerstreuung im Widerspruche zu dieser Vorstellung im allgemeinen um so kleiner ist, je mehr die Luft von Nebel und Staub erfüllt ist. Sie schlossen daraus, daß die Zerstreuung durch Ionen verursacht wird, die in der freien atmosphärischen Luft vorhanden sind. Von einem elektrischen Körper werden die mit ihm ungleichnamigen Ionen angezogen; sie geben ihre Ladung an den Körper ab und neutralisieren mit der Zeit seine Elektrizität. Diese Vorstellung gibt nun Veranlassung zu zwei verschiedenen Reihen von Untersuchungen. Man wird einmal zeigen müssen, wie die Erscheinungen der atmosphärischen Elektrizität aus den Eigenschaften der Ionen sich erklären, wie diese Eigenschaften durch Beobachtungen über atmosphärische Elektrizität bestimmt werden können. Auf der anderen Seite wird man nach den Quellen der Ionisierung zu suchen haben. Denn wenn die Ionen einen beständigen Teil der atmosphärischen Luft bilden, so muß auch eine ununterbrochen wirkende Ursache der Ionisierung vorhanden sein.

Was die erste Aufgabe, die Bestimmung der Eigenschaften der atmosphärischen Ionen, anbelangt, so erscheint als die wichtigste die Ermittelung ihrer Dichte, die Ermittelung der Zahl von positiven und negativen Ionen, die sich in einem ccm Luft befinden. Diese Aufgabe wird gelöst durch den von Ebert konstruierten Aspirationsapparat. Man könnte annehmen, daß damit die ganze Frage erledigt sei, da ja die übrigen Eigenschaften der Ionen: Beweglichkeit, Diffusionskoeffizient, molekulare Geschwindigkeit und Masse ganz unabhängig von luftelektrischen Beobachtungen bestimmt werden können. Allein man darf die Ergebnisse, welche im Laboratorium mit trockener staubfreier Luft erhalten werden, nicht ohne weiteres auf die freie atmosphärische Luft übertragen. Vielmehr scheint es wünschenswert, die Eigenschaften der atmosphärischen Ionen für sich zu untersuchen. Von den Beobachtungen, die man zu diesem Zwecke benützen kann, wird in den folgenden Abschnitten die Rede sein.

In der Frage nach der Ursache der Ionisierung der atmosphärischen Luft bieten sich zwei verschiedene Möglichkeiten dar. Es kann sich um eine spontane Dissoziation neutraler Moleküle in positive und negative Ionen handeln ähnlich wie bei der Dissoziation der Elektrolyte. Die Ionisierung kann aber auch durch äußere Ursachen bedingt sein. Man wird dabei in erster Linie an radioaktive Substanzen denken. Die letztere Annahme wird insbesondere durch die Untersuchungen von Elster und Geitel sowie von Ebert über die radioaktiven Eigenschaften der im Boden enthaltenen Luft gestützt. Möglich ist natürlich auch, daß beide Ursachen zusammenwirken. Die spontane Ionisierung

würde sich dann auf alle Teile der Atmosphäre erstrecken, eine verstärkte Ionisierung überall da auftreten, wo radioaktive Substanzen auf die atmosphärische Luft wirken.

14. *Elektrizitätszerstreuung in der Atmosphäre.* — Die Methode, nach der wir die Elektrizitätszerstreuung in der atmosphärischen Luft messen, ist von Elster und Geitel ausgearbeitet worden. Man benützt dabei ein Aluminiumblattelektroskop, in dessen Innerem nur ein äußerst kleiner Elektrizitätsverlust stattfindet. Auf die metallene Säule, die zu ihren beiden Seiten die Aluminiumblätter trägt, setzt man mit Hilfe eines dünnen Stiftes einen Metallzylinder, den Zerstreuungskörper. Man lädt Körper und Elektroskop mit dem positiven oder dem negativen Pole einer Zambonischen Säule und beobachtet dann die zeitliche Abnahme der Ladung. Dabei läßt man den Zerstreuungskörper entweder frei in der Luft, oder man umgibt ihn mit einem zur Erde abgeleiteten Schutzzylinder, dessen obere Öffnung durch einen Deckel geschlossen wird. Im ersten Falle ist der Zerstreuungskörper elektrischen Störungen in der Umgebung oder in der Atmosphäre ausgesetzt, im zweiten Falle ist er davon frei.

Hat der Zerstreuungskörper zu irgend einer Zeit eine Ladung $\mathfrak{e}$, und nimmt die Ladung in der Minute um einen Betrag $S\mathfrak{e}$ ab, so nennt man das prozentisch berechnete Verhältnis:

$$100\,\frac{S\mathfrak{e}}{\mathfrak{e}}$$

den Zerstreuungskoeffizienten. Als ein wichtiges Resultat der Beobachtungen möge angeführt werden, daß an der Oberfläche der Erde die Zerstreuung negativer Ladungen im ganzen stärker ist als die positiver.

15. *Über die Theorie der Elektrizitätszerstreuung.* — I. Die Theori der Zerstreuung kann nur in sehr wenigen Fällen in einfacher Weis entwickelt werden. Findet die Zerstreuung in freier, ruhend gedacht Atmosphäre statt, so tritt kein stationärer Zustand ein. Zwar kan man die Geschwindigkeiten, welche den Ionen durch eine bestimm Ladung des Zerstreuungskörpers erteilt werden, für jede Stelle d umgebenden Raumes berechnen; aber zu der durch elektrische Kräf erzeugten Verschiebung kommt noch die Diffusionsbewegung hinz die Ionendichte hängt außer von diesen Vorgängen noch von Neubildu und Wiedervereinigung ab. Sie verändert sich nicht nur von Ort zu O sondern auch von Zeit zu Zeit.

II. Einfacher gestalten sich die Verhältnisse, wenn sich der Z streuungskörper im Inneren eines vollkommen geschlossenen Rau befindet. Bei der Entwicklung der Theorie wird man sich auf d

Betrachtung eines Zeitraumes beschränken, innerhalb dessen die Ladung des Zerstreuungskörpers als unverändert betrachtet werden kann. Besitzt die Ladung eine hinreichende Größe, so erhält man eine stationäre Strömung, im einfachsten Falle einen Sättigungsstrom. In diesem Falle ist die Abnahme, welche die Ladung des Zerstreuungskörpers in einer Minute erleidet, gleich der gesamten Ladung der positiven oder der negativen Ionen, welche in jener Zeit in dem Zerstreuungsraum entstehen.

III. Ein zweiter Fall, in dem das Problem der Zerstreuung eine einfache Lösung zuläßt, ist gegeben durch einen Zerstreuungskörper, der sich in einer gleichförmig strömenden, unbegrenzten Luftmasse befindet. Hier lassen sich die Verhältnisse schon bei mäßigen Windgeschwindigkeiten so einrichten, daß der Einfluß von Neubildung und Wiedervereinigung der Ionen vernachlässigt werden kann. Die Zerstreuung ist dann unabhängig von der Windgeschwindigkeit, aber verschieden je nachdem der Zerstreuungskörper positiv oder negativ geladen ist.

IV. Wenn man, wie üblich, die Zerstreuungskoeffizienten bestimmt, während der Zerstreuungskörper von dem Schutzzylinder umgeben ist, so hat man mit komplizierten Verhältnissen zu tun, die eine strenge Theorie des Versuches unmöglich machen.

Man könnte zunächst die Vermutung hegen, daß der Schutzzylinder annähernd wie ein geschlossenes Gefäß wirke, daß man also mit Bewegungen der Ionen zu rechnen habe, die sich dem Zustande des Sättigungsstromes nähern. Die Vermutung wird widerlegt durch die Tatsache, daß die Beobachtungen im allgemeinen eine wesentliche Verschiedenheit der Zerstreuung bei positiver und bei negativer Ladung ergeben, während bei dem gewöhnlichen Sättigungsstrom die Zerstreuung von dem Vorzeichen der Ladung unabhängig ist.

Man kann weiter fragen, ob nicht die Formeln des vorhergehenden Abschnittes mit einigem Rechte auf die mit dem Zerstreuungsapparat von Elster und Geitel erhaltenen Werte angewandt werden dürfen. In der Tat kann man wohl annehmen, daß jene Formeln auch bei unregelmäßiger Bewegung der Luft gültig bleiben, sofern dabei nur immer neue Luftmengen an den Zerstreuungskörper heran geführt werden. Inwieweit aber diese Bedingung bei den einzelnen Beobachtungen mit dem Zerstreuungsapparat erfüllt wird, inwieweit außerdem die Diffusion eine wesentliche Rolle spielt, entzieht sich der Beurteilung. Die Anwendung der angeführten Formeln auf diese Beobachtungen ist daher von etwas zweideutiger Natur.

16. *Das elektrische Feld der Erde.* — Aus den elektrischen Wir-

kungen, die wir an der Oberfläche der Erde beobachten, folgt, daß die Oberfläche der Erde der Regel nach eine negative Ladung besitzt. Die Dichte δ dieser Oberflächenladung ist mit der gegen die Erdoberfläche gerichteten elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ durch die Beziehung $\mathfrak{E} = 4\pi\delta$ verbunden. Um die Kraft $\mathfrak{E}$ zu erhalten, wird man die Potentialdifferenz zwischen einem in der Höhe von z cm über dem Erdboden liegenden Punkte und zwischen dem Erdboden selbst mit Hilfe eines Elektrometers bestimmen. Die Differenz sei gleich V Volt. Für die Höhendifferenz von 1 cm beträgt dann die Zunahme des Potentiales, der Potentialgradient $\frac{V}{z}$ Volt. Die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}$ berechnet sich daraus nach der Formel:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{300} \cdot \frac{V}{z}.$$

Für Wolfenbüttel ergibt sich aus den Beobachtungen von Elster und Geitel im Mittel:

$$\frac{V}{z} = 2{,}21 \text{ Volt},$$

somit $\mathfrak{E} = 0{,}0074$ und $\delta = -0{,}00059$ elektrostatische Einheiten pro qcm.

In der Atmosphäre selbst kommt außer der Wirkung der Oberflächenladung der Erde noch die der atmosphärischen Ionen hinzu. Nun ist die Dichte der positiven Ionen in den der Erdoberfläche benachbarten Schichten der Atmosphäre im allgemeinen größer als die der negativen. Die Kraft $\mathfrak{E}$, mit der die Einheit der positiven Elektrizität nach der Oberfläche der Erde getrieben wird, nimmt also mit der Erhebung über den Erdboden ab. Die Abnahme der Kraft auf der Längeneinheit, ihr Gradient, hängt nach einem bekannten Satze mit der Dichte der räumlichen Ladung der Atmosphäre zusammen. Diese aber ist gleich dem elektrischen Elementarquantum ε, multipliziert mit dem Überschuß der Dichte der positiven Ionen über die der negativen.

Eine Abhandlung von Gauß über Erdmagnetismus und Magnetometer beginnt mit den Worten: „Zwei große Naturkräfte sind auf der Erde allerorten und in jedem Augenblicke gegenwärtig: die Schwere und die erdmagnetische Kraft. Die Wirkungen der Schwerkraft sehen wir auf jedem unserer Schritte uns begegnen. Die Wirkungen der erdmagnetischen Kraft fallen nicht von selbst in die Augen, sondern wollen gesucht sein: Jahrtausende vergingen, ohne daß man nur von der Existenz dieser Kraft wußte. Von der ersten Kraft werden alle Verhältnisse des physischen Lebens durchdrungen, von der andern wenig

oder gar nicht berührt.“ Wir können den von Gauß genannten Kräften eine dritte hinzufügen, die elektrische Kraft der Erde. Auch sie entzieht sich im gewöhnlichen Laufe der Dinge einer oberflächlichen Beobachtung; aber von Zeit zu Zeit sammelt sie sich zu den Entladungen des Gewitters, und sie breitet über weite Kreise der Erde die Strahlen des Nordlichts. Sie hat nicht die Stetigkeit der erdmagnetischen Kraft; vielmehr verschwindet der bleibende Grund der Erscheinungen hinter den unregelmäßigen Schwankungen. Damit hängt es zusammen, daß eine allgemeine Theorie der Luftelektrizität, ein Seitenstück zu Gauß' Theorie des Erdmagnetismus, fehlt. Zudem beziehen sich unsere Beobachtungen vorzugsweise nur auf die Oberfläche der Erde; der Zusammenhang der Erscheinungen kann aber nur dann deutlich werden, wenn wir das Verhalten der Luftelektrizität in dem ganzen die Erde umhüllenden Luftmeere kennen und die hierauf gerichteten Forschungen sind erst in den Anfängen begriffen. Noch eine große Arbeit wird notwendig sein, ehe wir imstande sind die vielen an die Erscheinungen der Luftelektrizität sich knüpfenden Fragen zu beantworten. Diese Arbeit kann aber nicht von einzelnen geleistet werden, sondern nur von einer die Erde umschauenden Organisation, deren Begründung als eine würdige Aufgabe für die internationale Assoziation der Akademien erscheint.

Beiträge zur Geometrographie III.[1])

Von R. Güntsche in Berlin.

Im vorliegenden Teil der „Beiträge“ soll gezeigt werden, wie sich ein einfaches Lösungsprinzip, das sich auf ganz elementare Potenzeigenschaften des Kreises stützt und aus der Theorie des Kugelgebüsches[2]) ohne weiteres entnommen werden kann, zur geometrographischen Behandlung einer Reihe von Aufgaben verwerten läßt. Zugrunde liegt der Betrachtung die konstruktive Lösung der quadratischen Gleichung, welche in der folgenden Aufgabe gefordert wird.

1. Die quadratische Gleichung.

Zu XLI und XLII[3]). *Eine Strecke BC (innen oder außen) so zu teilen, daß das Produkt der Abschnitte dem Produkte zweier gegebenen Strecken a und b gleich ist.* $PQ = a$, $RS = b$.

---

1) Beitr. I s. ds. Zeitschr. (3) **3**, 191—194, 1902; Beitr. II s. (3) **6**, 133—146, 1903.

2) Th. Reye: Synthetische Geometrie der Kugeln usw. Leipzig, 1879.

3) Diese Nummern beziehen sich auf „Scientia“.

führen für die äußere Teilung zu einer zweiten geometrographischen Konstruktion mit dem Einfachheitskoeffizienten 15, welche der in Scientia (S. 50) mitgeteilten an die Seite zu stellen ist.

Die Übertragung der behandelten allgemeinen und besonderen Aufgabe auf das Mascheronische Verfahren ist ohne weiteres ausführbar.

Es soll nun im folgenden dargetan werden, wie die soeben beschriebenen Konstruktionen auf die Kreisteilung angewandt werden können, sodann, wie das in ihnen enthaltene Lösungsprinzip mit geringer Modifikation zu Konstruktionen der vierten Proportionale, der inversen Punkte und der harmonischen Teilung führt und mit der Theorie eines bekannten Inversionsinstrumentes zusammenhängt; hieran knüpft sich die Anwendung auf Aufgaben aus der projektivischen[1]) und analytischen Geometrie. In ähnlicher Weise soll schließlich eine Konstruktion der Potenzlinie zweier Kreise, deren Lösungsprinzip dem erwähnten verwandt ist, auf andere Aufgaben übertragen werden.

2. Zur Kreisteilung.

Die obige konstruktive Lösung der quadratischen Gleichung für den speziellen Fall $a = b$ kann zur stetigen Teilung einer gegebenen Strecke a benutzt werden. Ist x der größere Abschnitt, so ist der Gleichung $a(a - x) = x^2$ oder $x^2 + ax - a^2 = 0$ zu genügen; es ist also die Strecke a außen[2]) so zu teilen, daß das Produkt der Abschnitte dem Quadrat von a gleich ist, oder es sind folgende Gleichungen, in denen $a = 1$ gesetzt ist, konstruktiv zu lösen:

$$x_1 - x_2 = 1, \quad x_1 x_2 = 1^2.$$

Die Konstruktion, zu welcher die ökonomische Behandlung (unter Benutzung der Tarry-Bernèsschen Tangentenkonstruktion[3])) führt, hat den Einfachheitskoeffizienten 14, erfordert also eine Operation mehr als die geometrographische Konstruktion[4]). Auf die Kreisteilung angewandt, führt sie jedoch zu geometrographischen Konstruktionen:

1) Weitere Beispiele dieser Art folgen im nächsten Teil der „Beiträge".

2) Das Gegenstück dazu, den goldenen Schnitt durch innere Teilung, hat Herr H. Bodenstedt in der Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Halle (Sept. 1903) vorgetragen (Bodenstedt, Ein Vortrag über Geometrographie. Zeitschr. f. math. u. natw. Unt. 35, 303, 1904).

3) „Scientia", S. 32, XXXIV, premier cas.

4) Dafür hat sie aber (neben jener von Herrn Bodenstedt a. a. O. mitgeteilten) vor den vier geometrographischen wie vor der klassischen den Vorzug, daß sie eine größere Bewegungsfreiheit gewährt (vgl. R. Güntsche: Zu Herrn R. Mehmkes Bemerkungen usw., Jahresber. d. D. Math.-Ver. 12, 294, 1903).

Fünf- und Zehnteilung der Peripherie eines gegebenen Kreises.

Sechste geometrographische Konstruktion[1]) (Fig. 17). Um einen beliebigen Punkt B der Peripherie des gegebenen Kreises $O(r)$ beschreibe man mit einem innerhalb gewisser Grenzen[2]) beliebigen Radius ϱ den Kreis $B(\varrho)$, welcher den gegebenen Kreis in A und C schneidet $(C_2 + C_3)$, ziehe den Durchmesser $A O A_0$ $(2R_1 + R_2)$, beschreibe den Kreis A (AC) $(2C_1 + C_3)$, welcher $B(\varrho)$ in D trifft, sowie $O(AC)$ $(C_1 + C_3)$, der $A(AC)$ in J schneidet, und beschreibe (*) $J(OD)$ $(2C_1 + C_3)$, der die Verlängerung von OA in X und X' trifft; $A(AX)$ liefert auf der Peripherie von $O(r)$ A_2 und A_8, $A(AX')$ A_4 und A_6 $(3C_1 + 2C_3)$; durch die Punkte A_0, A_2, A_4, A_6, A_8 ist die Fünfteilung ausgeführt; die Kreise $A_2(AX')$ und $A_8(AX')$ $(2C_1 + 2C_3)$ liefern die außer A_5 (d. i. A) zur Zehnteilung noch fehlenden Punkte A_1, A_3, A_7, A_9. Die Symbole sind:

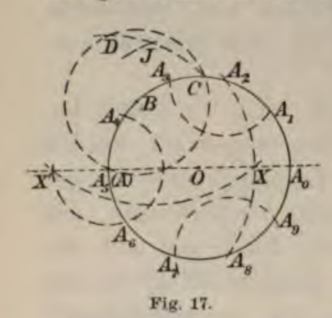


Fig. 17.

Fünfteilung: Op.: $(2R_1 + R_2 + 8C_1 + C_2 + 6C_3)$; S.: 18; E.: 11; 1 Gerade, 6 Kreise.

Zehnteilung: Op.: $(2R_1 + R_2 + 10C_1 + C_2 + 8C_3)$. S.: 22; E.: 13; 1 Gerade, 8 Kreise.

Die im Teil II der „Beiträge" mitgeteilte vierte geometrographische Konstruktion[3]) läßt sich aus dieser Konstruktion leicht durch Spezialisierung von ϱ ableiten.

Die Mascheronische Konstruktion, welche man aus dieser sechsten geometrographischen Konstruktion ohne weiteres entnehmen kann, indem man den Durchmesser wegläßt und dafür das Spiegelbild J' von J in bezug auf diesen Durchmesser einführt, hat für die Fünfteilung (bei welcher man zum Schluß A_0 durch $A_2(A_2A_4)$ findet) den Einfachheitskoeffizienten 20, für die Zehnteilung (bei welcher A_0 durch $A_1(AX')$ erhalten wird) den Einfachheitsgrad 23. Diese Zirkelkonstruktion hatte ich früher[4]) als die im geometrographischen Sinne einfachste bezeichnet: inzwischen hat sich jedoch herausgestellt, daß die Mascheronische Fünf- und Zehnteilung[5]), welche aus der vierten geometrographischen

1) Über die erste bis fünfte s. den vor. Teil der „Beiträge", über die siebente H. Bodenstedt: Geometrographische Fünf- und Zehnecks-Konstruktionen, Unt.-Bl. für Math. u. Naturw. **10**, 1904.

2) nämlich $\frac{1}{2}r(\sqrt{5} \pm \sqrt{3})$.

3) Beitr. II, S. 145.

4) Die quadratische Gleichung usw. a. a. O. S. 22, 23; Beitr. II, S. 144, Fußnote.

5) Beitr. II, S. 146, Fig. 15.

Konstruktion abgeleitet und somit als Spezialisierung der sechsten anzusehen ist, sich einfacher gestaltet, wenn man nicht den Radius, sondern eine dem Radius gleiche Sehne nach dem goldenen Schnitte teilt, ja daß sie eine weitere geometrographische Konstruktion darstellt:

Achte geometrographische Konstruktion (Konstruktion mit dem Zirkel allein, Fig. 18). Man beschreibe um irgend einen Punkt A auf der Peripherie des gegebenen Kreises $O(r)$ den Kreis $A(AO)$ $(C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(r)$ in F und F' trifft, beschreibe $F(FF')$ $(2C_1 + C_3)$, der $O(r)$ in A_0 schneidet, und $A(FF')$ $(C_1 + C_3)$, der $F(FF')$ in J und J' trifft, sowie $J(AA_0)$ und $J'(AA_0)$ $(3C_1 + 2C_3)$, die sich in X und X' schneiden; $A(AX)$ und $A(AX')$ $(3C_1 + 2C_3)$ geben durch die Punkte A_2, A_4, A_6, A_8 nebst A_0 die Fünfteilung; Op.: $(10C_1 + C_2 + 7C_3)$; S.: 18; E.: 11; 7 Kreise; $A_2(AX')$ und $A_8(AX')$ $(2C_1 + 2C_3)$ und A_5 (d. i. A) vollenden die Zehnteilung; Op.: $(12C_1 + C_2 + 9C_3)$; S.: 22; E.: 13; 9 Kreise.

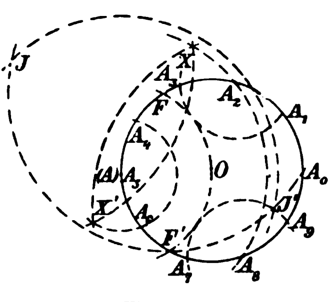


Fig. 18.

Die soeben beschriebene sechste und achte geometrographische Fünf- und Zehnteilung erscheint deshalb von Wichtigkeit, weil das in ihnen enthaltene Prinzip ohne weiteres auf die Kreisteilung nach den übrigen Gaußischen Primzahlen übertragen werden kann.[1]) In der Tat, der Vergleich lehrt, daß die sechste geometrographische Fünf- und Zehnteilung bis zum Zeichen (*), d. h. bis zur Auffindung des Punktes J, buchstäblich mit der zweiten kanonischen geometrographischen Siebzehnteilung[2]) übereinstimmt. Entsprechendes gilt von der aus dieser abgeleiteten Mascheronischen Siebzehnteilung[2]), wenn man sie mit der achten geometrographischen Fünfteilung vergleicht; nur muß man bei ihr dasselbe vereinfachende Verfahren anwenden wie bei dieser; sie möge deshalb hier kurz mit dieser Modifikation beschrieben werden.

Siebzehnteilung des Kreises (Konstruktion mit dem Zirkel allein).

I. Man beschreibe um irgend einen Punkt A der Peripherie des gegebenen Kreises $O(r)$ den Kreis $A(AO)$, welcher $O(r)$ in F und F' schneidet, hierauf zeichne man $F(FF')$, welcher $O(r)$ in A_0 und $A(AO)$

1) Eine Übertragung auf die 257-Teilung behalte ich mir vor.

2) R. Güntsche: Geometrographische Siebzehnteilung des Kreises. Sitzungsberichte der Berl. math. Ges. 2, 10—15, 1903. Die erste kanonische geometrographische Siebzehnteilung rührt von Herrn C. Moreau her.

in A' trifft, $A(FF')$, der $F(FF')$ in J und J', sowie $O(r)$ in H schneidet, und $J(A'H)$ sowie $J'(A'H)$, die sich in J_1 schneiden ($A'H$ stellt $r\sqrt{7}$ dar) $(8C_1 + C_2 + 5C_3)$.

II und III. Man beschreibe $J_1(J'A)$, der $F(FF')$ in K und K' sowie $A(FF')$ in L und L' trifft, ferner $K(AA_0)$ sowie $K'(AA_0)$, welche sich in K_2 schneiden, und $L(AA_0)$ sowie $L'(AA_0)$, welche sich in L_1 treffen $(8C_1 + 5C_3)$.

IV. Man beschreibe $K_2(L'A)$, welcher $A(FF')$ in M^* trifft, $L_1(L'A)$, der $A(FF')$ in M und M' schneidet, sowie $M(FM^*)$ und $M'(FM^*)$, welche sich in M_1 und M_2 treffen $(7C_1 + 4C_3)$.

Bei dieser Konstruktion ist folgende Reihenfolge der Buchstaben auf einer gedachten Geraden inne zu halten: L_1, M_1, J_1, M_2, A, F, K_2.

Bis zur Bestimmung der Seite AM_2 des einbeschriebenen regelmäßigen Vierunddreißigecks ergibt sich dann folgendes Symbol:

Op.: $(23C_1 + C_2 + 14C_3)$; S.: 38; E.: 24; 14 Kreise.

Die Festlegung der Teilpunkte erfordert $11C_1 + 9C_3$, so daß man als Symbol für die gesamte Mascheronische Siebzehnteilung bis zur Festlegung sämtlicher Teilpunkte erhält:

Op.: $(34C_1 + C_2 + 23C_3)$; S.: 58; E.: 35; 23 Kreise.

3. Die vierte Proportionale.

Für die Konstruktion der vierten Proportionale zu drei Strecken hat Herr C. Moreau unter Verwendung seines schon früher erwähnten Verfahrens für die Schlußzeichnung („épure définitive“)[1] den Einfachheitsgrad 19 aufgestellt, wodurch die bisherigen sieben geometrographischen Konstruktionen („Scientia“ und Beitr. II, 139—142), deren Einfachheitsgrad 21 ist, aufhören, geometrographisch zu sein. Auf Grund der obigen konstruktiven Lösung der quadratischen Gleichung erhalten wir nun eine zweite geometrographische Konstruktion:

XXXVIII. *Zu drei gegebenen Strecken M, N und P die vierte Proportionale zu konstruieren;* $X = \frac{N \cdot P}{M}$. $AB = M$, $CD = N$, $EF = P$.

Zweite geometrographische Konstruktion (Fig. 19). Man verlängere CD um $DG = EF$ $(3C_1 + C_3)$ und beschreibe mit dem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ die Kreise $C(\varrho)$ und $G(\varrho)$, die sich in K schneiden, sowie $A(\varrho)$ $(3C_1 + 3C_3)$, darauf $B(DK)$, der $A(\varrho)$ in L trifft, und $L(DK)$ $(4C_1 + 2C_3)$, der AB (außer in B) in J trifft. Um irgend einen Punkt S der Zeichenebene beschreibe man schließlich

1) Beitr. II, S. 143, Fußnote.

$S(AJ)(2C_1 + C_3)$; der Radius dieses Kreises ist, unabhängig von der Lage der gegebenen Stücke, die verlangte vierte Proportionale zu M, N und P; Op.: $(12C_1 + 7C_3)$; S.: 19; E.: 12; 7 Kreise.

Das Verfahren ist dasselbe, wenn man CD um EF nicht verlängert, sondern verkürzt; die entsprechenden Buchstaben sind in der Figur durch einen Akzent bezeichnet.

Will man das hier auf die Schlußzeichnung angewandte Moreausche Verfahren vermeiden, so kann man — nachdem man $\pm EF$ auf

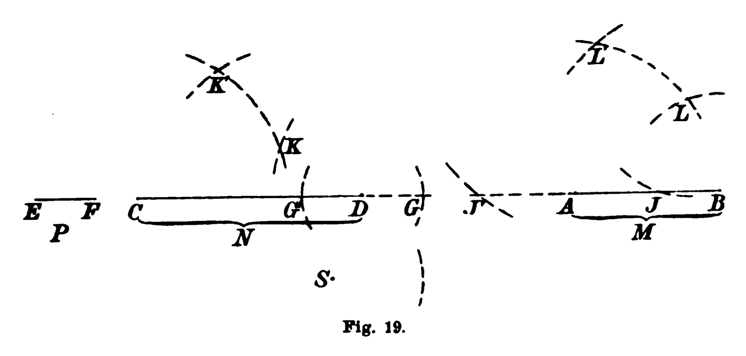


Fig. 19.

DC abgetragen hat — AB an eine beliebige Stelle der Ebene verlegen und mit der Zeichnung von $A(\varrho)$ usw. fortfahren; man kommt dann auf den Einfachheitsgrad 20.

Diese Konstruktion ergibt sich unmittelbar unter Anwendung des Sehnensatzes aus der Figur eines Kreises $K(\varrho)$, zusammenfallend mit $L(\varrho)$, in welchem zwei Sehnen CG und AH sich in einem Punkte D (d. i. J) der Peripherie eines konzentrischen Kreises schneiden, der AH zum zweiten Male in B trifft; die Potenzgleichung lautet $CD \cdot DG = AJ \cdot JH$, also $= AJ \cdot AB$.

XXXV 3) und 4). *Eine Strecke AB und zwei Strecken p und q sind gegeben; es soll AB in C derart geteilt werden, daß*

$$3)\ AC : AB = p : q; \quad 4)\ AC : BA = p : q.$$

a) *Entweder* 3) *oder* 4). *Zweite geometrographische Konstruktion.*[1]) Man beschreibe $B(p)(3C_1 + C_3)$, der AB in der Richtung AB in G, in der Richtung BA in G' schneidet, und $A(q)(3C_1 + C_3)$, der AB in der Richtung AB in H, in der Richtung BA in H' trifft, sowie mit einem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $A(\varrho)$ und $G(\varrho)$ $(C_1 + 2C_3)$, die sich in K treffen; hierauf beschreibe man $H(BK)(3C_1 + C_3)$, der $A(\varrho)$ in L trifft, und $L(BK)(C_1 + C_3)$, der AB in dem gesuchten Punkte C schneidet. Statt G und H hätte man auch gleichzeitig G'

1) Die erste s. Beitr. II, S. 135.

und H' wählen können. Um C', der die Aufgabe 4) löst, statt C zu finden, hat man G durch G' oder H durch H' zu ersetzen. Jede dieser beiden Konstruktionen hat hiernach das Symbol Op.: $(11\,C_1 + 6\,C_3)$; S.: 17; E.: 11; 6 Kreise.

b) 3) *und* 4) *zugleich. Dritte geometrographische Konstruktion.*[1] Hat man C gefunden, so erhält man C' durch $A(AC)\,(2\,C_1 + C_3)$; Op.: $(13\,C_1 + 7\,C_3)$; S.: 20; E.: 13; 7 Kreise.

4. Inverse Punkte, Polaren, harmonische Punkte.

Zu XLIV. *Ein Kreis um den Punkt O mit dem Radius R und die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ seien gegeben; es sollen zu diesen Punkten die inversen Punkte $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$ in bezug auf den Kreis gefunden werden.*

Geometrographische Konstruktion für $n > 1$. Man zeichne den durch A_1 gehenden Durchmesser $BOC\,(2\,R_1 + R_2)$ und beschreibe mit dem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$, die sich in K schneiden, sowie $O(\varrho)\,(3\,C_1 + 3\,C_3)$; ferner nehme man OK auf (C_1) und beschreibe für $k = 1, 2, \ldots n$ die Kreise $A_k(OK)\,(n\,C_1 + n\,C_3)$, welche $O(\varrho)$ in L_k und L'_k treffen, zeichne $L_1(OK)$, der OA_1 in A'_1 trifft, und beschreibe für $k = 2, 3, \ldots n$ die Kreise $L_k(OK)$ und $L'_k(OK)$, die sich in A'_k schneiden $[(2n-1)\,C_1 + (2n-1)\,C_3]$; Op.: $[2\,R_1 + R_2 + (3n+3)\,C_1 + (3n+2)\,C_3]$; S.: $6n+8$; E.: $3n+5$; 1 Gerade, $(3n+2)$ Kreise. Da (für $k = 1, 2, \ldots n$) $OL_k = BK$ ist, so ist die Potenz von O in bezug auf $L_k(OK)$ gleich der von B in bezug auf $K(OK)$, also in der Tat $OA_k \cdot OA'_k = BO^2$, d. h. $= R^2$.

In „Scientia" ist nicht diese allgemeine Aufgabe, sondern nur der besondere Fall behandelt, daß die Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ auf einem Durchmesser liegen; in diesem Falle kommt man mit der obigen Konstruktion auf S.: $4n + 10$. Diese ist also der in „Scientia" angegebenen, welche den Einfachheitsgrad $6n + 5$ besitzt, für $n > 2$ überlegen.

Die für die allgemeine Aufgabe beschriebene Konstruktion bedarf nur einer geringen Abänderung, um eine *Konstruktion inverser Punkte mit dem Zirkel allein* darzustellen: Man beschreibe um den auf der Peripherie des Kreises $O(R)$ beliebig angenommenen Punkt D $D(DO)$ $(C_1 + C_2 + C_3)$, der $O(R)$ in B und E trifft, ferner mit einem beliebigen Radius ϱ $D(\varrho)$ und $E(\varrho)\,(C_1 + 2\,C_3)$, die sich in K treffen, und $O(BK)\,(3\,C_1 + C_3)$; dann nehme man OK auf (C_1) und beschreibe für $k = 1, 2, \ldots n$ die Kreise $A_k(OK)\,(n\,C_1 + n\,C_3)$, wodurch auf $O(BK)$

1) Die erste s. „Scientia", die zweite Beitr. II, S. 136.

die Schnittpunkte L_k und L'_k entstehen, und schließlich $L_k(OK)$ und $L'_k(OK)$ $(2nC_1 + 2nC_3)$, die sich in A'_k schneiden; Op.: $[(3n+6)\,C_1 + C_2 + (3n+4)C_3]$; S.: $6n + 11$; E.: $3n + 7$; $(3n + 4)$ Kreise. Diese Konstruktion ist zwar nicht so einfach wie die von Herrn A. Adler[1]) beschriebene, aber sie ist stets in unveränderter Fassung anwendbar[2])[3]). Man überzeugt sich leicht, daß sie auch aus der Theorie des Inversionsinstruments von Peaucellier[4]) abgeleitet werden kann, mit der sie im Prinzip übereinstimmt.

Zu XLVI. *Die Polaren von n Punkten $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ in bezug auf einen Kreis vom Radius R und Mittelpunkt O zu zeichnen.*

Man könnte hierzu die oben beschriebene Konstruktion der reziproken Punkte fortsetzen, indem man noch $2n$ Gerade zieht. Diese Konstruktion wäre aber nicht geometrographisch; für $n > 1$ ist ihr die folgende Konstruktion überlegen, welche sich auf die Erwägung stützt, daß ein Punkt G der Polare, der von O um ϱ entfernt ist, vom Pol A (wobei $OA = a$ sein soll) die Entfernung $\sqrt{\varrho^2 - 2R^2 + a^2}$ hat.

Geometrographische Konstruktion für $n > 1$. Man zeichne durch A_1 den Durchmesser $BOC\,(2R_1 + R_2)$ und beschreibe mit einem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$, die sich in D schneiden, sowie $O(\varrho)\,(3C_1 + 3C_3)$, lege durch $A_2, A_3, \ldots$ die Kreise $O(OA_2)$, $O(OA_3), \ldots$ $[(n-1)C_1 + (n-1)C_3]$, die BC in $E_2, E_3, \ldots$ treffen, nehme OD auf (C_1), beschreibe $B(OD)$ und $C(OD)(2C_1 + 2C_3)$, die sich in F schneiden, und zeichne $A_1(A_1F)$, $A_2(E_2F)$, $A_3(E_3F), \ldots$ $[(3n-1)\,C_1 + nC_3]$, welche $O(\varrho)$ in G_1 und G'_1, G_2 und G'_2, G_3 und $G'_3, \ldots$ schneiden; $G_1G'_1$, $G_2G'_2, \ldots$ $(2nR_1 + nR_2)$ sind die verlangten Polaren; Op.: $[(2n+2)R_1 + (n+1)R_2 + (4n+4)C_1 + (2n+4)C_3]$; S.: $9n + 11$; E.: $6n + 6$; $(n + 1)$ Gerade, $(2n + 4)$ Kreise.

Zu LIX. *Es seien auf einer Geraden zwei Punkte B und C, sowie n Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ gegeben; zu $A_1, A_2, \ldots A_n$ die konjugierten harmonischen Punkte $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$ in bezug auf B und C zu finden.*

Geometrographische Konstruktion für $n > 1$ (Fig. 20). Man beschreibe

---

1) A. Adler: Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen. Wien. Ber. **99**, 910 ff., 1891.

A. Adler: Zur Theorie der Zeicheninstrumente. Berl. math. Ges. **1**, 26, 1902.

2) Vergl. A. Adler, Wien. Ber. a. a. O. Seite 911 u. 914, ferner „Scientia", S. 54, XLIV, letzte Konstruktion.

3) Eine ähnliche Bemerkung gilt für die Zirkelkonstruktion der vierten Proportionale, Beitr. II, S. 141, Fig. 9, im Vergleich mit der von Mascheroni.

4) Vergl. Rouché et de Comberousse, Traité de Géom. Paris 1900, I, No. 405, S. 309.

mit dem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$ $(2C_1 + 2C_3)$, die sich in K und K' schneiden, ziehe KK' $(2R_1 + R_2)$, die BC in M trifft, beschreibe $M(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$, nehme MK auf (C_1), beschreibe für $k = 1, 2, \ldots n$ die Kreise $A_k(MK)$ $(nC_1 + nC_3)$, die $M(\varrho)$ in L_k treffen, und $L_k(MK)$ $(nC_1 + nC_3)$, welche BC in den gesuchten Punkten A_k' schneiden; Op.: $[2R_1 + R_2 + (2n+4)C_1 + (2n+3)C_3]$; S.: $4n + 10$; E.: $2n + 6$; 1 Gerade, $(2n + 3)$ Kreise.

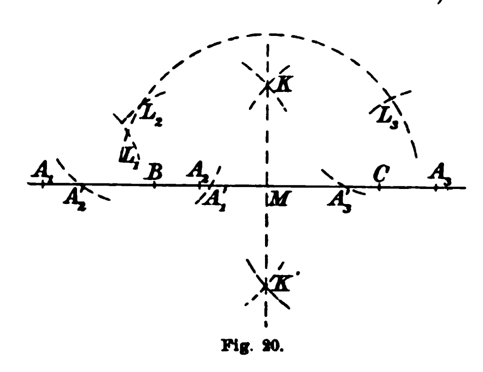


Fig. 20.

Da $ML_k = BK$, so ist die Potenz von M in bezug auf den Kreis $L_k(MK)$ gleich der von B in bezug auf $K(MK)$, also $MA_k \cdot MA_k' = MB^2$, mithin in der Tat A_k' zu A_k konjugiert.

5. Aus der projektivischen Geometrie.

Die Doppelpunkte E und F zweier aufeinanderliegender projektivischer Punktreihen zu finden, von denen außer dem Träger die Fluchtpunkte J, I' und ein Paar homologer Punkte A, A' gegeben sind.[1])

Man hat bekanntlich E (und F) so zu suchen, daß die Gleichung besteht:

$$JE \cdot EI' = JA \cdot A'I',$$

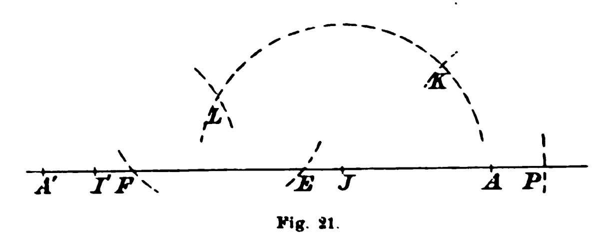


Fig. 21.

die eingangs beschriebene konstruktive Lösung der quadratischen Gleichung findet also hier unmittelbar Anwendung:

Geometrographische Konstruktion (Fig. 21). Man trage auf JI' $I'P = A'A$ ab $(3C_1 + C_3)$, beschreibe mit einem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $I'(\varrho)$ und $P(\varrho)$, sowie $J(\varrho)$ $(2C_1 + 3C_3)$, der $P(\varrho)$ in K und $I'(\varrho)$ in L schneidet, und beschreibe $L(AK)$ $(3C_1 + C_3)$, der

1) Vergl. z. B. H. Hankel: Die Elemente der projektivischen Geometrie, Leipzig 1875, S. 104, 105. Die daselbst mitgeteilte Konstruktion eines unbekannten Autors, welche Hankel als schön und elegant bezeichnet, erfordert 55, bei ökonomischer Behandlung 44 Elementaroperationen, also drei- bis viermal so viel als die obige, deren Deduktion überdies bei weitem einfacher ist.

JI' in den gesuchten Doppelpunkten E und F trifft; Op.: $(8C_1 + 5C_3)$; S.: 13; E.: 8; 5 Kreise.

Die Diskussion der Fälle, die sich aus der verschiedenen Lage der gegebenen Punkte zueinander ergeben, möge hier übergangen werden.

6. Aus der analytischen Geometrie.

Es soll das Paar der durch die Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ *in bezug auf die beiden Koordinatenachsen* OX *und* OY *dargestellten Geraden gezeichnet werden;* $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$ *sind nach Größe und Vorzeichen gegebene Strecken, a wird positiv angenommen.*

Für diese Aufgabe (welche auch von Herrn Lemoine[1]), aber ohne Angabe des Einfachheitsgrades, erwähnt wird) stellte Herr Moreau als Einfachheitsgrad zunächst die Zahl 38, später, unter Anwendung der oben mitgeteilten konstruktiven Lösung der quadratischen Gleichung, die Zahl 34 auf; die beiden Konstruktionen, welche diesen Einfachheitsgrad bieten, beruhen darauf, daß man das Paar von Punkten konstruiert, für welche $y = a$ und $x^2 + bx + ac = 0$ ist; durch diese und den Koordinatenanfangspunkt sind die beiden Geraden bestimmt.

Erste und zweite geometrographische Konstruktion. Man trage auf CC' $C'D = a$ ab, beschreibe $O(a)$, der E auf OX und F auf OY festlegt, sowie $E(a)$ und $F(a)$, die sich in G schneiden, und ziehe FG $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_3)$; dann trage man auf FG $FH = b$ ab $(3C_1 + C_3)$ und beschreibe mit dem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $F(\varrho)$ und $H(\varrho)$, die sich in L treffen, sowie $C(\varrho)$ und $D(\varrho)$, die sich in K schneiden $(3C_1 + 4C_3)$, hierauf beschreibe man $L(C'K)$ $(3C_1 + C_3)$, der M und M' auf FG bestimmt; OM und OM' $(4R_1 + 2R_2)$ sind die verlangten beiden Geraden; Op.: $(6R_1 + 3R_2 + 15C_1 + 10C_3)$; S.: 34; E.: 21; 3 Gerade, 10 Kreise. Auch die zweite geometrographische Konstruktion der Parallelen hätte man zur Auffindung von FG verwenden können.

Das Symbol ändert sich nur wenig, wenn man, statt CC' um a zu verlängern, nach der Herstellung von FG entweder $OS = c$ auf der Y-Achse, oder $GS' = c$ auf FG abträgt und nun Punkt K so auf S, O, F oder S', G, F bezieht, wie in der vorigen Konstruktion auf C, C', D; man erhält Op.: $(6R_1 + 3R_2 + 16C_1 + 9C_3)$; S.: 34; E.: 22; 3 Gerade, 9 Kreise.

Dies die beiden Konstruktionen von Herrn Moreau. Man könnte auch, sein Verfahren modifizierend, folgendermaßen vorgehen:

Dritte geometrographische Konstruktion. Man beschreibe $O(b)$, der

1) E. Lemoine: Principes etc. Arch. (3) 1, 334, 1901, Aufgabe 12.

P auf OX festlegt $(3C_1 + C_3)$, und zeichne $C'(a)$, der D auf CC' bestimmt, sowie $O(a)$, der OY in F schneidet, und $P(a)$ $(5C_1 + 3C_3)$; man ziehe sodann $F(PO)$ $(2C_1 + C_3)$, der $P(a)$ in H trifft, ferner $F(\varrho)$ und $H(\varrho)$, die sich in L und L' schneiden, sowie $C(\varrho)$ und $D(\varrho)$, die sich in K treffen $(3C_1 + 4C_3)$; hierauf beschreibe man $L(KC')$ und $L'(KC')$ $(4C_1 + 2C_3)$, die sich in M und M' schneiden; OM und OM' $(4R_1 + 2R_2)$ sind die gesuchten Geraden; Op.: $(4R_1 + 2R_2 + 17C_1 + 11C_3)$; S: 34; E.: 21; 2 Gerade, 11 Kreise.

7. Die Potenzlinie und Verwandtes.

XLVII. *Die Potenzlinie zweier Kreise O und O' von den Radien R und R' zu konstruieren.*

Für jeden Punkt dieser Potenzlinie ist die Differenz der Quadrate der Entfernungen von O und O' gleich $R^2 - R'^2$, also unabhängig von der Lage der Kreise zueinander; man bringe also die Kreise in eine zum Zeichnen der Potenzlinie bequemere Lage, nämlich in eine solche, bei der sie sich schneiden; ein Punkt dieser neuen Potenzlinie hat von den Mittelpunkten der beiden zugehörigen Kreise dieselben Entfernungen wie ein entsprechender Punkt der gesuchten Potenzlinie von O und O'.

Geometrographische Konstruktion[1]) (Fig. 22). Man beschreibe um den beliebigen Punkt P den Kreis $P(R')$, der $O(R)$ in N und N' trifft $(C_1 + C_2 + C_3)$, ziehe NN' $(2R_1 + R_2)$, beschreibe mit dem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ den Kreis $O(\varrho)$ $(C_1 + C_3)$, der NN' in Q schneidet, beschreibe $O'(PQ)$ $(3C_1 + C_3)$, der $O(\varrho)$ in M und M' trifft, und ziehe MM' $(2R_1 + R_2)$; dies ist die gesuchte Potenzlinie; Op.: $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + C_2 + 3C_3)$; S.: 15; E.: 10; 2 Gerade, 3 Kreise. Man kann auch, nachdem $P(R')$ beschrieben ist, mit einem beliebigen Radius ϱ' den Kreis $P(\varrho')$ zeichnen und dann NN'; der Einfachheitsgrad wird derselbe. Die in „Scientia“ mitgeteilte Konstruktion, die den Einfachheitsgrad 16 besitzt, hört somit auf, geometrographisch zu sein.

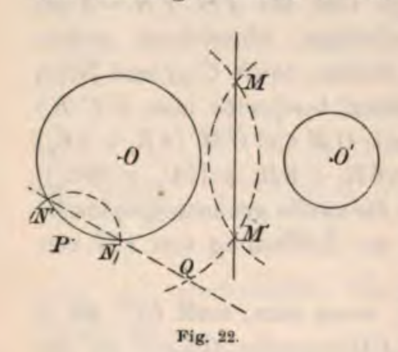


Fig. 22.

1) Auf diese Konstruktion nebst ihrem Spezialfall habe ich vor längerer Zeit hingewiesen (Die quadratische Gleichung usw. a. a. O. p. 23, die Rezension über „Scientia“ Arch. (3) 4, 341, 1903); inzwischen ist sie auch, zugleich mit der des Spezialfalls und der folgenden Aufgabe, von Herrn J. Reusch veröffentlicht worden (J. Reusch: Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung, Leipzig 1904, B. G. Teubner, S. 55—57). (Zusatz während der Korrektur.)

Für das Potenzzentrum dreier Kreise hat sich aus der soeben beschriebenen Konstruktion keine geometrographische Konstruktion ergeben.

Falls $O'(R')$ zu einem Punkte zusammenschrumpft, ist der Kreis $P(R')$ ebenfalls unendlich klein, NN' wird also zu einer Tangente an $O(R)$; denkt man sich diese Senkrechte auf dem Radius nicht in einem Punkte der Peripherie, sondern im Kreismittelpunkt O errichtet, so gelangt man zu folgender Konstruktion:

Geometrographische Konstruktion für den Fall, daß $O'(R')$ unendlich klein ist. Man ziehe einen beliebigen Durchmesser UOU' $(R_1 + R_2)$, beschreibe mit dem beliebigen, hinreichend großen Radius ϱ $U(\varrho)$ und $U'(\varrho)$, welche sich in Q schneiden, sowie $O(\varrho)$ $(3C_1 + 3C_3)$, und zeichne $O'(OQ)$ $(2C_1 + C_3)$, welcher $O(\varrho)$ in M und M' trifft[1]); MM' $(2R_1 + R_2)$ ist die gesuchte Potenzlinie; Op.: $(3R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$; S.: 14; E.: 8; 2 Gerade, 4 Kreise. Für diesen besonderen Fall wird also der bisherige Einfachheitsgrad durch die vorliegende Konstruktion um zwei Einheiten verringert. Die Tarry-Bernèssche Tangentenkonstruktion liefert für diesen Fall noch eine partikuläre Lösung mit dem Einfachheitskoeffizienten 13, die anwendbar ist, wenn $OO' < R(2 + \sqrt{5})$.

Die soeben beschriebene Konstruktion ermöglicht eine einfache Lösung der folgenden Aufgabe:

Auf einer gegebenen Strecke AB einen Punkt X zu finden, so daß $XA^2 - XB^2$ dem Quadrat einer gegebenen Strecke q gleich ist.

Man hat nur die Potenzlinie zwischen $A(q)$ und B zu suchen; ihr Schnittpunkt mit AB ist der verlangte.

Geometrographische Konstruktion. Man beschreibe $A(q)$ $(3C_1 + C_3)$, der AB in U und U' schneidet, ferner mit einem hinreichend großen Radius ϱ die Kreise $U(\varrho)$ und $U'(\varrho)$, die sich in Q treffen, sowie $A(\varrho)$ $(3C_1 + 3C_3)$, endlich $B(AQ)$ $(2C_1 + C_3)$, der $A(\varrho)$ in M und M' schneidet; MM' $(2R_1 + R_2)$ trifft AB in dem gesuchten Punkte X; Op.: $(2R_1 + R_2 + 8C_1 + 5C_3)$; S.: 16; E.: 10; 1 Gerade, 5 Kreise. Die gebräuchliche Konstruktion[2]) würde etwa doppelt so viel Elementaroperationen erfordern. — Man könnte auch, ohne den Einfachheitskoeffizienten zu ändern, die erforderliche Senkrechte auf der gegebenen Strecke q selbst in ihrem Endpunkte geometrographisch errichten.

---

1) Man beachte, daß $M(OQ)$ und $M'(OQ)$ als Schnittpunkt den inversen Punkt von O' in bezug auf $O(R)$ ergeben würden, daß also diese Konstruktion mit den unter 4 mitgeteilten eng verknüpft ist.

2) Vergl. z. B. Mehler, Hauptsätze der Elementarmath., § 121b, Aufg. 6. Herr Lemoine stellte 1900 für diese Aufgabe den Einfachheitskoeffizienten 18 auf (Arch. (3) 1, 334, 1901, Aufgabe 8).

Die obige Figur zweier sich schneidender Kreise mit den Mittelpunkten O und P, der Potenzlinie (gemeinsamen Sehne) NN' und einem Punkte Q auf derselben ergibt ferner eine einfache Lösung der folgenden Aufgabe:

Aus drei gegebenen Strecken a, b und c die Strecke $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ zu konstruieren.

Für diese Figur gilt nämlich $PQ^2 = OQ^2 + PN^2 - ON^2$; der Vergleich mit der zu erfüllenden Gleichung führt unmittelbar zu folgendem Verfahren:

Geometrographische Konstruktion. (Es sei $a \geq b$.) Man beschreibe um zwei beliebige Punkte O und P der Ebene die sich schneidenden Kreise $O(c)$ und $P(b)$ $(4C_1 + 2C_3)$, zeichne ihre gemeinsame Sehne NN' $(2R_1 + R_2)$ und beschreibe $O(a)$ $(3C_1 + C_3)$, der die Sehne in Q trifft; PQ ist die gesuchte Strecke x; Op.: $(2R_1 + R_2 + 7C_1 + 3C_3)$; S.: 13; E.: 9; 1 Gerade, 3 Kreise. Es ist leicht zu zeigen, daß diese Konstruktion allgemein ist, d. h. daß die Zentrale OP stets so gewählt werden kann, daß $O(a)$ die Potenzlinie schneidet. Falls eine der Strecken b oder c zu Null wird, ist die Konstruktion zu modifizieren. Für $a = b$, also $x = \sqrt{2a^2 - c^2}$, findet man mit ihr den Einfachheitskoeffizienten 11, also denselben wie für $x = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Berlin, 9. Januar 1904.

(Schluß folgt.)

Hyperbolic Functions.

By J. EDALJI of Gujarat College, Ahmedabad.

The following method of treating the subject of hyperbolic functions has, I think, certain advantages over the method now commonly adopted.

If the semitransverse axis of a given rectangular hyperbola is k, and the semidiameter (whether real or imaginary) parallel to any straight line AB is r, the hyperbolic value of AB may be defined to be $\frac{AB}{r}k$. The hyperbolic ratio of two straight lines AB and $A'B'$ is the ratio of their hyperbolic values, i. e. the ratio of $\frac{AB}{r}$ to $\frac{A'B'}{r'}$, r and r' being the semidiameters of the given rectangular hyperbola parallel to AB and $A'B'$. If $\frac{AB}{r} = \frac{A'B'}{r'}$, AB and $A'B'$ are said to be equihyperbolic.

The hyperbolic measure of a very small angle A is the ratio of the hyperbolic arc subtending it to the semidiameter parallel to the small hyperbolic arc, if we draw a rectangular hyperbola similar to the

given rectangular hyperbola and having the angular point A for its center. The hyperbolic measure of any angle is the sum of the hyperbolic measures of the indefinitely small angles into which it may be divided. Hence the hyperbolic measure of an angle whose circular measure is α, and which is measured from a straight line parallel to the transverse axis of the given rectangular hyperbola, is $\frac{1}{i}\int_0^\alpha \sec 2x\,dx$ or $\frac{1}{2i}\log\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$. Hence it follows that if θ is the hyperbolic measure of any angle contained within the angle between the straight lines drawn to the fixed points at infinity on the given rectangular hyperbola, and $\operatorname{tnh}\theta$ is its hyperbolic tangent which will be defined hereafter,

$$\theta = \frac{1}{2i}\log\frac{1+i\operatorname{tnh}\theta}{1-i\operatorname{tnh}\theta} = \operatorname{tnh}\theta - \tfrac{1}{3}\operatorname{tnh}^3\theta + \tfrac{1}{5}\operatorname{tnh}^5\theta - \cdots,$$

and

$$i\operatorname{tnh}\theta = \frac{e^{2\theta i}-1}{e^{2\theta i}+1}.$$

If OA and AB are conjugate with respect to the given rectangular hyperbola, $\operatorname{snh} O$ or the hyperbolic sine of the angle AOB is the hyperbolic ratio of AB to OB, $\operatorname{csh} O$ or the hyperbolic cosine of the angle AOB is the hyperbolic ratio of OA to OB, $\operatorname{tnh} O$ or the hyperbolic tangent of the angle AOB is the hyperbolic ratio of AB to OA, $\operatorname{cth} O$ or the hyperbolic cotangent of the angle AOB is the hyperbolic ratio of OA to AB, $\operatorname{sch} O$ or the hyperbolic secant of the angle AOB is the hyperbolic ratio of OB to OA, and $\operatorname{csch} O$ or the hyperbolic cosecant of the angle AOB is the hyperbolic ratio of OB to AB.

If OC is conjugate to OB and equal to it, and CD is drawn parallel to AB, CD and DO are equal to OA and AB respectively. Hence $\operatorname{snh} AOC = \frac{CD}{OC}\cdot\frac{OC\sqrt{-1}}{OF\sqrt{-1}} = \frac{OA}{OB}\cdot\frac{OB}{OE} = \operatorname{csh} AOB$, since OE and OF are conjugate and equal. Also $\operatorname{csh} AOC = \frac{OD}{OC}\cdot\frac{OC\sqrt{-1}}{OE}$ $= -\frac{AB}{OB}\cdot\frac{OB}{OF\sqrt{-1}} = -\operatorname{snh} AOB$. Hence if the angles AOB and BOC are denoted by O and H, $\operatorname{snh}(H+O) = \operatorname{csh} O$, and $\operatorname{csh}(H+O) = -\operatorname{snh} O$. These formulae may be shown to be universally true.

It may also be easily proved that $\operatorname{snh}(2H+O) = -\operatorname{snh} O$, $\operatorname{csh}(2H+O) = -\operatorname{csh} O$, $\operatorname{snh}(-O) = -\operatorname{snh} O$, and $\operatorname{csh}(-O) = \operatorname{csh} O$, whatever the magnitude of the angle O may be.

We will now prove the formulae $\operatorname{snh}(A+B) = \operatorname{snh} A \operatorname{csh} B + \operatorname{csh} A \operatorname{snh} B$, $\operatorname{csh}(A+B) = \operatorname{csh} A \operatorname{csh} B + \operatorname{snh} A \operatorname{snh} B$, $\operatorname{snh}(A-B)$

$= \operatorname{snh} A \operatorname{csh} B \rightarrow \operatorname{csh} A \operatorname{snh} B,$ and $\operatorname{csh}(A - B) = \operatorname{csh} A \operatorname{csh} B - \operatorname{snh} A \operatorname{snh} B.$

Let AOB and BOP (Fig. 1) be the given angles A and B. Draw PN conjugate to OB, and draw NQ and PM parallel to AB, and NR parallel to OA.

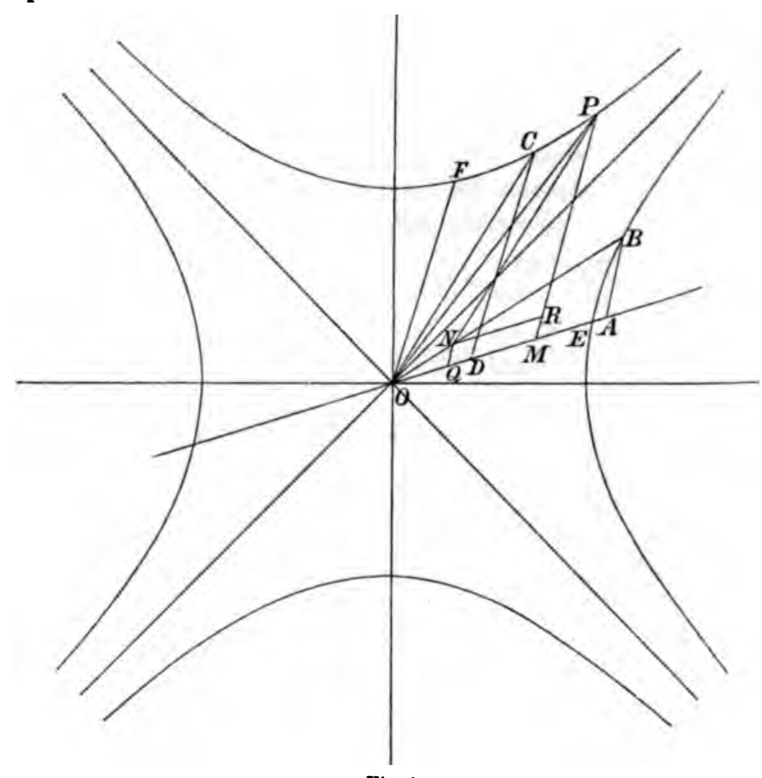


Fig. 1.

Now

$$\operatorname{snh}(A + B) = \frac{PM}{OP} \cdot \frac{OP\sqrt{-1}}{OF\sqrt{-1}} = \frac{PM}{OF} = \frac{PR + RM}{OF}$$

$$= \frac{PR}{PN} \cdot \frac{OC\sqrt{-1}}{OF\sqrt{-1}} \cdot \frac{PN}{OP} \cdot \frac{OP\sqrt{-1}}{OC\sqrt{-1}} + \frac{QN}{ON} \cdot \frac{OB}{OF\sqrt{-1}} \cdot \frac{ON}{OP} \cdot \frac{OP\sqrt{-1}}{OB}$$

$$= \operatorname{csh} A \operatorname{snh} B + \operatorname{snh} A \operatorname{csh} B.$$

Also

$$\operatorname{csh}(A + B) = \frac{OM}{OP} \cdot \frac{OP\sqrt{-1}}{OE} = \frac{(OQ + QM)\sqrt{-1}}{OE}$$

$$= \frac{OQ}{ON} \cdot \frac{OB}{OE} \cdot \frac{ON}{OP} \cdot \frac{OP\sqrt{-1}}{OB} + \frac{NR}{PN} \cdot \frac{OC\sqrt{-1}}{OE} \cdot \frac{PN}{OP} \cdot \frac{OP\sqrt{-1}}{OC\sqrt{-1}}$$

$$= \operatorname{csh} A \operatorname{csh} B + \operatorname{snh} A \operatorname{snh} B,$$

since
$$\frac{NR}{PN} \cdot \frac{OC\sqrt{-1}}{OE} = \frac{NQ}{ON} \cdot \frac{OB}{OF\sqrt{-1}} = \operatorname{snh} A.$$

ecoudly let EOB and BOP (Fig. 2) be the given angles A and raw PM and PN conjugate to OE and OB respectively, and VQR and OF parallel to PM, and PR and OC parallel to QM N respectively.

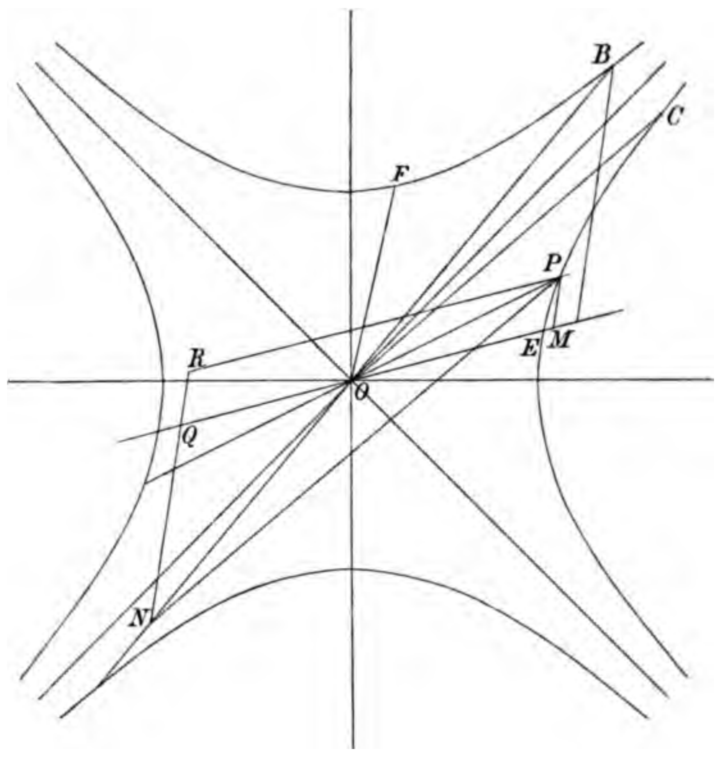


Fig. 2.

ow

$$-B) = \frac{PM}{OP} \cdot \frac{OP}{OF\sqrt{-1}} = \frac{NR - NQ}{OF\sqrt{-1}} = \frac{NR}{PN} \cdot \frac{OC}{OF\sqrt{-1}} \cdot \frac{PN}{OP} \cdot \frac{OP}{OC}$$

$$-\frac{NQ}{ON} \cdot \frac{OB\sqrt{-1}}{OF\sqrt{-1}} \cdot \frac{ON}{OP} \cdot \frac{OP}{OB\sqrt{-1}} = -\operatorname{csh} A \operatorname{snh} B + \operatorname{snh} A \operatorname{csh} B,$$

$$\frac{NR}{PN} \cdot \frac{OC}{OF\sqrt{-1}} = -\frac{OQ}{ON} \cdot \frac{OB\sqrt{-1}}{OE} = -\operatorname{csh} A,$$

$$-\frac{ON}{OP} \cdot \frac{OP}{OB\sqrt{-1}} = \operatorname{csh} B.$$

so

$$-B) = \frac{OM}{OP} \cdot \frac{OP}{OE} = \frac{QM - QO}{OE} = \frac{NR}{PN} \cdot \frac{OC}{OE} \cdot \frac{PN}{OP} \cdot \frac{OP}{OC}$$

$$-\frac{QO}{ON} \cdot \frac{OB\sqrt{-1}}{OE} \cdot \frac{ON}{OP} \cdot \frac{OP}{OB\sqrt{-1}} = \operatorname{snh} A \operatorname{snh} B + \operatorname{csh} A \operatorname{csh} B,$$

since
$$\frac{NR}{PN}\cdot\frac{OC}{OE} = -\frac{QN}{ON}\cdot\frac{OB\sqrt{-1}}{OF\sqrt{-1}} = -\operatorname{snh} A,$$

and
$$-\frac{ON}{OP}\cdot\frac{OP}{OB\sqrt{-1}} = \operatorname{csh} B.$$

It can be easily proved that these four formulae are true for any values of A and B.

Two angles are said to be equihyperbolic if their hyperbolic measures are equal or if the straight lines containing them have equal anharmonic or cross ratios with the straight lines drawn to the fixed points at infinity on the given rectangular hyperbola.

If two angles whose hyperbolic measures are A and B are equihyperbolic, the angles whose hyperbolic measures are $A+B$ and $2A$ are equihyperbolic, and $\operatorname{snh} A = \operatorname{snh} B$, and $\operatorname{csh} A = \operatorname{csh} B$. Hence $\operatorname{snh} 2A = 2\operatorname{snh} A \operatorname{csh} A$, and $\operatorname{csh} 2A = \operatorname{csh}^2 A + \operatorname{snh}^2 A$, and similarly other formulae can be easily deduced.

It may be easily shown that if the sides AB and BC of a triangle ABC are conjugate, $b^2 = a^2 + c^2$, a, b and c being the hyperbolic values of the sides of the triangle. Also if ABC is any triangle, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\operatorname{csh} B$, and therefore

$$\operatorname{snh}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \quad \text{and} \quad \operatorname{csh}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}.$$

Similarly other formulae may be deduced.

If $ABCD$ is a parallelogram having the sides AB and BC conjugate, and the hyperbolic values of AB and BC are a and b, the hyperbolic area of $ABCD$ may be taken to be ab which can be proved to be equal to

$$\frac{\text{the area in circular functions}}{\sqrt{-1}} \quad \text{or} \quad \frac{AB\cdot BC\sin B}{\sqrt{-1}}.$$

Hence the hyperbolic area of a triangle

$$\tfrac{1}{2}ac\operatorname{snh} B = \frac{\text{the area in circular functions}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \frac{b^2\operatorname{snh} A\operatorname{snh} C}{2\operatorname{snh} B}.$$

The hyperbolic value of a semidiameter of a rectangular hyperbola which is similarly situated to the given rectangular hyperbola and which touches the side BC of a triangle ABC and the other two sides AB and AC produced is $\frac{S}{a-b-c}$, and the hyperbolic value of a semidiameter of a rectangular hyperbola which is similarly situated

to the given rectangular hyperbola and which touches the side BC of a triangle ABC and the other two sides AB and CA produced is $\frac{S}{a+b-c}$, where S is the hyperbolic area of the triangle ABC. The hyperbolic value of a semidiameter of a rectangular hyperbola which is similarly situated to the given rectangular hyperbola and is described about a triangle ABC is $\frac{a}{2\,\mathrm{snh}\,A}$ or $\frac{abc}{4S}$. Similarly other trigonometrical formulae can be easily deduced.

If the hyperbolic values of the coordinates of any two points P and Q are (x_1, y_1) and (x_2, y_2), the hyperbolic value of

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\,\mathrm{csh}\,\omega},$$

ω being the angle between the axes.

If the hyperbolic values of the coordinates of any three points A, B, C, are (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), the hyperbolic area of the triangle ABC

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

the axes being conjugate. Hence the hyperbolic area of the triangle

$$ABC = \frac{\text{the area of the triangle in circular functions}}{\sqrt{-1}}.$$

Similarly the hyperbolic area of a quadrilateral may be expressed in terms of the hyperbolic values of the coordinates of its angular points.

If the hyperbolic values of the polar coordinates of any two points P and Q are (r_1, θ_1), and (r_2, θ_2), the hyperbolic value of

$$PQ = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\,\mathrm{csh}(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Also the hyperbolic value of the area of a triangle

$$= \tfrac{1}{2}\left\{r_1 r_2\,\mathrm{snh}(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3\,\mathrm{snh}(\theta_3 - \theta_2) + r_3 r_1\,\mathrm{snh}(\theta_1 - \theta_3)\right\}.$$

The equation of a straight line in hyperbolic coordinates is $y = mx + c$, if the hyperbolic tangent of the angle made by it with the axis of x is m, and the hyperbolic value of the intercept on the axis of y is c. The equation of a straight line in hyperbolic coordinates is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, if a and b are the hyperbolic values of the intercepts on the axes of x and y. Similarly other equations of a straight line may be obtained.

The equation of a circle in hyperbolic coordinates is $(x - d)^2$

$-(y-e)^2 = a^2$, d and e being the hyperbolic values of the coordinates of the center of the circle, and a being the hyperbolic value of the radius of the circle parallel to the transverse axis of the given rectangular hyperbola. The equation of the tangent at any point (x', y') of a circle whose equation is $x^2 - y^2 = a^2$, is $xx' - yy' = a^2$ in hyperbolic coordinates.

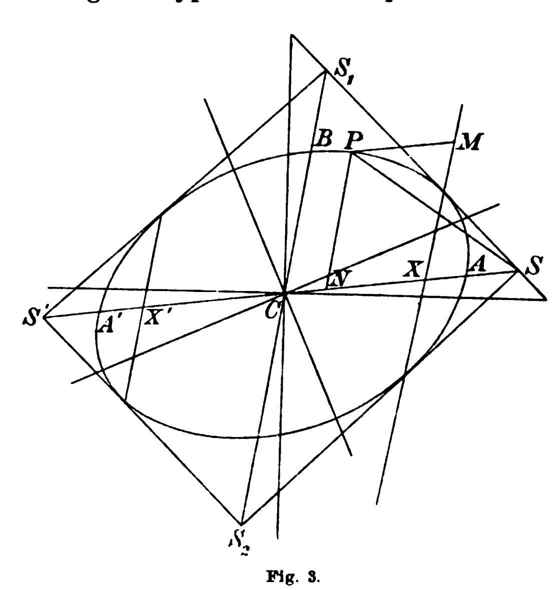


Fig. 3.

Let CA and CB be the conjugate diameters of any given ellipse which are also conjugate with respect to the fixed rectangular hyperbola, and let SS_1 and SS_2 be the tangents to the ellipse which pass through the points at infinity on the fixed rectangular hyperbola. Since CA and CB make equal angles with the asymptotes of the fixed rectangular hyperbola, $CS_1 = CS_2$, and the polar XM of S is parallel to S_1S_2. From any point P on the ellipse draw PM and PN parallel to CA and CB. Since $\frac{CN^2}{CA^2} + \frac{PN^2}{BC^2} = 1$, the equation of the ellipse in hyperbolic coordinates is evidently $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, a^2 and b^2 being positive. Let the ratio of SA to AX be denoted by e. Then $SA = e \cdot AX$, and $SA' = e \cdot A'X$, therefore $CS = e \cdot CA$, and $CA = e \cdot CX$. Again because S_1SS_2 is a right angle, $CS^2 = CA^2 + CB^2$, and therefore $a^2e^2 = a^2 + b^2$. Hence the equation of the ellipse becomes $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$, and therefore $(ae - x)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$. Hence the hyperbolic ratio of SP to PM is equal to e which is constant for all positions of P.

If we call S, S', S_1, and S_2 the hyperbolic foci of the ellipse, it can be easily proved that the sum or difference of the hyperbolic values of the distances of any point on an ellipse from the opposite hyperbolic foci is constant.

The equation of the tangent at any point (x', y') of an ellipse is $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1$.

Similarly it may be shown that the equation of an hyperbola in hyperbolic coordinates is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a^2 and b^2 being positive, and the equation of the tangent at any point (x', y') is $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$. Hence it follows that the equation of a rectangular hyperbola is $x^2 + y^2 = a^2$, and the equation of the tangent at any point on it is $xx' + yy' = a^2$. Similarly other equations and properties of conics can be deduced.

Ahmedabad, 27th February 1903.

Rezensionen.

W. Weiler, Physikbuch. Eßlingen und München 1902, J. F. Schreiber.

Der durch seine elementaren Lehrbücher physikalisch-technischer Richtung in weiteren Kreisen bekannt gewordene Verfasser bietet in den vorliegenden fünf Bändchen verschiedenen Umfanges von zusammen über 700 Seiten einen vollständigen elementaren Lehrgang der Physik, ein Lese- und Nachschlagebuch, das für den Schulunterricht und zur Selbstbelehrung bestimmt ist.

In der Darstellung und der Einteilung lehnt sich das Werk an die für Schulbücher übliche Form an, bringt aber als Neuerung fast durchweg farbige Abbildungen, die das Verständnis erleichtern sollen und der Absicht auch da entsprechen, wo gewisse Gegensätze in den Erscheinungen und Wirkungen anschaulich hervorgehoben werden sollen, verwickeltere elektrische Stromwege zu verfolgen sind, die Teile zusammengesetzter Apparate zu unterscheiden usw. Bei einfachen Figuren ist der Nutzen der farbigen Wiedergabe allerdings nicht erheblich. Die Figuren selbst sind meist deutlich, wenn sich auch hier und da weniger gelungene eingeschlichen haben. So werden beispielsweise die Figuren 32 und 33 des vierten Bändchens (Wärme) trotz der Farbe kaum verständlich sein. Hierzu mag noch die Bemerkung gestattet sein, die sich auch auf sehr vornehme Lehrbücher der Physik bezieht, daß bei bildlicher Darstellung technischer Objekte, die sich nicht auf nur schematische Andeutung beschränkt, doch auch moderne Formen gewählt werden möchten und nicht so vorzeitliche, in denen beispielsweise, wie auch hier, die Dampfmaschine aufzutreten pflegt.

Der aus äußeren Gründen zuerst ausgegebene und umfangreichste Teil (290 Seiten, 439 Figuren) enthält die Lehre vom Magnetismus, der Elektrostatik und Elektrodynamik, welch letztere wieder den breitesten Raum einnimmt. Besonderen Wert hat der Verfasser auf die technischen Anwendungen der Elektrizität gelegt, dem Zwecke des Buches entsprechend. Doch werden die Meinungen geteilt sein über die zweckmäßige Menge des Mitzuteilenden, die man zugunsten vertiefter Behandlung des Wichtigeren wohl beschränkt sehen möchte. Überhaupt wird der Verfasser gut tun, bei

späteren Auflagen eine schärfere Sichtung des Aufzunehmenden eintreten zu lassen. Einige Stichproben aus dem fast überreichen Inhalte mögen das bestätigen. Die alten Formeln für die Tragkraft der Magnete (S. 20) haben keinen Wert mehr und wirken auf den Anfänger, der eben in die moderne Auffassung des Magnetismus eingeführt werden soll, nur verwirrend. Durch Teilung des Eisens wird die Hysteresis *nicht* vermindert (S. 19). Die wichtige Bestimmung der Horizontalkomponente (S. 34) müßte anschaulicher und eingehender erläutert werden. Die Figur 192 (S. 133) macht den Eindruck, als wenn zwischen Magnetpol und Lichtbogen Abstoßungskräfte in der Verbindungslinie wirkten, und der Text läßt diese Unsicherheit bestehen. Das wichtige Grundgesetz von Biot-Savart (S. 165) müßte in seiner einfachsten Erfahrungsform mitgeteilt werden. Die Darstellung der unipolaren, oder „axialen", oder „Rotationsinduktion" als besondere Erscheinung (S. 204) dürfte nicht mehr gerechtfertigt sein. In Figur 388 (S. 249) hat die Spannungsspule der Differentiallampe auf der einen Seite keinen Anschluß. Die im Anhange gegebenen mechanischen Versinnlichungen der magnetischen und elektrischen Erscheinungen dürften bei ihrer für den vorausgesetzten Leserkreis viel zu kurzen Behandlung ohne rechten Nutzen sein.

Das zweite Bändchen (Mechanik, 156 Seiten, 244 Figuren) hält sich mehr innerhalb der für elementare physikalische Lehrbücher üblichen Grenzen und macht einen einheitlicheren Eindruck. Die Grundbegriffe sind sorgfältig erläutert und die Erscheinungen meist recht zweckmäßig veranschaulicht. Ein gewisses Zuviel mit teilweise nicht hinreichender Begründung ist allerdings auch hier nicht ganz vermieden. Kann das Ausflußgesetz von Torricelli (S. 116) nicht einfach begrifflich abgeleitet werden? Es ist nicht zweckmäßig, den Ausfluß der Gase als Folge ihrer eigenen Spannung zu betrachten (S. 146), im Gegensatze zu den tropfbaren Flüssigkeiten. Man begibt sich damit des Vorteiles, den Torricellischen Satz unmittelbar und ungezwungen auf Gase anwenden zu können, die Abweichungen dagegen als Folge der elastischen Spannung zu erläutern.

Schwingungen und Wellen, einschließlich Akustik, die den dritten und kürzesten Teil bilden (52 Seiten, 80 Figuren), sind ähnlich wie die Mechanik unter Hinweis auf nur einfache Apparate und Versuche behandelt. Übrigens ist das Lissajous-Vibroskop sowohl in der Figur (26) wie im Texte unrichtig angegeben.

Die Wärmelehre (Band 4, 88 Seiten, 95 Figuren) ist ebenfalls nur kurz behandelt, da etwa ein Drittel des Raumes der Wetterkunde gewidmet ist. Wie meist fehlt auch hier in der Thermometrie der sorgfältige Nachweis der einfachen Proportionalität zwischen Wärmemengen und Gasskala, dagegen sind die einfachsten Sätze der physikalischen Chemie mit aufgenommen. Auch der Entropie ist gedacht, wenn schon bei dem knappen Raume der Begriff nur gestreift werden kann.

In der Optik (Band 5, 140 Seiten, 204 Figuren) kommt naturgemäß die farbige Darstellung zur besten Geltung, und die Figuren erhalten dadurch eine bemerkenswerte Klarheit. Als einzelne Stichprobe mag hier erwähnt sein, daß die Umkehrung der Spektrallinien (S. 96) eine zwar noch nicht genügende, aber doch einleuchtendere Erklärung findet, als man sonst in elementaren Lehrbüchern antreffen kann.

Am Schlusse des letzten Buches gibt der Verfasser außer einer für den

Leserkreis wohl dienlichen Fremdwörtererklärung eine geschichtliche Tabelle der physikalischen Entdeckungen. Das ist recht dankenswert, nur bliebe zu wünschen, daß dem historischen Momente im Texte selbst ein bescheidener Raum gewidmet würde. Die Einsicht in den Zusammenhang der Erscheinungen wenigstens durch einige Andeutungen über den Entwicklungsgang zu unterstützen, ist ein erfreuliches Bestreben, das in der neueren Literatur sich mehr und mehr bemerklich macht.

Bei der Schwierigkeit, ein elementares Lehrbuch der Physik zu schaffen, das sich gerade durch Reichhaltigkeit des Stoffes auszeichnen soll, werden die unvermeidlichen Unvollkommenheiten der ersten Auflage dem Verfasser nicht hoch angerechnet werden, der gewiß gleiche Liebe und Mühe auf die spätere Verbesserung seiner fleißigen Arbeit verwenden wird.

Referent möchte die Gelegenheit noch zu einer allgemeinen Bemerkung benutzen. Die Begründungen und Beweise der physikalischen Sätze werden vielfach in gar zu bequemer Form gegeben. Es ist immer leicht, ein dem Darsteller bekanntes Ergebnis in der Weise scheinbar abzuleiten, oder eine ausgesprochene Behauptung dadurch zu begründen, daß mit einer kleinen Gleichung einige Umformungen vorgenommen werden, deren Ende dann in mathematischer Ausdrucksweise das nicht unbekannte physikalische Ziel darstellt. Von solcher Behandlungsweise kann weder der Leser, noch sollte der Autor befriedigt sein.

Es wäre gewiß zu wünschen, daß namentlich in elementaren Darstellungen die rein begriffliche und auf den Zusammenhang der Erscheinungen zielende Behandlung tunlichst bevorzugt würde, die zwar schwerer, aber auch im selben Maße nutzbringender ist, da sie unmittelbar die inneren Gründe gibt und nicht nur eine oft recht künstlich zurecht gemachte und deshalb nur scheinbare Entwicklung in mathematischen Zeichen.

Berlin. A. Rotth, Oberingenieur.

W. Weiler, Physikalisches Experimentier- und Lesebuch. Eßlingen und München 1902, J. F. Schreiber. Mit 257 Figuren. 143 Seiten.

Das kleine Buch ist vom Verfasser als elementarste Einführung in die Physik gedacht, als Vorschule für größere Lehrbücher, wie des Verfassers „Physikbuch“, zugleich aber auch als Anleitung zur Anfertigung einfacher Apparate. Die meist gut gewählten, ebenfalls farbigen Figuren entsprechen in ihrer Einfachheit und Faßlichkeit recht wohl dem Verständnis des Leserkreises, an den sich das Büchlein wendet.

Der Text beschreibt an Hand der Figuren ohne Gebrauch mathematischer Zeichen Grunderscheinungen aus allen Teilen der Physik. Manche der beschriebenen Apparate, beispielsweise die Elektrisiermaschine, dürften auch Lehrern an Mittelschulen willkommene Anregung bieten zur Selbstanfertigung, in mehr oder weniger einfacher Form. Der erziehliche Einfluß einer solchen, das Nachdenken unmittelbar anregenden und zur Selbsttätigkeit anspornenden Darstellungsweise wird jetzt wohl allgemein genügend gewürdigt, um jeden Beitrag in dieser Hinsicht willkommen zu machen.

Berlin. A. Rotth, Oberingenieur.

Graetz, L., Kompendium der Physik. 3. Auflage. Leipzig und Wien 1902, Franz Deuticke.

Wie der Verfasser im Vorworte angibt, hat er bei der Bearbeitung dieser 3. Auflage im wesentlichen die 2. Auflage um die neueren Erscheinungen bereichert, während die ganze Anlage des Werkes die gleiche geblieben ist. Die Art der Darstellung, die dem Buche so außerordentlich viele Freunde erworben hat, ist also auch in der neuen Auflage gewahrt und wird auch dieser neben den alten eine große Reihe neuer Freunde zuführen. Die Art der Anordnung des Stoffes schließt sich der bei physikalischen Lehrbüchern üblichen Reihenfolge an, indem im ersten Abschnitte die Mechanik, im zweiten die elastischen und molekularen Eigenschaften, im dritten die Wärme, im vierten der Schall, im fünften das Licht und im sechsten endlich Elektrizität und Magnetismus behandelt werden. Diesen Abschnitten vorangeschickt ist eine Einleitung, in der physikalische Begriffe und die Grundlagen der messenden Physik gegeben sind. Bei der Durchsicht des Buches sind mir einige Dinge aufgefallen, die ich in folgenden erwähnen möchte.

Auf Seite 8 befindet sich bei der Besprechung der Dichtigkeiten eine Tabelle, die mir in dieser unvermittelten Form nicht recht in die Einleitung hinein zu passen scheint. In der Tabelle sind feste und flüssige Körper unterschieden. Es sind darin die spezifischen Gewichte für feste Körper angegeben, für flüssige Körper unter Angabe der Temperatur. Die Temperaturen sind im allgemeinen zu 15 Grad angenommen, das Quecksilber dagegen bei 0 Grad. Infolge eines Druckfehlers finden sich dann bei Quecksilber die Dichten 3,596 und für Schwefelkohlenstoff 11,270 anstatt 13,596 und 1,270. Vergebens habe ich nun in den begleitenden Texten danach geforscht, warum bei den Flüssigkeiten die Temperaturangabe erfolgt ist, und ich glaube, daß sich diese Frage der Studierende, der erst in die physikalische Wissenschaft eindringen will, ebenfalls vorlegen wird, so daß es jedenfalls gut wäre, den Grund der Temperaturangabe bei den flüssigen Körpern zuzufügen. Da sich späterhin bei der Besprechung des Archimedischen Prinzips eine weitere Tabelle nicht findet, so dürfte es vielleicht auch ganz angebracht sein, den Umfang dieser Tabelle etwas zu vergrößern und die Körper nach dem Schema:

1. Metalle, 2. einige feste Körper und 3. einige Flüssigkeiten

zu ordnen. Der Mechanik, dem zweifellos wichtigsten Teile der Physik, der seiner vielen mathematischen Begriffe halber gewöhnlich nicht dem Studierenden zur größten Freude gereicht, ist ein recht breiter Raum gewidmet, und es sind die einzelnen Sätze so dargestellt, daß man sich mit Vergnügen mit ihnen beschäftigt. Auf Seite 47 findet sich bei der Besprechung der Reibung ein Fall, wo die Last auf Räder gesetzt wird und nun nach den Reibungsgesetzen die geringere auftretende Reibung berechnet werden soll. Mit der Art, wie der Herr Verfasser diesen Fall behandelt, bin ich nicht ganz einverstanden, weil sie zu Unklarheiten Veranlassung geben kann, und ich möchte mir statt dessen folgenden Vorschlag erlauben: Der Satz beginnt: „Ist (W) der Weg, den die Last zurücklegt, und (R) die Kraft der Reibung beim Gleiten, so ist die Arbeit, die gegen die Reibung geleistet werden muß, $R \times W$. Befindet sich aber die Last auf Rädern, so wird, während die Last mit dem Rade den Weg W zurücklegt

die Achse sich in ihrem Lager nur um den Weg $W \times \frac{A}{r}$ verschieben, wo A der Achsendurchmesser im Lager, r der Raddurchmesser ist. Bei gleichen Reibungskoeffizienten ist dann aber die nötige Arbeit $R \times W \times \frac{A}{r}$. Dadurch, daß man zwischen die reibenden Flächen ein Schmiermittel bringt, setzt man die Reibung noch bedeutend herunter. Soll die gleitende Reibung noch weiter vermindert werden, so lagert man die Achse zwischen zwei sogenannten Friktionsrädern, d. h. man wiederholt den ersten Vorgang noch einmal. Vollkommen beseitigt ist die gleitende Reibung bei den heute viel verwendeten Kugellagern, bei denen ein Kranz von harten Kugeln zwischen Achse und Lagerschale umläuft.

Die elastischen und molekularen Eigenschaften der Körper bieten in ihrer Behandlung nichts besonders Neues. Auch möchte ich bei dieser Gelegenheit noch darauf aufmerksam machen, daß auf Seite 117, Fig. 82 falsch herumgedruckt ist. Auf Seite 127 scheinen mir die Turbinen etwas sehr stiefmütterlich behandelt zu sein, die wohl namentlich den alten Wasserrädern gegenüber bei ihrer heutigen Wichtigkeit etwas mehr Raum und unter Beifügung einer Abbildung eine etwas eingehendere Erklärung beanspruchen könnten. Auf Seite 150 werden nach dem Barometer die Quecksilber-Luftpumpen besprochen und als erste die Geißlersche Pumpe. Die Abbildung Nr. 115, die eine solche Pumpe darstellt, ist unter Weglassung einiger Teile dem Müller-Pouillet mit geringer Abänderung entnommen, dabei aber nicht verbessert. Es müßte gerade bei einem solchen Lehrbuche, wie dem hier vorliegenden, von seiten des Verlages alle Sorgfalt auf gute und richtige Abbildungen gelegt werden. Im Müller-Pouillet ist die Anordnung des Hahnes zum Rezipienten sinngemäß und richtig angegeben, während aus dieser Abbildung, wenn überhaupt etwas daraus zu entnehmen ist, jedenfalls nur Falsches entnommen werden kann. Auf Seite 153 wird die Wasserluftpumpe von Bunsen besprochen. Die Besprechung, die nur sehr kurz gehalten ist, gibt nicht mit genügender Schärfe das Wesentliche des Konstruktionsprinzips. In der Abbildung ist eine Verengerung 0 gezeichnet. Die Abbildung ist auch wieder dem Müller-Pouillet entnommen, wo sich übrigens derselbe Mangel in der Beschreibung befindet. Jedenfalls gibt die Erklärung das Prinzip der Pumpe nicht richtig an, denn das ganze Wesentliche liegt eben in jener Einschnürung 0. Der Vergleich der Sprengelpumpe mit der Wasserluftpumpe, der ganz verfehlt ist, sollte doch endlich einmal unterlassen werden; dann wären der letzteren einige Zeilen zu widmen. In der Akustik sind auch wieder Abbildungen, die sich der Verlag, wie die Nummern 138, 139 und 145 nicht gerade zur Ehre anrechnen kann. Wenigstens kann ich bei meinem Exemplare in dem vollkommen schwarzen Felde nur mit großer Mühe irgend eine Zeichnung erkennen. Auf Seite 244 bei der Beschreibung des Phonographen bin ich auch mit dem Herrn Verfasser nicht ganz einverstanden. Vor allen Dingen muß der Phonograph von Edison und das Grammophon von Berliner vollkommen auseinander gehalten werden. Beim Phonographen pflanzt sich direkt resp. mit einfacher Hebelübersetzung die hin- und hergehende Bewegung des Abnahmestiftes auf die Membran fort. Beim Grammophon dagegen muß durch Winkelhebelübersetzung die Bewegung

des Führungsstiftes, die zunächst parallel der Membran erfolgt, in eine um 90 Grad gedrehte Bewegung versetzt werden. Beim Phonographen schneidet der Aufnahmestift, der zu einem scharfen Drehmeißel angeschliffen ist, eine tiefe Rille in den Wachszylinder hinein. Durch die Schwingungen der Membran wird die Schnitttiefe verändert, der nachher in der Rille laufende kugelförmige Abgabestift folgt diesen Erhöhungen und Vertiefungen. Beim Grammophon werden dagegen Wellenlinien auf eine Metallplatte, die mit Kupferstecherfirnis überzogen ist, aufgeschrieben. Diese Wellenlinien werden eingeätzt. Dadurch ermöglicht die Metallplatte entweder die direkte Wiedergabe der Sprache oder aber ihre Vervielfältigung durch irgend einen Umdruck.

Bei der Optik ist in der geometrischen Optik nach Besprechung der Reflexionsgesetze der Gang der Lichtstrahlen durch optische Mittel beschrieben, und zwar ist zunächst dabei die Annahme gemacht, es handele sich um einfarbiges Licht. Dabei wird aber diese Annahme nicht konsequent durchgeführt, indem mit einem Male, z. B. im § 368, die Konstruktion eines Dispersionsprismas beschrieben wird; an einer anderen Stelle dagegen, wo die Dispersion zur Erklärung einer Konstruktion wirklich notwendig wäre, d. h. im Falle der Achromatisierung eines Linsensystems, wird die Dispersion als unbekannt vorausgesetzt und die Korrektion als lediglich zur Hebung der sphärischen Abweichung erfolgt angeführt. Das scheint mir doch ein wenig richtiges Vorgehen zu sein und vor allen Dingen die historische Entwicklung der Korrektion zu verletzen. In erster Linie hatte sich nämlich die Farbenabweichung bei der Abbildung durch Linsen störend bemerkbar gemacht. Ihre Korrektion konnte nur durch Wahl einer positiven und negativen Linse aus verschieden zerstreuendem Glase erfolgen. Daß man gleichzeitig dabei die sphärische Abweichung beseitigen kann, ist eine sehr angenehme Zugabe. Jedenfalls bedingt aber die Korrektion der sphärischen Abweichung nur geeignete Verhältnisse der Linsenradien, nicht aber verschieden dispergierende Gläser. Infolgedessen wäre es wohl angebracht, im Kapitel 1 die Dispersion zunächst zu behandeln. Die praktischen Nutzanwendungen, wie Spektralanalyse usw., können ohnehin später folgen. Auf Seite 289 findet sich eine Beschreibung der Photographie, die wohl in demselben Raume wesentlich deutlicher und klarer gefaßt sein könnte, wenn Wiederholungen, die darin sind, vermieden würden. Schließlich wäre es auch recht angebracht, bei der Angabe von Entwicklern und von Verstärkern nicht gerade solche Verfahren zu wählen, die früher im nassen Kollodiumverfahren üblich waren, namentlich dann nicht, wenn man speziell von Trockenplatten spricht. Endlich ist im letzten Abschnitte mir wieder einiges aufgefallen, was aber auch wieder wesentlich Schuld der Verlagsbuchhandlung ist. Als ich auf Seite 454 die Hertzschen Versuche durchsah, versuchte ich vergebens aus der Abbildung die Einrichtung, die Hertz benutzt hatte, mir verständlich zu machen. Die Originalabbildung Nr. 24 auf Seite 104 der Hertzschen Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft ist auch nicht gerade hervorragend, aber jedenfalls doch klar und verständlich. Bei dieser Fig. 267 dagegen hat man den Eindruck, daß der Resonator mit dem Oszillator aus einem Stücke bestände, während in der Originalabbildung deutlich zwei gesonderte Teile gezeichnet sind. Auch die richtige Perspektive der Originalabbildung ist in der Reproduktion verloren

gegangen. Zur besseren Klarheit könnte es gar nicht schaden, wenn die schematische Art der Darstellung durch eine vernünftige Zeichnung ersetzt würde. Das Gleiche gilt von den Figuren 272 und 274, die in jeder Beziehung unrichtig gezeichnet sind.

Ich würde mich freuen, wenn in einer neuen Auflage, die ich dem Werke recht bald wünsche, namentlich von seiten des Verlages, die erwähnten Fehler beseitigt werden, um das Buch auch äußerlich so auszustatten, wie es seinem inneren Werte angemessen ist.

Berlin. H. Boas, Ingenieur.

Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage 20. Februar 1904. Leipzig 1904, Barth. 930 S. *M*. 18.

Der gemeinsame Aufruf der österreichischen Physiker, zum sechzigsten Geburtstage L. Boltzmanns einen Beitrag für eine Festschrift zu liefern, fand nicht nur bei den deutschen Kollegen, sondern bei den Gelehrten der ganzen Welt einen lebhaften Beifall. Ein erfreulicher Beweis für die dem Jubilar gezollte Verehrung ist der vorliegende stattliche Jubelband mit 117 Abhandlungen.

Daß aber die Festschrift auch ihren eigentlichen Zweck erreicht, erkennt man schon beim Durchlesen der Titel, insofern als eine stattliche Reihe von Abhandlungen direkt an die grundlegenden Arbeiten Boltzmanns anknüpfen.

Meines Erachtens ist eine der fruchtreichsten Leistungen des Jubilars, die Bedeutung des Maxwell-Bartolischen Ätherdruckes für die Strahlungstheorie klar erkannt und mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie das Fundamentalgesetz der schwarzen Strahlung abgeleitet zu haben. Man darf wohl behaupten, daß diese Tat Boltzmanns die überraschenden und wichtigen Resultate gezeitigt hat, welche in den Strahlungsgesetzen und in den Gesetzmäßigkeiten der berühmten Kirchhoffschen Funktion ihren Ausdruck gefunden haben.

Dementsprechend begegnen wir einer ganzen Reihe namhafter Physiker, welche das Problem der Strahlung und die damit innig zusammenhängende Theorie des Elektrons behandeln. Bei dem Bestreben, das Anwendungsgebiet der schwarzen Strahlung zu erweitern, ist es nicht zu verwundern, daß man auch einmal über das Ziel hinausgeschossen ist und ihre Gesetze auch dort zu verwerten gesucht hat, wo diese vorläufig noch keine Gültigkeit beanspruchen können.

Bekannt ist ferner die Bedeutung der Boltzmannschen Arbeiten über die kinetische Gastheorie und die Hertzschen Gleichungen der Elektrodynamik. Dementsprechend finden sich mehrere Arbeiten, die einzelne Punkte weiter ausführen.

Die übrigen Abhandlungen, welche zu den Boltzmannschen Arbeiten nur in losem Zusammenhang stehen, drücken dem Jubelbande ein individuelles Gepräge auf. Geben sie uns doch durch ihre Mannigfaltigkeit ein interessantes Bild von dem Arbeitsgebiet so vieler ausländischer und deutscher Physiker und führen sie uns vor Augen, was zur Zeit im Vordergrunde des physikalischen Interesses steht.

Charlottenburg. O. Lummer.

M. Brillouin. **Propagation de l'électricité.** Paris 1904, A. Hermann.

Der erste Teil der vorliegenden Vorlesungen ist einer historischen Darlegung der Arbeiten von Cavendish, Ohm, Clausius und Kirchhoff gewidmet. Er ermöglicht es, den zweiten Teil sofort mit der Theorie stationärer Ströme zu eröffnen, um diese dann auf die Bestimmung des Widerstands einiger Leiterformen anzuwenden. Als Beispiel für die Theorie variabler Ströme (ohne Berücksichtigung der Induktion) wird die Ladung eines Kabels eingehend untersucht. Der dritte Teil wendet sich hierauf den Induktionswirkungen veränderlicher Ströme zu. Unter Zugrundelegung des Neumannschen Gesetzes werden die Induktionskoeffizienten von geradlinigen Drähten und von Spulenwicklungen berechnet. Unverständlich erscheint hier Kap. IV. Die durch umständliche Reihenentwicklung in Bipolarkoordinaten bestimmte Funktion ist in aller Strenge das logarithmische Potential zweier Kreisflächen (vgl. dagegen art. 208), und der schließliche komplizierte Mittelwert von pag. 207 ist einfach $= \frac{1}{2} + \log \frac{c^2}{a_1^2}$, wenn zuvor durch Addition einer Konstanten zu F noch die Bedingung $F_\infty = 0$ (vgl. art. 227, wo für das Unendliche $\varrho = 0$ statt $\varrho = 0$ und $\alpha = 0$ gesetzt ist) erfüllt wird. — Den Schluß bildet eine ausführliche Untersuchung der Elektrizitätsbewegung in einem Drahte, also die Diskussion der Telegraphengleichung. Der vierte Teil hat die Theorie der elektrischen Schwingungen zum Gegenstand. Zuerst werden die Helmholtzschen Feldgleichungen aus dem allgemeinen Induktionsgesetze hergeleitet, unter prinzipieller Vermeidung einer Theorie der Dielektrika. Daher folgen dann die Maxwellschen Gleichungen nicht als Spezialfälle jener, sondern werden aus ihnen einfach durch Abänderung gewisser Glieder erhalten. Eine detaillierte Theorie des ungedämpft, wie auch des gedämpft schwingenden Dipols liefert eine erste Anwendung der Maxwellschen Gleichungen. Die zweite Anwendung bildet die Betrachtung der elektrischen Schwingungen der Kugel und des verlängerten Rotationsellipsoides. Die Behandlung des letzteren hat nur für geringe Exzentrizitäten Gültigkeit; trotzdem stimmt die Dämpfungskonstante nadelförmiger Ellipsoide noch einigermaßen mit den Abrahamschen Werten überein.

Göttingen. G. Herglotz.

Giovanni Giorgi. **Unità razionali di elettromagnetismo.** Napoli 1901. (Estratto dal Nr. 24 Anno 1901 dell'Ingegneria Moderna).

— **Il sistema assoluto M. Kg. S.** Roma 1903. (Estratto dall' Elettricista, 1° Novembre 1902).

Der Verfasser befürwortet ein Maßsystem, das mit dem sogenannten „technischen“ Maßsystem der Maschineningenieure in der Längeneinheit und Zeiteinheit übereinstimmt (Meter und Sekunde), als Masseneinheit jedoch nicht 9.81 kg, sondern nur 1 kg hat. Die *elektrischen* Einheiten *dieses* Maßsystems stimmen mit den jetzigen sogenannten „praktischen“ Einheiten: Volt, Amp., . . . überein, wenn man das Coulombsche Gesetz für Elektrizität so schreibt:

$$4\pi r^2 \cdot f = \frac{4\pi v^2}{10^7} e e'$$

($v = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{\text{sek}}$ = Lichtgeschwindigkeit) oder

$$\frac{r^2 f}{ee'} = 9 \cdot 10^9 \frac{m^2}{\text{sek}^2}.$$

Um außerdem den Faktor 4π aus den *elektromagnetischen* Gleichungen zu beseitigen, wird im Anschluß an Fessenden vorgeschlagen, die *magnetischen* Einheiten durch folgende Schreibung des Coulombschen Gesetzes für Magnetismus zu definieren:

$$4\pi r^2 \cdot f = \frac{10^7}{4\pi} mm'$$

(und *nicht* nach Analogie der sogenannten „absoluten" Maßsysteme

$$4\pi r^2 \cdot f = 4\pi \cdot 10^7 mm'.)$$

Der Vorteil dieser Festsetzungen besteht darin, daß ein Maßsystem entsteht, das sich einerseits auch in den Anwendungen auf Mechanik, Elektrizität und Magnetismus *numerisch bequem konsequent durchführen* läßt, und das sich andrerseits den in der Technik eingebürgerten Einheiten fast vollkommen anschmiegt.

Berlin. Fritz Emde, Ingenieur.

B. Weinstein. Einleitung in die höhere mathematische Physik. Mit 12 in den Text gedruckten Figuren. XVI u. 399 S. Berlin 1901, Ferd. Dümmler.

Das Buch gibt eine gedrängte Übersicht über das gesamte Gebiet der mathematischen Physik. Wie im Vorwort bemerkt wird, ist es „nicht allein für Lernende, sondern auch für Lehrende geschrieben"; indessen erscheint die Lektüre des Werkes doch weniger für Lernende als für Lehrende geeignet. Denn die äußerst knappe Art, in welcher das umfangreiche Thema behandelt wird, dürfte wohl nur solchen Lesern genügen, die sich mit dem dargestellten Gegenstande bereits ziemlich eingehend vertraut gemacht haben. Für diese mag das Buch, als eine Art Repetitorium, immerhin von einigem Nutzen sein.

„Mit ganz besonderer Sorgfalt", so heißt es ferner im Vorwort, „sind die Grundlagen einer jeden Theorie behandelt, der ganze erste Abschnitt des Buches beschäftigt sich mit diesen Grundlagen und setzt ihren naturphilosophischen und praktischen Wert auseinander. Der Verfasser hofft, daß gerade dieser Abschnitt willkommen sein wird; denn, so seltsam es klingt, auf eine hinreichende Durchdringung der Grundlagen wird auch gegenwärtig immer noch nicht recht geachtet." Leider muß Referent bekennen, daß gerade diese Erörterungen über die Grundlagen und den erkenntnistheoretischen Inhalt der physikalischen Begriffe fast nirgends befriedigen. Insbesondere muß man den Ausführungen jenes ersten Abschnittes — der den Titel trägt: „Gegenstand der mathematischen Physik und Grundlagen derselben" — fast auf jeder Seite widersprechen, und sehr häufig entbehrt die Ausdrucksweise des Verfassers der erforderlichen Präzision. Zur Begründung dieses Urteils seien einige Beispiele angeführt:

In der Diskussion des Raumbegriffes wird gesagt: „Die drei Abmessungen des Raumes sind gerade oder die Lage eines jeden Ortes im Raume ist

vollständig bestimmt, wenn man drei gerade Linien angibt, die in dem Orte zusammenlaufen sollen · · · . *Physikalisch aber folgt* (!), daß Bewegungen, die in unserem Raume in gerader Linie beginnen, durch den Raum selbst nicht gezwungen werden, sich zu krümmen, daß in unserem Raum gerade Bewegung zwanglos geschieht."

Noch merkwürdiger ist der Satz: „Die Zeit ist immer die nämliche". Das Wort „immer" bedeutet doch wohl nichts anderes als „zu allen Zeiten" — also: die Zeit ist zu allen Zeiten die nämliche. An anderer Stelle heißt es ähnlich: „Der Raum ist überall derselbe". Es scheint, daß der Verfasser mit den Worten „der Raum, die Zeit" — die in der Physik doch nichts als abgekürzte Bezeichnungen sind für gewisse Zusammenhänge von Erscheinungen — irrigerweise die Vorstellung von etwas Substantiellem verbindet.

Ferner sei folgender Ausspruch zitiert: „Wollen wir also nicht annehmen, daß die Zeit auf verschiedene Substanzen verschieden wirkt, so bleibt nichts übrig, als vorauszusetzen," (sic!) „daß es überhaupt nicht die Zeit ist, wodurch Veränderungen entstehen, sondern etwas anderes. Wir nennen dieses Andere Ursache und werden bald davon sprechen." Also: es ist nicht die Zeit, sondern die Ursache, wodurch Veränderungen entstehen!

Weiter wird gesagt, „daß in der Zeit jede gleichförmige Bewegung zwanglos geschieht. Man stellt *darum* (!) auch Zeitabschnitte durch gerade Linien dar."

Von der Energie heißt es, sie sei „nichts anderes als das, was wir gewöhnlich mechanische Arbeit nennen. Weil aber der Physiker nach den Erscheinungsklassen verschiedene Arten von Arbeit unterscheiden muß, ist ein Fremdwort als zusammenfassende Bezeichnung bequem."

Auch für die Definitionen der weiteren physikalischen Größen ist größtenteils eine wenig präzise Form gewählt worden.

In der Wärmelehre wird der Begriff der Temperatur zunächst ohne jede Erläuterung angewendet. Später heißt es noch ausdrücklich: „Wir haben für diese Größe ϑ das Wort Temperatur benutzt, ohne zu sagen, wie diese Größe gemessen werden soll. Hierüber läßt sich auch nichts weiter angeben." Trotzdem oder glücklicherweise wird aber in den folgenden Sätzen noch „weiteres hierüber angegeben".

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Darstellung auch im sprachlichen Ausdruck manche Flüchtigkeiten enthält.

Berlin. E. Aschkinass.

Augusto Righi und **Bernhard Dessau. Die Telegraphie ohne Draht.** Mit 258 eingedruckten Abbildungen. XI u. 481 S. Braunschweig 1903, Friedrich Vieweg und Sohn.

„Das Buch über Telegraphie ohne Draht, welches wir hiermit, einer Aufforderung der Verleger Vieweg in Braunschweig und Zanichelli in Bologna folgend, gleichzeitig in deutscher und italienischer Sprache dem Publikum darbieten, erhebt nicht den Anspruch, ein im eigentlichen Sinne wissenschaftliches Werk zu sein. Dasselbe wendet sich an den großen Kreis der allgemein gebildeten Leser. Ihnen will es eine möglichst vollständige Kenntnis der Prinzipien vermitteln, auf denen die von Guglielmo

Marconi geschaffene neue Anwendung der elektrischen Wellen beruht; gleichzeitig will es ihnen die Entwicklung vor Augen führen, welche die Methoden und Hilfsmittel der drahtlosen Telegraphie, Dank dem Scharfsinn Marconis und zahlreicher anderer Erfinder, unter den beständig wachsenden Anforderungen der Praxis genommen haben."

Diese, dem Vorwort entnommenen Sätze kennzeichnen treffend den Charakter des vorliegenden Werkes. Es enthält eine ausführliche Schilderung der Technik der drahtlosen Telegraphie und eine wohlabgerundete, eingehende Auseinandersetzung ihrer physikalischen Grundlagen. Den Verfassern ist die Lösung der Aufgabe, die sie sich gestellt, in ganz vorzüglicher Weise gelungen, so daß die Lektüre des Buches bestens empfohlen werden kann. Da keinerlei fachmännische Vorkenntnisse vorausgesetzt werden, so ist das Werk einem großen Leserkreise zugänglich. Indem aber die Darstellung — unbeschadet ihrer Gemeinverständlichkeit — bis zu den feinsten Einzelheiten des behandelten Gegenstandes vordringt, und überall, wo es am Platze ist, eine wohlerwogene Kritik zu Worte kommen läßt, wird das Studium dieses Buches auch für den Fachmann von großem Werte sein. Der Physiker wird insbesondere seine Freude haben an der eleganten Darstellung der wissenschaftlichen Prinzipien, aus denen jener neue Zweig der Technik emporgewachsen ist.

Der Inhalt des Werkes zerfällt in vier Teile. Der erste gibt eine allgemeine Übersicht über „die elektrischen Erscheinungen" und ist in vier Kapitel gegliedert, die folgendermaßen betitelt sind: 1) Das elektrische Feld, 2) Konstante elektrische Ströme, 3) Das magnetische Feld, 4) Der veränderliche Zustand des Stromes. Der zweite Teil trägt die Überschrift: „Die elektromagnetischen Wellen". Hier werden im ersten Kapitel „die elektrischen Schwingungen" behandelt, soweit dieselben eine strahlenförmige Ausbreitung noch nicht in die Erscheinung treten lassen. An dieser Stelle werden auch ausführlich die Prinzipien der elektrischen Resonanz in höchst anschaulicher Weise besprochen. Das zweite Kapitel behandelt — noch unter vorwiegend physikalischen Gesichtspunkten — „die elektrischen Wellen". Ihre Eigenschaften, sowie die Methoden ihrer Erzeugung und Beobachtung werden dem Leser vorgeführt auf Grund der Untersuchungen, die durch die berühmten Arbeiten von Heinrich Hertz eingeleitet wurden. Bekanntlich hat Herr Righi selbst an dem weiteren Ausbau dieses Forschungsgebietes einen hervorragenden Anteil genommen; demgemäß läßt er auch seinen eigenen diesbezüglichen Untersuchungen eine eingehende Besprechung zu teil werden. Ohne die Bedeutung jener Righischen Arbeiten verkennen zu wollen, mag aber bemerkt werden, daß der Autor sich in dieser Hinsicht doch bisweilen eine größere Beschränkung hätte auferlegen können. So wird z. B. der Righische Oszillator allzu ausführlich in einer großen Zahl von Ausführungsformen vorgeführt, die sich voneinander doch nur durch geringfügige Modifikationen ihrer Konstruktion unterscheiden. Auch in dem Abschnitte, der der „Optik der elektrischen Schwingungen" gewidmet ist — d. h. den Versuchen, in welchen das dem des Lichtes analoge Verhalten der Strahlen elektrischer Kraft zu Tage tritt — werden fast ausschließlich die eigenen Arbeiten Righis berücksichtigt; um von anderen Autoren zu schweigen, so hätten hier doch wenigstens die von Hertz ausgeführten Experimente über prismatische Brechung und über Polarisation durch Gitter erwähnt werden sollen.

Ein besonderer Abschnitt ist den Indikatoren — den Vorrichtungen, die zur Wahrnehmung der elektrischen Wellen dienen — gewidmet. „Alles in allem", heißt es hier, „kennt man heute 22 verschiedene Arten von Indikatoren". Diese Zahl ergibt sich jedoch auf Grund einer ziemlich willkürlichen Beurteilung dessen, was als eine besondere „Art" anzusehen ist. So wird z. B. das von dem Referenten vor zehn Jahren angegebene Beobachtungsmittel — ein Gitter aus Stanniolstreifen — als Indikator besonderer Art aufgeführt, während es doch, wie Referent bald darauf nachweisen konnte, nur eine Ausführungsform des Kohärers darstellt. Unerwähnt geblieben ist übrigens das Dynamobolometer von Paalzow-Rubens.

Entsprechend ihrer Bedeutung für die Telegraphie ohne Draht ist den „Radiokonduktoren" — dieser Bezeichnung bedienen sich die Verfasser nach Branlys Vorschlag für die Kohärer — das ganze dritte Kapitel des zweiten Teiles gewidmet. Nach einer Darlegung der Entdeckungsgeschichte dieses merkwürdigen Indikators werden seine komplizierten Eigenschaften und die an ihm beobachteten Phänomene auf Grund der umfangreichen einschlägigen Literatur ziemlich erschöpfend und sachgemäß besprochen. Auch die verschiedenen Theorien, die für die Wirkungskreise der Kohärer aufgestellt worden sind, werden eingehend diskutiert. Mit Recht werden aber alle bisher gegebenen Erklärungsversuche als unzulänglich bezeichnet, indem das Résumé der Verfasser lautet: „Überblicken wir das Gesagte, so müssen wir bekennen, daß von allen bis jetzt aufgestellten Theorien keine einzige die Erscheinung der Radiokonduktoren vollständig zu erklären vermag".

In dem nun folgenden dritten Teile — „die elektrische Telegraphie ohne Draht" — wenden sich die Verfasser zu dem eigentlichen Thema des Buches. Das einleitende erste Kapitel handelt von der „Telegraphie durch Leitung", — d. h. drahtlose Leitung durch den Erdboden oder durch Gewässer — „durch elektrostatische Influenz und durch Induktion". Die Titel der weiteren Kapitel lauten: 2) „Die Telegraphie vermittels elektrischer Wellen." 3) „Die Apparate der drahtlosen Telegraphie zwischen zwei Stationen". 4) „Mehrfache und abgestimmte Telegraphie". Die Bearbeitung dieser Kapitel ist auf Grund eingehender Kenntnisnahme der zahlreichen neueren Publikationen und Patentschriften erfolgt, und es sei rühmend hervorgehoben, daß auf Grund dieser umfassenden Literaturkenntnis allenthalben eine kritische und gerechte Würdigung der Bedeutung und des Wertes der einzelnen Leistungen stattgefunden hat. Dieses Verfahren war hier um so mehr geboten, als eine große Zahl der auf diesem Gebiete publizierten Erfindungsideen noch nicht die Probe des Versuches bestanden hat oder gar von vornherein den Stempel der praktischen Unausführbarkeit an der Stirne trägt. Durchaus begründet ist auch die Skepsis der Verfasser in ihrer Stellungnahme zu der Frage der Abstimmung funkentelegraphischer Stationen. Schon im zweiten Teile wird diese Frage gestreift und in zutreffender Weise auf die physikalische Unmöglichkeit einer vollständigen Lösung dieses Problems auf dem bisher betretenen Wege hingewiesen — mit Recht wird nämlich betont, daß ein Oszillator, der beträchtliche Energiemengen ausstrahlt, gerade infolge der hierdurch bedingten starken Dämpfung der Schwingungen eine scharfe Resonanz des Empfängers unmöglich werden läßt — und in diesem dritten Teile begegnet man gegenüber den seitens der Erfinder immer wieder aufgestellten Behauptungen, daß ihnen die Lösung jener Auf-

gabe geglückt sei, stets dem Ausdruck eines wohlbegründeten Zweifels. Auch der Referent teilt in dieser Hinsicht durchaus den Standpunkt der Verfasser, da die spärlichen Versuche, welche überhaupt zur Prüfung des angeblichen Vorhandenseins einer Abstimmung von Geber und Sender ausgeführt worden sind, niemals einwandsfrei ausgeführt wurden oder gänzlich der Beweiskraft ermangeln. In der Regel begnügten sich die Erfinder mit der bloßen Versicherung, daß mit ihren „Systemen" die Lösung des genannten Problems gelänge.

Vollste Anerkennung verdient weiterhin die Objektivität, deren sich die Verfasser befleißigen bei der Würdigung der einzelnen Leistungen, durch welche die Entwicklung der Funkentelegraphie gefördert wurde. Bekanntlich sind auf dem Felde dieses neuerschlossenen technischen Gebietes schon heiße Prioritätsschlachten geschlagen worden. Die Verfasser sind stets bemüht, den Ansprüchen der verschiedenen Parteien durch sorgfältige Beobachtung der bezüglichen Publikationsdaten gerecht zu werden. Über die bahnbrechende Leistung Marconis selbst wird sehr treffend folgendermaßen geurteilt: „.... In den wesentlichen Einzelheiten seiner Apparate kann also Marconi auf Priorität keinen Anspruch machen .... Sein unbestreitbares Verdienst bleibt es aber, daß er eine tatkräftige Initiative entfaltet hat, wo andere nicht über schüchterne Vorschläge oder tastende Versuche hinausgekommen waren, und daß er sofort und mit kühnem Griffe aufs praktische Gebiet übertragen hat, was anderen nur unbestimmt vorgeschwebt oder zu bescheidenen Experimenten gedient hatte. In vollem Umfange offenbart sich seine Erfindergabe sodann in der Besiegung zahlloser praktischer Schwierigkeiten und in einer Menge von Einzelheiten und Ergänzungen, die, so unbedeutend auch manche von ihnen für sich genommen erscheinen mag, doch für den praktischen Erfolg ungemein wesentlich sind."

Mit der gleichen Sachlichkeit werden auch die Verdienste von Lodge, Braun, Slaby-Arco etc. gewürdigt. Hierzu möchte sich Referent noch folgende Bemerkungen erlauben bezüglich einer Bezeichnungsweise, die sich leider schon allgemein eingebürgert hat, aber doch geeignet ist, die wahre Bedeutung der Leistungen der einzelnen Erfinder in eine schiefe Beleuchtung zu rücken: Man spricht bekanntlich von einem „System" Marconi und daneben von anderen „Systemen" der drahtlosen Funkentelegraphie. In Wahrheit gibt es aber nur *ein* solches „System", und dies ist allein an den Namen Marconis geknüpft. Dieses „System" benützen auch alle anderen Erfinder. An der Schaltungsweise und an speziellen Anordnungen, die ursprünglich von Marconi gewählt waren, haben sie Veränderungen vorgenommen, die gewiß vielfach auch Verbesserungen darstellen mögen, aber den prinzipiellen Teil der Marconischen Erfindung unberührt gelassen haben. Im Grunde handelt es sich doch höchstens nur um Vervollkommnungen, wie sie die fortschreitende Erfahrung der Praxis bei der weiteren Ausgestaltung einer Erfindung allenthalben zu zeitigen pflegt, und wie sie auch von Marconi selbst in mannigfacher Weise an seinen ursprünglichen Schaltungsarten vorgenommen worden sind.

Der vierte und letzte Teil des Werkes behandelt noch die „drahtlose Telegraphie mit Hilfe des Lichts und der ultravioletten Schwingungen", einschließlich der drahtlosen Telegraphie mittels des tönenden und lauschenden Lichtbogens. In diesem Abschnitt werden auch die Untersuchungen der

photoelektrischen Phänomene geschildert, die von der bedeutungsvolle[n] Hertzschen Entdeckung über den Einfluß des ultravioletten Lichtes auf di[e] Funkenentladung ihren Ausgang nahmen. Irrtümlicherweise charakterisiere[n] die Verfasser wiederholentlich jenen von **Hertz** beobachteten Effekt als ein[e] Herabsetzung des Entladungspotentials, während doch von **Warburg** nac[h]gewiesen ist, daß durch die kurzwelligen Strahlen keineswegs das Funke[n]potential erniedrigt, sondern vielmehr die sogenannte Verzögerung aufgehob[en] wird. Im übrigen tritt uns aber auch aus den letzten Kapiteln die e[in]dringende und umfassende Sachkenntnis sowie die hervorragende Darstellun[gs]kunst der Verfasser entgegen, durch welche es ihnen gelungen ist, ein W[erk] zu schaffen, das als eine schätzenswerte Bereicherung unserer physikalis[ch-]technischen Literatur gerühmt zu werden verdient.

Berlin. E. Aschkinass.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. Erster Band. Übersetzt von H. Pflaum. Mit 412 eingedruckten Abbildungen. XX u. 791 S. Braunschweig 1902, Friedrich Vieweg und Sohn.

Aus der trüben Flut der leidigen Massenproduktion physikalischer Unterrichtsbücher taucht nur hin und wieder einmal ein Werk hervor, das als ein wirklicher, wertvoller Gewinn unserer wissenschaftlichen Literatur bezeichnet werden kann. Zu den seltenen erfreulichen Erscheinungen dieser Art gehört der in deutscher Übersetzung vorliegende erste Band des Lehrbuches der Physik von O. D. **Chwolson**, Professor an der Universität zu St. Petersburg. Vor allen Dingen sei rühmend hervorgehoben, daß es dem Verfasser mit glücklichem Erfolge gelungen ist, sich in mannigfacher Hinsicht von dem altgewohnten Schema solcher Werke loszusagen. Sowohl in der Anordnung wie in der Darstellung des behandelten Stoffes tritt diese Originalität vielfach in die Erscheinung. Wir haben hier eine wirklich selbständige Arbeit vor uns, und fast jede Seite des Buches läßt erkennen, daß der Verfasser sich nicht mit einer bloßen Wiedergabe des überlieferten Stoffes nach überkommenem Schema begnügt, sondern sein umfangreiches Material für den vorliegenden Zweck erst innerlich verarbeitet hat.

Der gesamte Inhalt ist in sechs Abschnitte gegliedert: 1. *Einleitung*, 2. *Mechanik*, 3. *Meßapparate und Meßmethoden*, 4. *Lehre von den Gasen*, 5. *Lehre von den Flüssigkeiten*, 6. *Lehre von den festen Körpern*. — Mit Recht werden in der Einleitung die erkenntnistheoretischen Prinzipien, die der physikalischen Wissenschaft zugrunde liegen, ziemlich eingehend erörtert, und auch weiterhin werden stets mit besonderer Sorgfalt die begrifflichen Fundamente der Definitionen und physikalischen Größen klargelegt.

Die Mechanik wird in neun Kapiteln besprochen, deren erstes rein kinematisch „*von der Bewegung*" handelt. Das zweite Kapitel ist betitelt: „*von der Kraft*"; seltsamerweise vermißt man hier vollständig die Gesetze der Statik. Im dritten Kapitel beschäftigt sich der Verfasser mit der „*Arbeit und Energie*"; die diesbezüglichen Auseinandersetzungen sind nach Ansicht des Referenten stellenweise weniger gut gelungen; insbesondere werden nicht immer streng genug Tatsachen von Hypothesen geschieden. Durchaus angebracht erscheint es aber, daß in diesem Abschnitte über Mechanik in dem folgenden vierten und fünften Kapitel bereits „*die harmo-*

nische Schwingungsbewegung" und die „*strahlende Ausbreitung von Schwin-gungen*" behandelt werden. Hier finden sich auch schon die Gesetze der Interferenz, Reflexion, Brechung, Huygenssches und Dopplersches Prinzip usw. Es folgen die weiteren Kapitel: 6. *Von der allgemeinen Gravitation*, 7. *Elemente der Potentialtheorie*, 8. *Von der Schwerkraft*, 9. *Von den Dimensionen physikalischer Größen*. Diese neun Kapitel über Mechanik füllen fast ein Drittel des ganzen Bandes aus. Warum ist aber die Rotationsbewegung so stiefmütterlich behandelt? Man sucht vergeblich nach einer Besprechung der Kreiselbewegung, selbst der Foucaultsche Pendelversuch bleibt unerwähnt.

Der dritte Abschnitt zerfällt gleichfalls in neun Kapitel: 1. *Allgemeine Bemerkungen über physikalische Messungen*. 2. *Einige Hilfsapparate*. 3. *Messungen von Längen und Flächen*. 4. *Messung von Winkeln*. 5. *Messung des Volumens*. 6. *Messung von Kräften und Massen*. 7. *Messung der Zeit*. 8. *Messung der Intensität der Schwerkraft*. 9. *Messung der mittleren Erddichte*. — Der vierte Abschnitt, die Lehre von den Gasen, behandelt: 1. *Dichte der Gase*. 2. *Spannung der Gase*. 3. *Barometer, Manometer und Pumpen*. 4. *Berührung von Gasen mit Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern*. 5. *Grundlagen der kinetischen Gastheorie*. 6. *Gase im Zustande der Bewegung und des Zerfalles*. Hieran schließen sich die zehn Kapitel des fünften Abschnitts: 1. *Grundeigenschaften und Bau der Flüssigkeiten*. 2. *Dichte der Flüssigkeiten*. 3. *Kompressibilität der Flüssigkeiten*. 4. *Oberflächenspannung der Flüssigkeiten*. 5. *Erscheinungen der Adhäsion und Kapillarität*. 6. *Lösungen von festen und flüssigen Körpern*. 7. *Diffusion und Osmose*. 8. *Reibung im Inneren der Flüssigkeiten*. 9. *Bewegung der Flüssigkeiten*. 10. *Kolloide*. In dem vorletzten dieser Kapitel wäre wohl eine etwas ausführlichere Darstellung am Platze gewesen. Im Vergleiche zu der Reichhaltigkeit anderer Kapitel erscheinen die Auseinandersetzungen über die Hydrodynamik auf jenen zwölf Seiten doch etwas dürftig. — Den Schluß bildet die Lehre von den festen Körpern: 1. *Die Materie im festen Zustande*. 2. *Dichte der festen Körper*. 3. *Deformationen eines festen Körpers*. 4. *Reibung und Stoß fester Körper*.

Das Werk ist in russischer Sprache zuerst im Jahre 1897 erschienen. Der deutschen Ausgabe, um deren Zustandekommen sich Herr Prof. Eilhard Wiedemann bemüht hat, wurde die zweite Auflage des russischen Originals zugrunde gelegt; doch sind allenthalben noch zahlreiche Änderungen und Ergänzungen eingefügt worden. Die Übersetzung des Werkes — von H. Pflaum in Riga — liest sich ganz vortrefflich; an einigen, wenn auch nicht zahlreichen, Stellen hätte noch die Verwendung von russischen Maßeinheiten ausgemerzt werden sollen. Die Literatur ist überall bis zum Jahre 1901 berücksichtigt worden. Am Ende eines jeden Kapitels finden sich zweckmäßig zusammengestellte Verzeichnisse der wichtigsten einschlägigen Spezialwerke und Originalabhandlungen. Sach- und Namenregister, schöner Druck und übersichtliche Figuren vervollständigen den Wert des ausgezeichneten Buches.

Es ist nur zu wünschen, daß die Erwartung sich erfülle, die Herr Prof. Wiedemann in einem vorgedruckten Geleitwort zum Ausdruck bringt: daß das Chwolsonsche Werk sich neben den besten der vorhandenen Lehrbücher auch in deutschen Leserkreisen einen Platz erobern möge.

Berlin. E. Aschkinass.

Kundt, A., Vorlesungen über Experimentalphysik, herausgegeben von K. Scheel. Mit dem Bildnis Kundts, 534 Abbildungen und einer farbigen Spektraltafel. XXIV u. 852 S. Braunschweig 1903, Friedrich Vieweg und Sohn.

Die zahlreichen Schüler Kundts werden das Erscheinen der Vorlesungen ihres verehrten Lehrers sicherlich mit Freuden begrüßen, ruft doch die Lektüre dieser Blätter wieder die Erinnerung wach an jene köstlichen Stunden, in denen der allzu früh dahingeschiedene Meister durch seine glänzende Vortragskunst die Schar seiner Hörer für die physikalische Wissenschaft zu begeistern verstand. Der eigenartige Reiz, der den Kundtschen Vorlesungen innewohnte, entsprang dem Zauber seiner gewinnenden Persönlichkeit und der inneren Freudigkeit, mit der er sein Thema zu behandeln pflegte. Hierzu kam die lichtvolle Klarheit und geistreiche Eleganz seiner Darstellung in Verbindung mit einer vollendeten Sicherheit im Experimentieren.

In der vorliegenden Form sind die Vorlesungen im Wintersemester 1888/89 und Sommersemester 1889 gehalten worden. Das Buch stellt im wesentlichen den Abdruck einer Nachschrift dar, welche auf Kundts eigene Veranlassung damals angefertigt wurde. So konnte dem Werke die Originalität der Kundtschen Vortragsweise gewahrt bleiben dank der pietätvollen Art, mit der sich der Herausgeber der druckfertigen Ausgestaltung des Manuskriptes unterzogen hat.

Das Bestreben, den ursprünglichen Charakter der Vorlesungen ungeändert zu erhalten, hat den Herausgeber leider auch veranlaßt, von einer Ergänzung des Textes durch Einfügung der in den letzten 14 Jahren neu gewonnenen Forschungsergebnisse abzusehen. Es ist auf das lebhafteste zu bedauern, daß das Werk auf diese Weise nicht zu einem vollständigen Lehrbuche der Physik ausgestaltet wurde, sondern nunmehr ein Torso werden mußte. Die Pietät gegen den Autor wäre keineswegs verletzt worden, wenn an geeigneten Stellen Einschaltungen vorgenommen worden wären — sie hätten durch kleineren Druck als solche kenntlich gemacht werden können —, in denen die Fortschritte der Wissenschaft Berücksichtigung gefunden hätten. Wäre diesem Verfahren der Vorzug gegeben worden, so würde man gerade dem Anfänger — Kundt hielt ja diese Vorlesungen für Studierende der ersten Semester — das Studium des vorliegenden Werkes aufs wärmste empfehlen müssen. Nun aber wird ihm an zahlreichen Stellen ein nur mangelhaftes Bild von dem gegenwärtigen Stande der physikalischen Wissenschaft dargeboten. Vergeblich würde er z. B. suchen nach einer Schilderung der Hertzschen Arbeiten über die Ausbreitung der elektrischen Kraft, nach einer Darstellung der Prinzipien der Faraday-Maxwellschen Theorie, und noch vieles andere, wie Röntgenstrahlen, allgemeine Gesetze der Temperaturstrahlung, Elektronentheorie, Becquerelstrahlen usw. würde er gänzlich vermissen. Unter diesen Umständen muß man leider befürchten, daß dem Buche nur ein sehr beschränkter Leserkreis beschieden sein wird.

Die Anordnung des Stoffes ist die allgemein übliche: im Wintersemester pflegte Kundt die Mechanik, Akustik und Wärmelehre vorzutragen, während Elektrizität und Magnetismus sowie Optik das Thema des Sommersemesters bildeten. Dem Texte ist noch ein kurzer Abriß über Kundts „Leben und Wirksamkeit" vorangestellt, dessen Wortlaut sich z. T. an die von

/. v. Bezold im Jahre 1894 in der Berliner Physikalischen Gesellschaft
ehaltene Gedächtnisrede anlehnt. Die Hauptaufgabe des Herausgebers
estand in der Einfügung passender Figuren, deren Auswahl im großen und
nzen in zweckentsprechender Weise getroffen wurde. Nur in der „Hand-
alerei", für die der Viewegsche Verlag ja stets eine besondere Vorliebe zu
ben scheint, hätte man sich einige Beschränkung auferlegen sollen. Es
äre doch sehr zu wünschen, daß die vielen Hände mit den schlecht
tzenden Ärmeln endlich einmal aus den Figuren unserer Lehrbücher ver-
hwänden.

Berlin. E. Aschkinass.

---

feiffer, E., Physikalisches Praktikum für Anfänger. Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. VIII u. 150 S. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

In diesem Leitfaden werden 25 elementare Praktikumsaufgaben aus der
echanik, Wärmelehre, Elektrizität und Optik behandelt. Die Darstellung
ht in pedantischer Weise außerordentlich in die Breite und wirkt hier-
ırch sehr ermüdend, um so mehr als sich die gegebenen Anweisungen
elfach auf ganz spezielle Konstruktionstypen der Apparate beziehen.

Das Buch ist hervorgegangen aus dem Bedürfnis des Verfassers, den
chülern der K. Industrieschule zu München, an welcher er seit einer Reihe
on Jahren den Physikunterricht erteilt, für ihre praktischen Arbeiten im
aboratorium einen gedruckten Leitfaden zur Verfügung zu stellen. Bisher
enten diesem Zwecke, wie uns in der fünf Seiten langen Vorrede mit-
teilt wird, vom Verfasser selbst geschriebene Heftchen, die dem Schüler
die Hand gegeben wurden und deren Inhalt ohne wesentliche Änderungen
dem vorliegenden Bande vereinigt worden ist. Hätten jene Heftchen
ht auch fernerhin für den Unterricht an der genannten Anstalt genügt?
weitere Kreise dürfte wohl kaum „ein tief gefühltes Bedürfnis" vor-
en, dem durch diese Publikation hätte abgeholfen werden müssen.

Berlin. E. Aschkinass.

ıer, F. und Haschek, E., Wellenlängen-Tabellen für spektral-ınalytische Untersuchungen auf Grund der ultravioletten Bogen-pektren der Elemente. 2 Bände. II u. 89 u. 213 S. Leipzig und Vien 1904, Franz Deuticke.

Die Verfasser haben vor einem Jahre ausführliche Tabellen für die
nlängen der ultravioletten Funkenspektra der Elemente erscheinen lassen;
liese Publikation ist im 6. Bande der 3. Reihe des Archivs, S. 323,
et worden. Sie haben inzwischen auch für die Bogenspektra der-
75 Elemente gleichartige Messungen ausgeführt, deren Resultate in
liegenden zwei Bänden wiedergegeben werden: Die Spektren wurden
nselben Rowlandschen Konkavgitter, das in den früheren Arbeiten
worden war, erzeugt und photographisch fixiert. Die Aufnahmen
wiederum den Wellenlängen-Bereich vom äußersten Ultraviolett
4700 A.-E. und die Ausmessung der Platten geschah gleichfalls
früher angewandten objektiven Methode. Das gesamte Zahlen-

material wird auch wieder zu drei Tabellen vereinigt, die in derselben Weise wie in der älteren Publikation angeordnet sind.

Aus den gewonnenen Daten glauben die Verfasser auf die Existenz einiger bisher noch unbekannter Elemente schließen zu dürfen. Zum Beispiel zeigen Titan und Niob eine Reihe gemeinsamer, mit anderen schon bekannten nicht zu identifizierender Linien, die keinem dieser Elemente selbst zugehören, sondern wahrscheinlich einem bisher noch nicht entdeckten Begleiter derselben, der von den Autoren als Ω_1 bezeichnet wird. Ähnlich weisen Titan und Tantal auf die Existenz eines Elementes Ω_2 hin, Holmium und Erbium auf zwei Elemente X_1 und X_2, Holmium und Gadolinium auf ein solches X_3.

Bei allen untersuchten Elementen waren die Bogenspektren von den Funkenspektren wesentlich verschieden. Bei jeder dieser beiden Arten von Spektren treten nämlich Linien auf, die nur ihr eigentümlich sind. Auch die als beiden Spektren gemeinsam anzusehenden Linien weisen häufig kleine Wellenlängendifferenzen gegeneinander auf und zeigen vor allem vielfach große Unterschiede in ihren Intensitätsverhältnissen. Ferner ist die Linienzahl eines Elementes im Bogen immer kleiner als im Funken, und das Spektrum des ersteren erstreckt sich weniger weit ins äußerste Ultraviolett als das des letzteren. Freilich ist es nicht möglich, in diesen Eigentümlichkeiten beider Spektrengattungen eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen, da die Linienzahl des Bogens im Ultraviolett zunimmt, sobald man die Stromstärke steigert. Die Verfasser haben ihre sämtlichen Messungen bei einer Stromintensität von 10 Amp. ausgeführt.

Wie die Tabellen der Funkenspektra, so lassen auch die vorliegenden Messungsresultate erkennen, daß die Anzahl der den einzelnen Elementen im Bogenspektrum zugehörigen Linien sich als eine periodische Funktion ihrer Atomgewichte darstellt.

Berlin. E. ASCHKINASS.

Néculcéa, E., Le phénomène de Kerr et les phénomènes électro-optiques. X u. 91 S. Paris 1902, C. Naud.

Eine recht brauchbare und klar geschriebene Monographie — aus der Sammlung „Scientia“ — über das Kerrsche Phänomen der Doppelbrechung im elektrischen Felde. Der erste Teil gibt eine Zusammenstellung der vorliegenden experimentellen Resultate; in dem zweiten Abschnitte werden die einschlägigen theoretischen Untersuchungen von Pockels und von Voigt auseinandergesetzt. Ein abschließender dritter Teil endlich ist der Diskussion eines dem magneto-optischen Zeeman-Effekt analogen elektro-optischen Phänomens gewidmet, dessen Existenz die Voigtsche Theorie voraussehen läßt.

Berlin E. ASCHKINASS.

Arnold, E. Die Wechselstromtechnik. Erster Band. Theorie der Wechselströme und Transformatoren von **I. L. la Cour.** 425 Seiten mit 263 in den Text gedruckten Figuren. Berlin 1902, Julius Springer.

Über Wechselströme und Transformatoren existiert bereits eine Anzahl von Lehrbüchern. Man wird deshalb von dem vorliegenden Werke etwas

Besonderes erwarten und dies um so mehr, als der Verfasser am Elektrotechnischen Institut der Hochschule in Karlsruhe ist und sein Name, meist in Verbindung mit Arnold und Bragstad, vielen Elektrotechnikern bekannt ist. Der Verfasser selbst sagt von seinem Buche, daß es den Teil der Wechselstromtheorie behandelt, der für ein gründliches Verständnis der Starkstromtechnik nötig ist. Man findet darin wirklich eine sehr vollständige Anleitung zur Lösung fast aller in der Praxis vorkommenden Wechselstromprobleme. In der Behandlung des Stoffes hat der Verfasser seinen eigenen Weg eingeschlagen und dabei viel Fleiß entwickelt. Seine Ableitungen sind abstrakt (man kann deutlich den Einfluß von Bragstad wahrnehmen) und im allgemeinen streng. Man darf wohl behaupten, daß der entsprechend vorgebildete Leser beim Studium des Werkes auf seine Rechnung kommen wird, vorausgesetzt, daß er sehr aufmerksam liest, denn die zahlreichen Druckfehler erschweren das Studium des Buches. Die geringe Mühe, die auf das Korrekturlesen verwandt worden ist, steht in keinem richtigen Verhältnisse zu der Sorgfalt, mit der der Inhalt bearbeitet worden ist. Es ist auffallend, daß die Literaturnachweise fast gänzlich fehlen. Die unglückliche, leider in der Technik sehr verbreitete Bezeichnung „Phase“ für Wicklungszweig, wovor schon im Jahre 1895 Görges warnte (E. T. Z. 1895, S. 751), ist auch im vorliegenden Werke aufgenommen worden. Unter Phase versteht man bekanntlich den Zustand eines Vorganges im betrachteten Zeitmoment. Der Wicklungszweig (z. B. in einer Drehstrommaschine) ist nur durch die örtliche Lage charakterisiert; um eine klare Vorstellung zu erlangen, muß man dies auseinander halten.

Weder aus dem Titelblatt des Buches, noch aus des Verfassers Vorwort geht hervor, für welchen Leserkreis das Buch geschrieben ist; da der Verfasser eine gewisse Übung im physikalisch-mathematischen Denken voraussetzt, wird sich der praktische Ingenieur, der gewöhnt ist, seine Vorstellung durch faßbare praktische Beispiele zu erhöhen, nicht leicht mit dem Inhalte befreunden: um so mehr Nutzen wird dagegen der Leser daraus zu ziehen wissen, der der theoretischen Behandlung elektrotechnischer Probleme das richtige Interesse und Verständnis entgegen bringt.

Der *erste Teil* des Buches enthält außer einer kurzen Einleitung, in der die wichtigsten Grundlagen aus der Elektrizitätslehre rekapituliert werden, die Behandlung der für die Technik wichtigsten Wechselstromprobleme, zunächst für sinusförmige, dann für beliebige periodisch veränderliche Ströme und ein Kapitel über die Messung von Wechselströmen. Die Aufgaben werden analytisch und graphisch behandelt. Bei der analytischen Lösung bedient sich der Verfasser der bekannten von Steinmetz eingeführten symbolischen Rechnungsweise mit komplexen Größen. Diese ist in Deutschland bisher wenig angewandt worden und bietet auch nichts wesentlich Neues. Um so interessanter ist die graphische Darstellung. Diese gründet sich auf drei in Julius Petersens „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben“ angegebene Operationen, die Multiplikation von Kurven und die Inversions- und Drehungstheorie, und auf zwei zuerst von Bedell und Crehore entworfene Kreisdiagramme. Das eine (Fig. 32) gibt den geometrischen Ort für den Endpunkt des Radiusvektors der Stromstärke an, wenn die E. M. K. konstant bleibt und eine der beiden Konstanten des Stromkreises, ohmscher oder induktiver

Widerstand (Reaktanz), sich ändert, das andere (Fig. 40) den geometrischen Ort für den Endpunkt des E. M. K.-Vektors, wenn die Stromstärke konstant bleibt und sich die ohmsche (Konduktanz) oder die induktive Leitfähigkeit (Suszeptanz) ändert. Die Methode des Verfassers führt wohl in allen praktisch vorkommenden Fällen zum Ziele, gibt aber nicht immer die einfachste Darstellung. So lassen sich z. B. die Diagramme der Figg. 58 und 75 viel einfacher und übersichtlicher aufbauen. Der Verfasser hat wahrscheinlich den komplizierteren Weg eingeschlagen, um den Entwurf der Diagramme möglichst einheitlich zu halten, und um die im 7. Kapitel gegebene Konstruktion zur Darstellung der Leistung und des Wirkungsgrades bequem anwenden zu können. Die vielen Hilfskonstruktionen erschweren aber namentlich dem Ungeübten den Überblick, und ein großer Übelstand in den Diagrammen des Verfassers liegt darin, daß durch Ausübung der Inversion die Zeitlinie ihren Drehungssinn wechselt. Bei der im Abschnitt 32 angegebenen Konstruktion zur Bestimmung der zu zwei parallel geschalteten Impedanzen äquivalenten Impedanz sind die Figuren derart verzerrt gezeichnet, daß sie sich mit dem Texte nicht in Einklang bringen lassen.

An dem Beispiel I für Reihenschaltung S. 62 u. s. w. soll gezeigt werden, welchen Weg der Verfasser beim Entwurf seiner Diagramme einschlägt. Gegeben sind die Primärspannung E_0, die Leitungskonstanten r_1 und x_1 und die Suszeptanz b_2 des sekundären Stromkreises. Wie ändert sich nun der Strom (I) und die sekundäre Spannung (E_2) mit der Konduktanz, Belastung (g_2)? — Denkt man sich die primäre E. M. K. E_0 in Richtung der Ordinatenachse aufgetragen und zeichnet man den geometrischen Ort für den Endpunkt des Radiusvektors der gesamten Leitfähigkeit des Stromkreises (Admittanz, $y = \sqrt{g^2 + b^2}$) derart, daß die Abszisse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Suszeptanz b und die Ordinaten die Konduktanz g darstellen, so ist diese Kurve auch zugleich der geometrische Ort für den Endpunkt des Stromvektors I, ($I = E_0 \cdot y$, $E_0 = \text{const}$). Den geometrischen Ort für die gesamte Admittanz des Kreises erhält man nun auf folgende Weise. In einem passenden Maßstabe wird vom Koordinatenanfang (O) in Richtung der Abszissenachse x_1 bis zum Punkte p und von diesem Punkte in Richtung der Ordinatenachse r_1 bis zum Punkte p' aufgetragen. Dann stellt op' die Impedanz der Leitung dar. Zieht man nun vom Punkte p' in Richtung der Abszissenachse die Strecke $\frac{1}{b_2}$ (im selben Maßstabe wie x_1 und r_1) bis zum Punkte p'', so gibt nach der oben zitierten Fig. 32 der Halbkreis über der Strecke $p'p''$ den geometrischen Ort für den Endpunkt des Vektors der gesamten Impedanz des Stromkreises. Durch Inversion erhält man einen zweiten Kreis, der für den reziproken Wert der Impedanz, d. i. die gesamte Admittanz des Kreises oder in einem anderen Maßstabe auch für die Stromstärke gilt. Durch Multiplikation dieser Stromkurve mit der Impedanz der Leitung $z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_1^2}$ und Drehung um den Winkel (r_1, z_1) erhält man den geometrischen Ort für den Spannungsabfall $I \cdot z_1$; die sekundäre Klemmenspannung E_2 wird dann durch die geometrische Differenz zwischen E_0 (in Richtung der Ordinatenachse aufgetragen) und $I \cdot z_1$ dargestellt. Der Verfasser hätte hier die Inversionspotenz derart wählen sollen, daß derselbe Kreis für Impedanz und Admittanz gilt, wodurch das Diagramm sich vereinfacht

Im 7. Kapitel folgt dann die Darstellung der Verluste, der Leistung und des Wirkungsgrades zu den in den Kapiteln 4, 5 und 6 gezeichneten Diagrammen; es ist dies im wesentlichen die von Ossanna und Bragstad benutzte Methode. Der Abschnitt 43, in dem die Gleichungen für die Kupferverluste, die Leistung und den Wirkungsgrad zu den Aufgaben für gemischte Schaltung von Stromkreisteilen aufgestellt werden, ist etwas flüchtig geschrieben; denn außer einigen Druckfehlern ziehen sich drei weitere Fehler durch die ganze Rechnung und entstellen die Gleichungen (55), (56) und (57).

Nun geht der Verfasser zu dem wichtigen und in diesem Buche sehr gründlich behandelten Gebiete der Wechselströme von beliebiger Kurvenform über: Darstellung einer beliebigen gegebenen Stromwelle durch eine Fouriersche Reihe, Beispiele für den Einfluß der höheren Harmonischen; Effektivwert und Leistung. Definition des äquivalenten Sinusstromes, Bedeutung des äquivalenten Leistungsfaktors und seine Berechnung aus den E. M. Ken. und Leistungsfaktoren der einzelnen Harmonischen. Dann untersucht der Verfasser die Größe des Fehlers, der dadurch entsteht, daß man die Reaktanz eines Stromkreises bei beliebig verlaufender E. M. K.-Kurve nach der Formel $x = \frac{E \cdot \sin \varphi}{I}$ berechnet, wobei E und I die gemessenen (effektiven) Werte von Strom und Spannung bedeuten und $\cos \varphi$ sich aus der Beziehung $\frac{L}{E \cdot I}$ ergibt; $L =$ gemessene Leistung. Und zwar zeigt sich, daß der Fehler bei Stromkreisen, die nur Selbstinduktion enthalten, gering ist; aber bei Stromkreisen mit Kapazität sehr groß werden kann. Um die Kapazität aus Spannungs- und Strommessung bestimmen zu können, muß der zeitliche Verlauf der Spannungskurve bekannt sein. Im nächsten Abschnitte leitet der Verfasser ab, daß $E \cdot I \cdot \sin \varphi$ nicht die imaginäre Leistung ist, die man erhält, wenn man $\sum_0^n E_n \cdot I_n \cdot \sin \varphi_n$ bildet, sondern daß dies nur bei sinusförmig verlaufenden Wechselströmen zutrifft; in allen anderen Fällen ist die imaginäre Leistung kleiner als der Ausdruck $E \cdot I \cdot \sin \varphi$ ergibt; dieser ist deshalb mit dem „Induktionsfaktor" zu multiplizieren. Im Anschluß hieran stellt sich der Verfasser die Frage, wann ist graphische Zusammensetzung der Amplituden der äquivalenten Sinusströme zulässig? Die Untersuchung führt zu dem Resultat, daß dies erstens immer der Fall ist, wenn die Induktionsfaktoren einander gleich sind (d. h. wenn die Stromkreisteile ähnlich sind), zweitens, bei Hintereinanderschaltung von Stromkreisen, dann, wenn die ohmschen Widerstände unabhängig von der Periodenzahl sind und alle induktiven Widerstände sich nach demselben Gesetze ändern; drittens, bei Parallelschaltung, wenn nur ein Kreis Reaktanz enthält und die übrigen Kreise nur ohmschen Widerstand. Zum Schluß wird noch der Einfluß der Kurvenform auf die prozentische Strom- und Spannungsänderung untersucht.

Das 11. Kapitel bringt einiges über die Messung von Wechselströmen. Es werden beschrieben: die Joubertsche Methode und der Oszillograph von Duddell und Marchant zur Aufnahme des zeitlichen Verlaufes von Spannung und Strom; zur Messung der Effektivwerte von Spannung und

Strom Weicheisen-Instrumente, Hitzdraht-Instrumente, Elektrodynamometer. Der Verfasser hätte hier auch kurz auf die Stromzeiger nach dem Ferraris-schen Prinzip hinweisen sollen. Die im Abschnitt 62 über Leistungsmesser angegebene „Wattmeter“-Schaltung für große Spannungen und kleine Ströme und die für kleine Spannungen und große Ströme sind vertauscht; man wird übrigens in den meisten Fällen die Schaltung anwenden, bei der der Strom der Spannungsspule auch die Hauptstromspule des Instruments durchfließt, weil die Stromkorrektion am bequemsten und genauesten ist. Die im nächsten Abschnitte angegebene Methode zur direkten Messung der Effektivwerte von Spannung und Strom der höheren Harmonischen ist neu; sie soll die umständliche und ungenaue Kurvenanalyse umgehen. Leider erfordert diese Methode einen Hilfsgenerator, der für viele Periodenzahlen umschaltbar eingerichtet sein muß, und der Bau eines solchen macht konstruktive Schwierigkeiten. Die im Abschnitt 65 beschriebene Methode zur Messung der wattlosen Komponente eines Wechselstromes ist wohl ganz schön ausgedacht, hat aber keinen praktischen Wert, da sie zu viel Hilfsinstrumente erfordert. In der Fig. 137 (S. 211) erkennt der praktische Ingenieur sofort, daß diese Methode nur auf dem Papiere möglich ist, in der Praxis sich aber nicht einführen kann. Den letzten Abschnitt widmet der Verfasser noch der Messung der Periodenzahl von Wechselströmen.

Im *zweiten Teile* des Buches werden die Ein- und Mehrphasen-Transformatoren, die Theorie der Mehrphasenströme und die der Fernleitung von hochgespannten Wechselströmen behandelt. Eine eigenartige Disposition! Warum sind die Mehrphasenströme nicht im ersten Teile, im Anschluß an die Theorie der Wechselströme behandelt worden? Eine gewisse Analogie zwischen Transformator und Arbeitsübertragung ist wohl kein hinreichender Grund, diese aus dem ersten Teile, der von der Theorie der „Wechselströme“ handelt, auszuschließen; vielleicht wäre hier ein dritter Teil am Platze gewesen.

Nachdem die physikalischen Vorgänge in den Einphasentransformatoren erklärt worden sind, wird durch Differentialgleichungen nachgewiesen, daß man sich jeden Transformator durch eine „äquivalente Stromverzweigung“ ersetzt denken kann und sich deshalb alle Rechnungen auf die in den Kapiteln 4 bis 6 behandelten Aufgaben zurückführen lassen. In der Fig. 146 entwirft der Verfasser ein vollständig falsches Bild der Kraftröhren eines Manteltransformators. Dann folgen die Transformatordiagramme für konstanten Kraftfluß, konstante Sekundärspannung und konstante sekundäre Stromstärke. In diesem Kapitel hätte der Verfasser auf die in der Literatur eingeführten Streuungskoeffizienten eingehen sollen.

Im 14. Kapitel werden die Mehrphasensysteme besprochen. Es wird die topographische Darstellung von Potentialen erläutert, die Bestimmung des Spannungsmittelpunktes eines Sternsystems und die Bestimmung des Spannungsabfalles von beliebig belasteten Mehrphasensystemen besprochen. Diese Abschnitte sind nicht sehr klar behandelt; bei Bestimmung des Spannungsabfalles wird sogar in der Fig. 169 eine falsche Konstruktion angegeben. Die folgenden Abschnitte über die Umwandlung von Dreieckschaltung und anderen Kombinationen in Sternschaltung sind sehr ausführlich. Das 16. Kapitel beschäftigt uns mit der Leistung von Mehrphasenströmen und mit den Meßmethoden. Endlich folgt noch eine Betrachtung über die höheren Harmonischen in Mehrphasensystemen.

Das 18. Kapitel handelt von der Theorie der Mehrphasentransformatoren. Zunächst beschreibt der Verfasser die verschiedenen Anordnungen des Eisenkörpers für drei- und zweiphasige Systeme. In der Fig. 196 gibt er eine magnetische Anordnung, die ganz verfehlt zu sein scheint, da hier bei demselben maximalen Kraftfluß wie für die in den Figuren 194 und 199 dargestellten allgemein gebräuchlichen Typen der ca. 1,3fache Eisenverlust auftritt. Es ist auch unzulässig, für die Anordnung Fig. 196 die im Abschnitt 92 angesetzten Gleichungen zu schreiben. In diesem und in den folgenden Abschnitten werden die Differentialgleichungen für Transformatoren mit symmetrischem und unsymmetrischem Eisenkörper aufgestellt, und an einigen Beispielen wird gezeigt, welchen Einfluß der unsymmetrische Aufbau auf Leerlaufstromstärke und Effektverbrauch in den einzelnen Wicklungszweigen hat. Die Methode, die der Verfasser hier einschlägt, ist wohl korrekt, aber wenig übersichtlich, und es macht Mühe, sich in den Gedankengang des Verfassers zu versetzen.

Im nächsten Kapitel wendet sich der Verfasser zu den in Transformatoren und ähnlichen Apparaten auftretenden Verlusten. Bei der Besprechung der Hysteresisverluste gibt der Verfasser auch einen Auszug von den Arbeiten von Max Wien über die Hysteresisverluste bei höheren Periodenzahlen. Sehr nützlich ist der Abschnitt über den Einfluß der Spannungskurve auf die Eisenverluste, der in der Praxis noch immer zu wenig beachtet wird. Eine Untersuchung über „die Wahl der Querschnitte des magnetischen Kreises“ ist sehr unklar, die Bedingungen sind darin nicht scharf ausgesprochen. Es werden auch stillschweigend zwei Voraussetzungen gemacht (die Induktion ist gleichmäßig über den Querschnitt des Eisenkörpers verteilt, die geometrische Länge des Eisenkörpers ist identisch mit der Länge der Kraftröhre), die nicht zutreffen; deshalb kann auch das Resultat, zu dem der Verfasser kommt, nicht allgemein gelten.[1])

Die Verluste in der Wicklung werden leider sehr kurz behandelt. Auf die zusätzlichen Verluste durch Wirbelströme (sogenannte Stromverdrängung) geht der Verfasser nur flüchtig ein; er gibt eine Tabelle, die den Einfluß der zusätzlichen Verluste durch Wirbelströme bei einigen Transformatoren erkennen läßt, leider fehlen hier die Wicklungsangaben der betreffenden Apparate, ohne die die Tabelle wenig Wert hat.

Nun untersucht der Verfasser, wie das Verhältnis zwischen Eisen- und Kupferverlusten zu wählen ist, damit bei gegebener Leistung der Wirkungsgrad des Transformators ein Maximum wird. Die Richtigkeit des Resultats (Kupferverluste = Wirbelstromverlust + 0,8 Hysteresisverlust) ist von anderer Seite angezweifelt worden, jedoch mit Unrecht; dagegen die Folgerung, daß diese Verteilung der Verluste auch die beste Ausnützung des Materials ergibt, ist unvermittelt. In der Praxis liegt gewöhnlich die folgende Aufgabe vor: gegeben ist ein Eisenkörper; wie muß das Verhältnis zwischen Kupfer und Eisenverlusten gewählt werden, damit man, wenn Leistung und Wirkungsgrad vorgeschrieben sind, mit möglichst wenig Aufwand an Kupfer auskommt? Eine genaue Untersuchung führt zufällig zu demselben Resultat wie die vom Verfasser gelöste Frage. Zuletzt wird noch festgestellt, bei

---

1) Vergl. auch: E. T. Z. 1903, S. 710, Der Einfluß der Kraftlinienverteilung in einem Eisenring auf die Verluste durch Hysteresis und Wirbelströme.

Im 2. Teil der Planimetrie, steht es um die Grundbegriffe nicht besser. Verf. geht, was ich durchaus billige, vom Körper zur Fläche, von der Fläche zur Linie etc. Die Fläche, als das zweien physichen Körpern Gemeinsame, ist der eigentliche geometrischen Grundbegriff; als selbständiges Raumgebilde im Wege der Idealisierung im Sinne Kleins, kann sie auch einseitig sein, wie das Listing-Möbiussche gebogene Rechteck. Verf. definiert die Ebene: er sagt zwar § 1, 4 vorsichtig, die Ebene ist eine Fläche, aber in der Stereometrie bezieht er sich ausdrücklich auf 1, 4 als Definition der Ebene. Das 3. Axiom der Ebene: Teilung des Raumes in zwei getrennte Teile (Dreidimensionalität) wird nirgends erwähnt.

Im höchsten Grade rückständig ist die Auffassung des Winkels. Unter den vielen schlechten Definitionen, die man bei Schotten nachlesen möge, die schlechteste: der Richtungsunterschied. Und diese Differenzen des schlechtesten unerklärlichen Grundbegriffs, in den nicht nur der Raum, sondern auch noch die Zeit eingeht, werden addiert und subtrahiert, und damit wird bewiesen, daß Scheitelwinkel gleich sind. Dann die Parallelentheorie! „Unter den verschiedenen Lagen der bewegten Geraden „muß" hiernach „eine" sein". Man darf es als einleuchtend betrachten, daß in dieser Lage beide Gerade keinen Punkt gemeinsam haben." Also Verf. glaubt im Grunde, er könne das Parallelenaxiom beweisen, er weiß aber doch, daß die Sache ihren Haken hat, und so folgt nach dem Beweise das Axiom! Als Folge des Parallelenaxioms erscheinen die Sätze von der Eindeutigkeit des Lotes, deren erster für alle Geometrien gilt, während der zweite nur die Unendlichkeit der Geraden fordert. Unbegrenzt und Unendlich sind ihm S. 212 gleichwertig usf. [illegible] kommt der Verf. zu seiner Erleichterung in die Materie hinein; höchst [illegible] spricht er das Prinzip aus, Figuren, deren bestimmende Stücke [illegible] sind, stimmen in allen Stücken überein, um gleich darauf die Kongruenzsätze durch Bewegung zu beweisen. Er stellt ohne jeden Grund den [illegible] zweiten, der bei Euklid mit Fug und Recht der dritte ist. [illegible] Überhaupt ist die Anordnung auch ein schwacher Punkt des Buches. [illegible] Parallelogramme müssen sich an den Parallelismus anschließen, den e[illegible] der Zeit wäre auf den Winkelsummensatz zu begründen. De[illegible] darf der Schüler nicht vor § 32 gebrauchen. Die direkten Kon[illegible] geom. Ort kommen hinter den indirekten; der Pappussche Satz[illegible] des Pythagoras ein Spezialfall ist, und der nichts als den Sat[illegible] Inhaltsgleichheit der Parallelogramme erfordert, wird als Verall[illegible] des Pythagoras geboten etc.

[illegible]esten ist noch die Trigonometrie. Ref. stellt zwar da[illegible] mit Rücksicht auf die Tabelle in den Vordergrund, gib[illegible] allgemeine Definition der zyklischen Funktionen, wobei er sec un[illegible] den Schülern schenkt; aber auch die gut mittelalterliche[illegible] trigonometrischen Formeln aus der Dreiecksgeometrie läßt[illegible] Der Verf. hätte dabei das Additionstheorem wie Nasi[illegible] durch die Zerschneidung des Dreiecks mittels der Höhe[illegible] In der Stereometrie ist die Trennung der Ecken und de[illegible] Luxus, die Einschränkung der Volumenberechnung[illegible] Prinzip ist durchaus zu billigen; doch würde Ref. die[illegible] Pyramide und Kugel als Konsequenz des Cavalieri-[illegible] vorgezogen haben. Summa Summarum: Ref. vermag

cht einzusehen, was den auf seinem eignen Gebiet so geschätzten Verf. zu r Wiederbelebung des alten Schlömilch-Reidtschen Werkes veranlaßt hat.

Straßburg i. E. MAX SIMON.

Schlömilchs Handbuch der Mathematik. 2. Aufl. 2. Band I. Teil. Leipzig 1904, J. A. Barth.

Der ganze Band ist von Herrn Heger bearbeitet; die Vorrede gibt e Änderungen an. Am Schluß erwähnt der Verf., daß er soviel wie öglich Fremdwörter vermieden hat, d. h. er hat die internationalen chnischen Ausdrücke durch fremde Wörter ersetzt.

1. Buch: Darstellende Geometrie. Die Lektüre wurde dem Ref. durch e sprachlichen Neubildungen erschwert. Die Darstellung ist einfach, die iguren sind deutlich, das Buch ist für Schüler und Lehrer brauchbar. Die erührungskugeln des Vierecks im Raum sind wohl schon früher von Neuberg nd anderen ausgiebig behandelt worden.

2. Buch. Analytische Geometrie der Ebene; sie hat dem Ref. wenig zuesagt. Die Klarstellung des Grundgedankens ist nicht klar, die bedeutendste euere Auffassung, das Dualitätsprinzip, nicht scharf herausgearbeitet. as was die Geometrie der geraden Linie erschwert, die Festsetzungen, die ur Eindeutigkeit führen, die bilden die einzige Schwierigkeit, und da hat ch's Verfasser leicht gemacht; Ref. muß gestehen, daß ihm die grundlegende 'estsetzung § 2, 4 S. 112 nicht klar geworden ist. Wunderlich ist auch, ie Ref. schon beim 1. Band bemerkte, die Anordnung. Der Kreis hinter en Kegelschitten, die generelle Erklärung der C^2 hinter der speziellen usw. ie Kurven 3. Ordnung sind, ich glaube zum ersten Mal, in einem für nfänger bestimmten Buch, allgemein und ausführlich behandelt.

3. Buch: Analyt. Geometrie des Raumes hat den Ref. weit mehr beiedigt. Vermißt hat er die Plückerschen Koordinaten, ihm persönlich die ngenehmsten, die Reyeschen Axen, den Linienkomplex. Dafür haben die aumkurven dritter Ordnung eine eingehende Berücksichtigung gefunden.

4. Buch: Differentialrechnung. Die Eigenart des wackeren, alten chlömilch, der ein sehr geschickter Rechner war, ist erhalten geblieben. ie Definition der Stetigkeit gibt man jetzt schärfer und macht von vorn rein aufmerksam, daß aus der Stetigkeit noch nicht die graphische Darellbarkeit folgt, sondern dazu der Funktionsbegriff eine weitere Einschränkung leiden muß. Die Singularität von $1/x - 2$ für $x = 2$, sowie die von x für $\pi/2$ tritt erst bei komplexer Variable hervor, da wir für reelle Zahlen $\infty = + \infty$ setzen, wie $- 0 = + 0$. Aber von solchen und ähnlichen einen Ausstellungen, die zum Teil geradezu Geschmackssache sind, abgesehen, t dieses Buch für beide Zwecke des Herrn Herausgebers recht brauchbar. n Druckfehlern hat Ref. nur bei Fig. 123 Buchstabe A als fehlend beerkt und den Strich von p; sowie auf S. 751 Z. 1 Y statt S. Die Ausattung ist eine vorzügliche, der Verleger hat wahrlich keine Kosten geheut.

Straßburg 1904. MAX SIMON.

...nen.

... Theorie der algebraischen Funktionen ... Anwendung auf algebraische Kurven

... 707 S. gr. 8⁰. Leipzig. B. G. Teubner.

... gewundenen Pfaden zu ihrem Ziele ... ische Ausbau einer einzelnen Disziplin ... zieht, dafür liefert die Theorie der ... es Beispiel. Ein Bericht über die ... Arithmetik, Algebra, Funktionen- ... ist von Brill und Noether in ... matikervereinigung 1894 gegeben ... verschiedenen Methoden zu einem ... wesentlichen vollständige Dar- ... gefehlt. Diesem Mangel wird durch ... Landsberg abgeholfen. Von welchen ... und welches Ziel sie sich gesteckt, ... ausführlich dargelegt, welchem wir ... Sätze entnehmen: „Im Laufe der ... Forschern, zuerst durch die Arbeiten ... Dedekind und Weber, mehr und mehr ... der leichteste und sicherste Eingang in ... arithmetische Betrachtung der rationalen ... gewonnen werden kann, selbstverständ- ... der hierher gehörigen Resultate aus der ... Wunsch, der arithmetischen Theorie ... lichen Strenge und Allgemeinheit auch ... welche sie vor Einseitigkeit bewahrt ... obliegenden Aufgaben fähig macht ... ... metische Theorie vermag nach unserer ... Bereicherung in sich aufzunehmen, die ... wird.“

... und, welchen wohl die Mehrzahl der ... dürfte, ist die arithmetische Richtung, ... hende, und zwar sind es namentlich ... Weber, welche die Verfasser auf- ... gebildet und fortgeführt haben; diese ... die andern Richtungen der Theorie ... nehmen jedoch die Vorlesungen von ... Eigenschaften der algebraischen ... Weierstraßsche Anschauungen in ... Erst nachdem die Untersuchungen ... der charakteristischen Eigenschaften ... Stellung im Bereiche der analytischen ... deutung des zu einer Riemannschen ... auseinandergesetzt ist, setzen jene arith- ... all auf die vorliegende Funktionen- ... ersten Teil im wesentlichen eine ... ecker und Dedekind für die Zahlen- ... alen Faktoren auf das Gebiet der

Der wesentliche Unterschied dieser Anordnung von der von Dedekind und Weber befolgten entspricht den verschiedenen Zwecken der Schriften. Bei Dedekind und Weber steht die Forderung der Reinheit der Methode im Vordergrunde, jede mit Stetigkeitsvoraussetzungen behaftete Deduktion, insbesondere jede geometrische Veranschaulichung ist geflissentlich vermieden; und wenn der Begriff des Punktes eingeführt wird, so geschieht dies in so abstrakter Form, daß die Gefahr einer unrichtigen oder auch nur der Methode zuwiderlaufenden Verwendung geometrischer Vorstellungen ausgeschlossen wird. Dieser prinzipielle Standpunkt erscheint gewissermaßen als Reaktion gegen die in der älteren Riemannschen Theorie üblichen, auf angebliche geometrische Evidenzen sich stützenden Beweisführungen. Bei einem Lehrbuch, welches tiefergehendes Interesse für den Gegenstand erst erwecken soll, nicht schon voraussetzen darf, würde eine solche abstrakte Einführung das Eindringen in die Theorie nur unnötig erschweren. Das hier von Anfang an benutzte Hilfsmittel der Reihenentwicklung hebt diesen Übelstand, ohne darum die Strenge der Deduktion irgendwie zu beeinträchtigen. Auch wird der Leser, wenn, wie es hier geschieht, die prinzipiellen Verschiedenheiten der Methoden deutlich hervorgehoben werden, bald selbst fühlen, welche Hilfsmittel wesentlich, welche entbehrlich sind, wenn man den Zusammenhang mit der Theorie der analytischen Funktionen lösen will. Aus ihrer Verbindung mit dieser erwächst aber der arithmetischen Theorie außer ihrer konkreten Gestaltung auch noch die Anregung zu mannigfacher weiterer Durchbildung, welche zu einer Reihe sehr bemerkenswerter Sätze führt. Unter diesen seien zwei hervorgehoben, von denen der eine sich auf die Elementarteiler der zu einem Modul gehörigen Matrizen bezieht, der andere ein Kriterium liefert, durch welches die Ideale aus der Gesamtheit der Moduln ausgesondert werden.

Die arithmetischen Theorien, welche als das wichtigste Resultat den Riemann-Rochschen Satz liefern, bilden den zweiten und dritten Teil der Vorlesungen. Diesen schließt sich am engsten der sechste Teil an, wo die tiefer liegenden Untersuchungen über die Abelschen Integrale bis zur Aufstellung des Abelschen Theorems und der Formulierung des Umkehrproblems fortgeführt werden. Der vierte und fünfte Teil sind der Theorie der algebraischen Kurven gewidmet. Diese wird von vornherein ohne jede vereinfachende Voraussetzung entwickelt, und so werden auch die Plückerschen Formeln in ihrer allgemeinsten d. h. für jeden beliebigen speziellen Fall gültigen Fassung gegeben. Es zeigt sich, daß, nachdem einmal durch die vorangehende arithmetische Theorie eine sichere Basis für die Behandlung der algebraischen Kurven geschaffen ist, die vollständige Durchführung dieser Aufgabe nicht nur möglich ist, sondern sich auch durchaus übersichtlich gestaltet. Eine Reihe neuer Untersuchungen, wie über Kurven im Raum von drei und mehr Dimensionen, finden sich auch in diesen Teilen des Werkes.

Es können hier die Leistungen der Verfasser nicht in allen Einzelheiten aufgeführt werden; denn wir finden auf Schritt und Tritt selbständige Arbeit, sei es, daß es sich um ganz neue Untersuchungen handelt oder solche, die bereits vorhandene ergänzen und abrunden, oder endlich um neue Darstellung bekannter Resultate. Häufig wird durch eine scheinbar geringfügige formale Änderung die wahre Bedeutung eines Ergebnisses erst

in das rechte Licht gesetzt. So gilt nach der Ausdehnung des Begriffs d
Divisorenklassen auf gebrochene Divisoren der einfache Satz, daß die a
Abelschen Integralen entsprechenden Divisoren (Differentialteiler) in ihr
Gesamtheit genau eine Klasse konstituieren. Dieses Resultat findet sich i
Grunde genommen auch bei Dedekind und Weber, aber durchaus nic
in dieser einfachen Fassung.

Zu den rein wissenschaftlichen Vorzügen des Werkes gesellen sich no
eine klare Darstellung und sorgfältig gewählte Ausdrucksweise, durch d
sich wohl jeder bei der Lektüre angezogen fühlt. So steht denn zu hoffe
daß der Wunsch der Verfasser, ihr Interesse und ihre Liebe für diese
schöne Gebiet mathematischer Forschung ihren Lesern mitzuteilen, bei recht
vielen sich erfüllen werde.

Berlin, Juli 1904. E. Steinitz.

A. Loewy. Versicherungsmathematik. Sammlung Göschen Bd. 180. 145 S.

Das für seinen geringen Umfang recht inhaltreiche Werkchen gibt in Anlehnung an das bekannte Zillmersche Lehrbuch eine Einführung in die Elemente der Lebensversicherungsmathematik — nicht der Versicherungsmathematik im allgemeinen, wie es nach dem Titel den Anschein hat. Den Hauptgegenstand der Darstellung bildet die Entwicklung der einmaligen und jährlichen Prämien sowie der Prämienreserven für die Versicherung auf das Leben einer einzelnen Person, während der Versicherung auf verbundene Leben vernünftigerweise nur ein kurzer Raum gewidmet ist. Vorausgeschickt wird eine kurze Einleitung über Umfang und Bedeutung des Versicherungswesens sowie zwei Kapitel über Zins und Sterblichkeitsmessung. In einem späteren Abschnitte findet man einige recht interessante Angaben über die Bruttoprämien; wobei man Gelegenheit hat zu bemerken, wie mechanisch und unwissenschaftlich vielfach diejenigen Methoden sind, nach denen einige Lebensversicherungsgesellschaften ihre Tarifprämien aus den „mathematischen" Nettoprämien konstruieren. Daß die Zillmersche Methode der Prämienreserveberechnung von dem Verfasser etwas stiefmütterlich behandelt worden ist, mag darauf zurückzuführen sein, daß die über diesen Gegenstand in jüngster Zeit veröffentlichten Schriften anscheinend nicht mehr benutzt werden konnten; immerhin wäre es interessant gewesen zu erfahren, was der Verfasser gegen jene Methode einzuwenden hat, auch wenn es (vgl. S. 126) „nichts Wesentliches" gewesen wäre.

In stilistischer Beziehung weist die Darstellung mannigfache Unebenheiten auf; Wendungen wie „Möglichkeiten, die sich als gleichmöglich erweisen" (S. 26), „Rentenempfänger von seiten des Versicherten" (S. 78) hätten vermieden werden sollen.

Mannheim. B. Oster.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

130. Die Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen eines konvexen n-Eckes beträgt im Innern desselben $\binom{n}{4}$, während die verlängerten Diagonalen sich außerhalb des konvexen n-Eckes in $\frac{n}{2}\cdot\binom{n-3}{3}$ Punkten schneiden. Hierbei ist ein Punkt, in dem sich r Diagonalen schneiden, $\binom{r}{2}$-mal zu zählen.

Aussig, Böhmen. A. Krug.

---

131. *Verallgemeinerung der Aufgabe* **109** (Bd. VIII, S. 173) (W. Franz Meyer). Sind r und n ganze positive Zahlen oder auch Null, so läßt sich bekanntlich jede Primzahl p (ausgenommen 2) nur auf eine Art auf die Form $p = 2^{r+1}(2n+1)+1$ bringen.

Es sei die quadratische Kongruenz vorgelegt

$$x^2 \equiv D \pmod{p}. \tag{1}$$

Ist N ein beliebiger Nichtrest modulo p, so gibt es stets eine ganze Zahl λ, welche der Ungleichung genügt:

$$0 \leqq \lambda \leqq 2^r - 1,$$

und für welche

$$D^{2n+1} \equiv N^{2\lambda(2n+1)} \pmod{p}. \tag{2}$$

Ist bei gegebenem Reste D und beliebig angenommenem Nichtreste N hieraus λ gefunden, so ist die Lösung der quadratischen Kongruenz (1):

$$x \equiv \pm N^{-\lambda(2n+1)} D^{n+1} \pmod{p}. \tag{3}$$

Aussig, Böhmen. A. Krug.

---

132. Durch eine einfache geometrische Betrachtung gelangt man zu folgendem Satze:

Wenn man von allen Punkten P einer Kreisevolvente aus auf den Normalen eine beliebig gewählte konstante Strecke bis N und auf den Tangenten nach der Seite, wo die Spitze liegt, den Radius des Grundkreises bis T abträgt, so umhüllt die Gerade NT die Evolvente eines anderen Kreises. Sein Mittelpunkt fällt mit dem des ersten zusammen, sein Radius ist gleich der Projektion von PT auf NT.

Breslau. M. Peche.

B. Lösungen.

Zu **111** (Bd. VIII, S. 262) (St. Jolles). — In **111** war von dem Unterzeichneten die Aufgabe gestellt worden, zu beweisen, daß die Komplexe eines Büschels linearer Komplexe eine Regelschar II. Ordnung, die keinem von ihnen angehört, in den Strahlenpaaren einer Involution schneiden. Ich gestatte mir im folgenden einen einfachen Beweis dieses Satzes anzugeben.

Einem Strahle l des Raumes, der nicht zur Trägerkongruenz C_1^1 eines Büschels $[C_1^1]$ linearer Komplexe gehört, sind durch die Komplexe von $[C_1^1]$ die Strahlen einer zu $[C_1^1]$ projektiven durch l gehenden Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}_l^2$ zugeordnet. Ist l ein Leitstrahl der gegebenen Regelschar II. Ordnung $\mathfrak{R}^2$, so schneiden sich beide Regelscharen, da $\mathfrak{R}^2$ in keinem Komplexe des Büschels $[C_1^1]$ enthalten ist, noch in einer kubischen Raumkurve k^3, zu deren Bisekanten die Strahlen von R_l^2 gehören. Ein linearer Komplex schneidet nun eine ihm nicht angehörende Regelschar II. Ordnung in zwei Strahlen. Der durch einen Strahl x_1 der Regelschar $\mathfrak{R}^2$ gehende Komplex Γ_x des Komplexbüschels $[C_1^1]$ hat folglich mit $\mathfrak{R}^2$ noch einen Strahl x_2 gemein. x_1, x_2 schneiden l und als Strahlen von Γ_x auch den durch Γ_x zugeordneten Strahl l_x. Er gehört zur Regelschar R_l^2 und ist somit eine Bisekante von k^3, die Strahlen x_1, x_2 sind folglich diejenigen Regelstrahlen von R^2, welche bzw. durch die beiden Schnittpunkte X_1, X_2 von k^3 mit l_x hindurchgehen. Nun paaren aber die Regelstrahlen von $\mathfrak{R}_l^2$ die Punkte der kubischen Raumkurve und demnach auch die Strahlen der zu k^3 perspektiven Regelschar $\mathfrak{R}^2$ involutorisch, somit schneiden die Komplexe Γ_x des Komplexbüschels $[C_1^1]$ die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ je in den Strahlenpaaren x_1, x_2 einer Involution. w. z. b. w.

Ein Büschel linearer Komplexe enthält hiernach höchstens zwei reelle Komplexe, welche eine keinem seiner Komplexe angehörige Regelschar II. Ordnung berühren.

Halensee. STANISLAUS JOLLES.

Zu **112** (Bd. VIII, S. 262) (O. Gutsche). — Si d'un point P, on abaisse une perpendiculaire sur un diamètre t quelconque d'une conique à centre, le point d'intersection de cette perpendiculaire avec le diamètre conjugué t' à t, appartient à l'hyperbole d'Apollonius du point P relative à la conique.

Cette hyperbole équilatère passe par P, par O, par les points infinis des axes et par les pieds des quatre normales que l'on peut mener de P à la conique.

Dans le cas d'une hyperbole, les asymptotes étant rayons doubles de l'involution des diamètres conjugués, l'hyperbole d'Apollonius de P passe aussi par les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les deux asymptotes. Si P se meut sur g, les hyperboles h' constituent un faisceau ayant pour centres communs: O, A et les points infinis des deux axes.

On sait que toute hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe aussi par son orthocentre. En supposant l'orthocentre infiniment voisin d'un des sommets ce qui a lieu dans le cas d'un triangle rectangle, on obtient aisément le théorème suivant:

«La perpendiculaire abaissée sur l'hypoténuse du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle inscrit dans une hyperbole équilatère est tangente à l'hyperbole au sommet considéré».

La circonférence de diamètre OA coupe une quelconque des hyperboles h' du faisceau en deux points B et C. Les angles OBA et OCA étant droits, les perpendiculaires abaissées de B et de C sur OA sont tangentes à l'hyperbole d'où le théorème.

Porrentruy (Suisse) 15 Juin 1905. A. DROZ-FARNY.

Zu **114** (Bd. IX, S. 188, 189) (Lösung von Otto Meissner). — Es heißt dort zum Schluß: „Man findet ferner, daß für keinen sonstigen Wert — außer für $x = 2$ — $f_2(x)$ durch $f_1(x)$ teilbar ist.“ Herr Meissner scheint übersehen zu haben, daß auch für $x = -24$, wie aus dem Teiler -143 von 429 hervorgeht, $f_2(x)$ durch $f_1(x)$ teilbar ist. Denn es ist: $f_1(-24) = -715$ und $f_2(-24) = 5005 = -7 \cdot -715$. — Man vergleiche die Lösungsmethode meines Vaters auf Seite 186/87.

Aussig (Böhmen). stud. phil. JOSEF KRUG.

Zu **122** (Bd. IX, S. 90) (G. Loria). — Die Plückerschen Koordinaten derjenigen Geraden zu bestimmen, welche zwei gegebene windschiefe Geraden rechtwinklig schneidet.

Unter Benutzung der Graßmannschen Methoden (vgl. mein kürzlich erschienenes Buch: *Vorlesungen über die Vektorenrechnung*, Leipzig 1905, B. G. Teubner) stellt sich die Lösung wie folgt dar: Seien gegeben die beiden Geraden als die *gebundenen* Vektoren oder *Stäbe*

$$\mathfrak{p} = x_1[Ee_1] + y_1[Ee_2] + z_1[Ee_3] + l_1 | e_1 + m_1 | e_2 + n_1 | e_3,$$
$$\mathfrak{q} = x_2[Ee_1] + y_2[Ee_2] + z_2[Ee_3] + l_2 | e_1 + m_2 | e_2 + n_2 | e_3,$$

wo

$$x_1 l_1 + y_1 m_1 + z_1 n_1 = 0, \quad x_2 l_2 + y_2 m_2 + z_2 n_2 = 0.$$

Entsprechend sei der kürzeste Abstand derselben dargestellt durch

$$\mathfrak{g} = x[Ee_1] + y[Ee_2] + z[Ee_3] + l | e_1 + m | e_2 + n | e_3,$$

wo

$$xl + ym + zn = 0.$$

Ich bringe zunächst zum Ausdruck, daß $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf $\mathfrak{g}$ senkrecht stehen. Zu dem Ende genügt es, die zugehörigen freien Vektoren

$$p = x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3, \quad q = x_2 e_1 + y_2 e_2 + z_2 e_3,$$
$$g = x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$$

zu betrachten. Soll g auf p und q senkrecht stehen, so ist g der Ergänzung zum äußeren Produkt zwischen p und q proportional, also

$$g = \varkappa \,|\, pq,$$

woraus

$$(1) \quad x = \varkappa(y_1 z_2 - y_2 z_1), \quad y = \varkappa(z_1 x_2 - z_2 x_1), \quad z = \varkappa(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Will ich den Faktor $\varkappa$ bestimmen, dann gehe ich von der Vektorgleichung zur skalaren über und finde $g = \varkappa pq \sin\alpha$, also

$$\varkappa = \frac{g}{pq\sin\alpha}, \tag{1'}$$

wenn p, q, g die Längen der Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{g}$ und α den Winkel $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ bezeichnen. Hiermit sind drei der Plückerschen Koordinaten gefunden.

Nunmehr drücke ich aus, daß der Stab $\mathfrak{g}$ die Stäbe $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ schneiden soll. Die Bedingung dafür lautet, daß die aus $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ gebildeten Tetraeder den Inhalt Null haben müssen:

$$\mathfrak{g}\mathfrak{p} = 0, \quad \mathfrak{g}\mathfrak{q} = 0$$

oder

$$xl_1 + ym_1 + zn_1 + lx_1 + my_1 + nz_1 = 0,$$
$$xl_2 + ym_2 + zn_2 + lx_2 + my_2 + nz_2 = 0.$$

Nehme ich noch die obige Bedingungsgleichung

$$xl + ym + zn = 0$$

hinzu, so bestimmen diese Gleichungen die noch fehlenden Plückerschen Koordinaten. Durch Elimination von m und n ergibt sich z. B.

$$g^2 l = \varkappa y[x(l_1z_2 - l_2z_1) + y(m_1z_2 - m_2z_1) + z(n_1z_2 - n_2z_1)] -$$
$$- \varkappa z[x(l_1y_2 - l_2y_1) + y(m_1y_2 - m_2y_1) + z(n_1y_2 - n_2y_1)],$$

da ja $g^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist. Werden noch die Abkürzungen

$$\begin{cases} L = x(l_1x_2 - l_2x_1) + y(m_1x_2 - m_2x_1) + z(n_1x_2 - n_2x_1), \\ M = x(l_1y_2 - l_2y_1) + y(m_1y_2 - m_2y_1) + z(n_1y_2 - n_2y_1), \\ N = x(l_1z_2 - l_2z_1) + y(m_1z_2 - m_2z_1) + z(n_1z_2 - n_2z_1) \end{cases} \tag{2'}$$

eingeführt, so lassen sich die drei restierenden Plückerschen Koordinaten in der Form darstellen:

$$\begin{cases} gpq\sin\alpha \cdot l = yN - zM, \\ gpq\sin\alpha \cdot m = zL - xN, \\ gpq\sin\alpha \cdot n = xM - yL, \end{cases} \tag{2}$$

Berlin, den 19. Mai 1905. E. Jahnke.

Eine zweite Lösung mit den Methoden der analytischen Koordinatengeometrie hat Herr E. Rath, Stuttgart, am 13. Juni 1905 eingesandt, welcher zu dem eleganten Resultat gelangt:

„*Die sechs Unbekannten x, y, z, l, m, n auf deren Verhältnisse es ankommt, sind proportional den sechs Determinanten fünfter Ordnung der Matrix*

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & m_1 & n_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_1z_2 - z_1y_2 & z_1x_2 - x_1z_2 & x_1y_2 - y_1x_2 \end{Vmatrix}$$

Zu **126** (Bd. IX, S. 91) (E. Jahnke). „In Erweiterung eines Steinerschen Satzes, der für das Viereck gilt (Ges. W. I, 162), die folgende Formel für das Fünfeck zu beweisen:

$$(1)\quad 3(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{51}^2) = a_{13}^2 + a_{24}^2 + a_{35}^2 + a_{41}^2 + a_{52}^2 + 4(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2),$$

wo die m_i die Verbindungsstrecken der Diagonalmitten bedeuten; und zwar bezieht sich m_1 auf die beiden Diagonalen A_2A_4, A_3A_5, usw."

Bedeutet noch m_i' die Verbindungsstrecke der Mitten zweier nicht aufeinander folgender Seiten, wobei sich m_1' auf die Seiten A_2A_3 und A_4A_5 bezieht usw., und ist endlich noch m_i'' die Verbindungsstrecke der Mitten einer Seite und jener Diagonale, die nicht durch deren Endpunkte geht, wobei sich m_1'' auf die Seite A_3A_4 und die Diagonale A_2A_5 bezieht, usw., so bestehen noch folgende Gleichungen:

$$(2)\quad 3(a_{13}^2 + a_{24}^2 + a_{35}^2 + a_{41}^2 + a_{52}^2) = a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{51}^2 + 4(m_1'^2 + m_2'^2 + m_3'^2 + m_4'^2 + m_5'^2)$$

$$(3)\quad a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{34}^2 + a_{45}^2 + a_{51}^2 + a_{13}^2 + a_{24}^2 + a_{35}^2 + a_{41}^2 + a_{52}^2 = 4(m_1''^2 + m_2''^2 + m_3''^2 + m_4''^2 + m_5''^2).$$

Hat der Eckpunkt A_i die rechtwinkligen Koordinaten x_i, y_i, so ist allgemein:

$$a_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2,$$
$$4m_1^2 = (x_2 - x_3 + x_4 - x_5)^2 + (y_2 - y_3 + y_4 - y_5)^2,$$
$$4m_1'^2 = (x_2 + x_3 - x_4 - x_5)^2 + (y_2 + y_3 - y_4 - y_5)^2,$$
$$4m_1''^2 = (x_2 - x_3 - x_4 + x_5)^2 + (y_2 - y_3 - y_4 + y_5)^2 \text{ usw.}$$

und mit Hilfe dieser Gleichungen erweisen sich (1), (2) und (3) als Identitäten.

Durch Vertauschung der Indices lassen sich aus jeder der drei obigen Gleichungen mehrere neue ableiten. Vertauscht man z. B. in (1) die Indices 4 und 5, so kommt:

$$3(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{35}^2 + a_{45}^2 + a_{41}^2) = a_{13}^2 + a_{25}^2 + a_{34}^2 + a_{51}^2 + a_{42}^2 + 4(m_1''^2 + m_2'^2 + m_3''^2 + m_4^2 + m_5^2) \text{ usw.}$$

Aussig (Böhmen), den 12. Juni 1905. A. Krug.

Zu **127** (Bd. IX, S. 91) (M. Peche). — Es sei AB die Basis der Zykloide (d. i. die Gerade, auf der der erzeugende Kreis fortrollt), und CD ihre Scheiteltangente. Im Punkte M der Zykloide ziehen wir die Tangente und die Normale, erstere möge die Scheiteltangente in T, letztere die Scheiteltangente in N und die Basis in F schneiden. Bekanntlich ist dann $TF \perp AB$. — Zeichnet man noch auf der Normale NF die drei Punkte E, O und G, so daß $NM = ME$, $MO = 2MF = EG$, so ist O der Krümmungsmittelpunkt der Zykloide für den betrachteten Punkt M. Konstruiert man auf der Scheiteltangente CD den Punkt S aus der Gleichung $NT = TS$,

so folgt: $ES \parallel MT$, daher $ES \perp MF$, $ES = 2MT$. Da noch $EG = 2MF$, so ist $\triangle MTF \sim \triangle ESG$, daher $SG \perp CD$.

Konstruiert man nun eine Parabel, deren Scheitel M, deren Achse MG ist und deren Krümmungsmittelpunkt auf der Achse mit dem Krümmungsmittelpunkt O der Zykloide zusammenfällt, so ist nach bekannten Sätzen F ihr Brennpunkt und $MO = p$ ihr Halbparameter. Im rechtwinkligen Dreiecke NSG ist aber $\overline{ES}^2 = NE \cdot EG = 2ME \cdot p$; der Punkt S liegt daher auf der Parabel. Die in diesem Punkte an die Parabel gelegte Tangente muß bekanntlich die Achse MO in einem Punkte N' schneiden, so daß $N'E = 2ME$ ist, d. h. $N' = N$ und NS ist Parabeltangente.

Aussig (Böhmen), den 12. Juni 1905. A. Krug.

Ist P ein beliebiger Punkt der Zykloide, die durch Rollen eines Kreises vom Radius a auf der Geraden OA erzeugt wird, ist ferner M der Mittelpunkt des durch P laufenden erzeugenden Kreises und TN sein auf OA senkrechter Durchmesser, so ist PN eine Normale der Zykloide, PT eine Tangente und die durch T zu OA gezogene Parallele TS ihre Scheiteltangente. Den Krümmungsmittelpunkt K für den Zykloidenpunkt P findet man, wenn man PN um sich selbst bis K verlängert. Die Parabel, deren Scheitel P ist, und die in P drei unendlich benachbarte Punkte mit der Zykloide gemein hat, muß in P denselben Krümmungskreis haben wie die Zykloide, es muß also K der zum Parabelpunkte P gehörige Krümmungsmittelpunkt sein. Nun ist aber für den Scheitel einer Parabel der Krümmungsradius gleich dem Halbparameter p, also ist N der Brennpunkt der Parabel. Der Ort der Brennpunkte aller Parabeln ist daher OA. PT ist die Scheiteltangente der Parabel. Die zweite durch T laufende Parabeltangente muß die auf dem Brennstrahl NT errichtete Senkrechte, also die Scheiteltangente TS der Zykloide sein, denn die Scheiteltangente einer Parabel ist der Ort für die Fußpunkte der vom Brennpunkt auf ihre Tangenten gefällten Lote. Mithin berühren alle Parabeln der verlangten Art die Scheiteltangente der Zykloide.

Breslau, den 6. Juli 1905. O. Gutsche.

---

2. Anfragen und Antworten.

(Vacat.)

---

3. Kleinere Notizen.

A Chinese Theorem on Geometry.

(Aus einem Schreiben an Herrn A. Gutzmer.)

The following proposition is one among others that were proposed by a certain Chinese mathematician to a friend of mine:

If in a polygon inscribed in a circle all possible diagonals that can be drawn from a vertex are drawn and the successive triangles thus formed are inscribed with circles, then their radii will be together equal for any of the vertices.

How the Chinese deal with this subject, or whether they own a mode or other of proof, it is all unknown to me.

As it has however interested me somehow, here I give my proof.

I shall first consider the case for an inscribed quadrilateral $ABCD$. The diagonal AC being drawn, for the radius of the circle inscribed in ABC we have

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(AB+BC-CA)(AB-BC+CA)(-AB+BC+CA)}{AB+BC+CA}}.$$

Let the angles subtended by the sides AB, BC, CD, and DA be denoted by α, β, γ, δ respectively, and let the circumradius be R. The sides have then for their expressions

$$AB = 2R\sin\alpha, \text{ etc.}$$

And it may be easily found:

$$AB + BC + CA = 8R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$AB + BC - CA = 8R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$AB - BC + CA = 8R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$-AB + BC + CA = 8R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

These values being substituted the expression for ϱ reduces itself to

$$\varrho = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\delta}{2}.$$

And similarly for the other triangle

$$\varrho' = 4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Add them together, and it results

$$\varrho + \varrho' = 4R\sum\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2},$$

where the law of summation is easy to see.

The symmetry of the above expression teaches us at once the validity of the proposition for the case before us.

Next we designate with $A_1 \ldots A_r \ldots A_n A_{n+1}$ a polygon with $n+1$ sides inscribed in a circle. The sum of the radii under question for the vertex A_r may be denoted by S_r. The diagonal $A_1 A_n$ being drawn, the polygon $A_1 \ldots A_r \ldots A_n$ is one with n sides and inscribed in a circle. Assume for such a polygon our proposition to hold, the equal sums being expressed by S.

Let the radii of the inscribed circles for the triangles $A_1 A_n A_{n+1}$, $A_1 A_r A_n$, $A_1 A_r A_{n+1}$ and $A_n A_{n+1} A_r$ be ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 respectively.

S_1 is obviously equal to S together with ϱ_1. S_r is the same as S except that ϱ_2 does not enter into the expression and that ϱ_3 and ϱ_4 come instead. So we have by subtraction

$$S_1 - S_r = (S + \varrho_1) - (S - \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4) = (\varrho_1 + \varrho_2) - (\varrho_3 + \varrho_4).$$

But the equality of $\varrho_1 + \varrho_2$ with $\varrho_3 + \varrho_4$ has already been proved, since $A_1 A_r A_n A_{n+1}$ is a quadrilateral inscribed in a circle.

Thus S_r is equal to S_1 for all the indices.

It therefore follows by mathematical induction the establishment of the proposition in general.

Tokyo, March 29, 1905. Y. Mikami.

Zu der Mitteilung von Herrn J. Schröder über die Näherungswerte von $\sqrt{2}$.

(Bd. IX, S. 206.)

Der von Herrn Schröder gefundene Satz

$$(\sqrt{2}-1)^k = (-1)^{k-1} N_k (\sqrt{2} - Z_k)$$

bildet einen sehr speziellen Fall des bekannten Satzes, der den Zusammenhang der allgemeinen Lösung einer Pellschen *Gleichung* $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ mit der kleinsten positiven Lösung angibt. Er ist aber auch in folgendem Satz enthalten, der weniger bekannt sein dürfte und leicht zu beweisen ist:

Es sei a irgend eine positive ganze Zahl, b ein Teiler von $2a$ und $D = a^2 + b$. Sind dann $\frac{Z_k}{N_k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ die Näherungswerte der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$, so ist

$$(\sqrt{D} - a)^k = (-1)^{k-1} b^{\left[\frac{k}{2}\right]} (N_k \sqrt{D} - Z_k).$$

Straßburg i. E., 17. Juli 1905. Paul Epstein.

Notiz über die Wegschaffung von Wurzelgrößen aus algebraischen Gleichungen.

Die Aufgabe, aus einer algebraischen Gleichung die in sie eintretenden Wurzelgrößen zu entfernen, ist unter Benutzung von $n$ten Einheitswurzeln durchaus elementar und einfach zu lösen. Stellt man jedoch das Problem an den Beginn einer systematischen Behandlung der Algebra, so muß das Hilfsmittel der Einheitswurzeln vermieden werden. Das kann leicht auf folgendem Wege geschehen.

Wir verstehen unter

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1};\ R$$

algebraische Ausdrücke mit beliebig vielen Veränderlichen und setzen

$$\sqrt[n]{R} = r.$$

Dann stellen wir die Aufgabe, durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor D, aus

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{n-2} r^{n-2} + a_{n-1} r^{n-1} = 0$$

die Irrationalität r wegzuschaffen. Das geschieht durch Multiplikation mit

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-3} & r^{n-2} & r^{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_1 & a_0 & a_{n-1}R \\ a_{n-3} & a_{n-4} & a_{n-5} & \dots & a_0 & a_{n-1}R & a_{n-2}R \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & a_6R & a_5R & a_4R \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_5R & a_4R & a_3R \\ a_1 & a_0 & a_{n-1}R & \dots & a_4R & a_3R & a_2R \end{vmatrix}.$$

Denn

$$D \cdot (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{n-1} r^{n-1})$$

liefert, falls wir die Elemente der ersten Zeile einzeln mit der Klammer multiplizieren und dann von der so erhaltenen Zeile die zweite mit r^{n-1}, die dritte mit r^{n-2}, die vierte mit r^{n-3}, ..., die letzte nit r^1 multipliziert abziehen, den Wert

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1}R & a_{n-2}R & \dots & a_3R & a_2R & a_1R \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_1 & a_0 & a_{n-1}R \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_5R & a_4R & a_3R \\ a_1 & a_0 & a_{n-1}R & \dots & a_4R & a_3R & a_2R \end{vmatrix};$$

dieser enthält in der Tat r nicht mehr.

Gießen. E. NETTO.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zusätze zur Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Zu meinem Artikel über die Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen (Band II, Heft 5) ist S. 738 folgendes hinzuzufügen.

In der Dissertation von Emil Hilb, „Beiträge zur Theorie der Laméschen Funktionen“, München 1903, ist gezeigt, daß die von Lindemann gegebenen Entwicklungen von $\frac{1}{z_1 - z}$ nach Laméschen Funktionen in den angegebenen Gebieten nicht konvergieren. Die von Lindemann aufgestellten Konvergenzbedingungen sind zwar notwendig, aber nicht hinreichend. In der genannten Dissertation werden ferner neben der Klasse K noch andere Klassen von Laméschen Funktionen herangezogen.

Bei der Abfassung meines Artikels (Sommer 1898) existierte die Dissertation noch nicht, und im Frühjahr 1904, als ich während des Drucks dem Artikel Ergänzungen hinzufügte, war sie auf der hiesigen Universitätsbibliothek noch nicht vorhanden; sie ist mir erst nach Vollendung des Drucks bekannt geworden.

Halle a. S. A. WANGERIN.

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Appell, P., et Chappuis, J., Leçons de mécanique élémentaire à l'usage des élèves des classes de Mathématiques *A* et *B*. Conformément aux programmes du 31 mai 1902. Paris 1905, Gauthier-Villars. Fr. 4

Bachmann, P., Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. Fünfter Teil der Zahlentheorie. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 548 S.

Börnstein, R. und Marckwald, W., Sichtbare und unsichtbare Strahlen. Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 142 S. ℳ 1,25.

Bucherer, A. H., Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. Zweite Auflage. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 103 S.

Castelnuovo, G., Lezioni di geometria analitica e proiettiva. Volume II (Geometria analitica dello spazio — Superficie di secundo ordine). Rom 1905, Albrighi, Segati & Co. 497—748.

Couturat, L., L'algèbre de la logique. (Scientia No. 24). Paris 1905, Gauthier-Villars. 100 S. Fr. 2.

Doll, M. und Nestle, P., Lehrbuch der praktischen Geometrie. Zweite Auflage. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 164 S.

Festschrift Adolph Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage 13. Juni 1905 von der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 264 S.

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. Erster Band. Einführung in die Mechanik. Dritte Auflage. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 428 S.

Holzmüller, G., Die Planimetrie für die Gymnasien. Erster Teil. Zweite Auflage. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 240 S.

Jäger, G., Theoretische Physik II (Licht und Wärme) 153 S., Theoretische Physik III (Elektrizität und Magnetismus) 149 S. (Sammlung Göschen Nr. 77, 78). Leipzig 1905, Göschen.

Kohlrausch, F., Lehrbuch der praktischen Physik. Zehnte Auflage. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 656 S.

Kübler, J., Die natürliche Entwicklung der Materie im Weltraum und die daraus hervorgehenden Weltgesetze. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Liebmann, H., Notwendigkeit und Freiheit in der Mathematik. Akademische Antrittsvorlesung. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Lindelöf, E., Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. E. Borel). Paris 1905, Gauthier-Villars. 141 S. Fr. 3,50

Mie, G., Moleküle, Atome, Weltäther. Aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 137 S. ℳ 1,25.

Müller, H., Aus dem Handbuch für Lehrer höherer Schulen: Rechnen und Mathematik. Leipzig 1905, B. G. Teubner. S. 81—128.

v. Papius, Das Radium und die radioaktiven Stoffe. Gemeinverständliche Darstellung nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung. Berlin 1905, G. Schmidt. 90 S.

Schwering, K., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Dritter Lehrgang. Zweite, verbesserte Auflage. Freiburg i. B. 1904, Herder. ℳ 1,50.

Schwering, K., und Krimphoff, W., Ebene Geometrie, nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. Fünfte Auflage. Freiburg i. B. 1905, Herder. ℳ 2,00

Thomson, J. J., Elektrizitätsdurchgang in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von E. Marx. In drei Lieferungen. Erste Lieferung. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 217 S

Wicke, F., Über Ultra-Bernoullische und Ultra-Eulersche Zahlen und Funktionen und deren Anwendung auf die Summation von unendlichen Reihen. Inaug. Diss. Jena; Leipzig 1905, B. G. Teubner. 68 S.

Zetzsche, Ebene und räumliche Geometrie. 4. Auflage. Leipzig 1905, J. J. Weber. 408 S. ℳ 4.

Berichtigungen zum 2. Heft des 9. Bandes.

S. 188, Z. 1 v. u. lies **114** statt **115**,

S. 202 in Anm. 1, lies **5** statt **6**,

S. 203 in Gl. (4) lies $\beta_1 = \frac{\beta}{2\alpha_1}$,

S. 203, Z. 3 v. u. lies $-\varrho^2$ statt $-\varrho$.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:
E. Cesàro, E. Eckhardt, P. Epstein, A. Fleck, A. Gleichen, W. Godt, R. Graf, G. Holzmüller, K. Haurath, J. Horn, Ed. Janisch, E. P. Jourdain, F. Jung, A. Kiefer, G. Kober, F. Koch, P. Köhler, M. Krause, M. Lerch, W. Ludwig, E. Malo, L. Matthiessen, O. Meissner, W. F. Meyer, J. Neuberg, J. Reisacher, J. Reusch, L. Saalschütz, Y. Sawayama, P. Schafheitlin, E. Schultz, R. Schüssler, C. Segre, O. Spieß, H. Stahl, R. Sturm, G. Teixeira, H. Thieme, W. Velten, A. Vlasyn, J. de Vries, G. Wallenberg, A. Wendler, K. Zorawski.

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE (IN BERLIN) **W. FRANZ MEYER** (IN KÖNIGSBERG I/PR.) **E. JAHNKE** (IN BERLIN)

9. BAND. 4. HEFT.

MIT 2 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 31. OKTOBER 1905.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigkirchstraße 6[I]

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

(Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.)

Sur l'équation différentielle de Monge;

Par M. W. Kapteyn à Utrecht.

1. Le présent mémoire est consacré à l'étude de l'équation différentielle partielle de Monge

$$Hr + 2Ks + Lt = 0 \tag{1}$$

où les fonctions H, K et L sont indépendantes des variables x, y et z et dépendent par suite seulement des dérivées du premier ordre p et q.

Nous nous proposons d'abord de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) admette deux intégrales intermédiaires. En supposant ces conditions remplies, nous cherchons ensuite ces intégrales intermédiaires elles-mêmes.

Voici les résultats de nos recherches.

Pour que l'équation (1) admette deux intégrales intermédiaires, il faut et il suffit que

$$\frac{H}{\theta_{11}} = \frac{K}{\theta_{12}} = \frac{L}{\theta_{22}} \tag{2}$$

et que

$$2D\left(\theta_{22}\frac{\partial^2 D}{\partial p^2} - 2\theta_{12}\frac{\partial^2 D}{\partial p \partial q} + \theta_{11}\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}\right) = 3\left[\theta_{22}\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2 - 2\theta_{12}\frac{\partial D}{\partial p}\cdot\frac{\partial D}{\partial q} + \theta_{11}\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2\right], \tag{3}$$

où

$$D = \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}}.$$

Dans ces équations θ_{11}, θ_{12}, θ_{22} représentent les dérivées secondes de la fonction la plus générale satisfaisant à l'équation différentielle (3) du quatrième ordre.

L'intégration de cette équation (3) donne pour intégrale générale

$$\begin{cases} p = \dfrac{g' - h'}{u - v}, \qquad q = \dfrac{\varphi' - \psi'}{u - v}, \\ \theta = 2\int g'\varphi'' du - 2\int h'\psi'' dv - (g' - h')(\varphi' + \psi') \\ \quad - \dfrac{2}{u - v}[(g - h)(\varphi' - \psi') - (\varphi - \psi)(g' - h')], \end{cases} \tag{4}$$

où u et v sont deux paramètres variables et

$$g = g(u), \quad h = h(v), \quad \varphi = \varphi(u), \quad \psi = \psi(v)$$

représentent quatre fonctions arbitraires de la seule variable u ou v, tandis que $g' = \frac{dg}{du}$, $g'' = \frac{d^2g}{du^2}$ etc.

Si les conditions (2) et (3) sont remplies, l'équation (1) admet les deux intégrales intermédiaires

$$z - y\varphi'' - xg'' = \mathfrak{F}(u), \quad z - y\psi'' - xh'' = \mathfrak{F}(v), \tag{5}$$

$\mathfrak{F}$ étant une fonction arbitraire et u et v les fonctions de p et q qui résultent des équations (4).

2. Dans sa thèse, du plus haut intérêt (Klausenburg 1880), M. J. Vályi a déjà donné la condition (3). En partant de l'équation

$$\theta_{11} r + 2\theta_{12} s + \theta_{22} t = 0,$$

il arrive à une condition équivalente à la condition (3). Après une transformation ingénieuse il en déduit une intégrale particulière renfermant trois constantes arbitraires. De cette intégrale il se propose de déduire l'intégrale générale d'après la méthode de W. Imschenetsky. De cette manière il tombe sur une équation différentielle qui paraît être inabordable. En suivant à peu près le même chemin nous obtenons cependant une équation différentielle qui est parfaitement intégrable. Il nous semble qu'il s'est glissé malheureusement une erreur dans le calcul de M. Vályi et que c'est à cause de cette erreur que le résultat (4) lui est échappé.

La même condition se rencontre aussi dans un mémoire intéressant (Math. Ann. T. **44**) de M. J. Kürschak. Son point de départ est le même que celui de M. Vályi et il arrive par une méthode très élégante à la même condition (3). Il ne s'arrête point à l'intégration de cette équation différentielle, mais en admettant que la fonction θ satisfasse à la condition (3) il s'occupe principalement des intégrales intermédiaires. Il démontre que le problème de trouver ces intégrales se réduit à la solution de deux équations différentielles ordinaires du premier ordre dont la solution n'exige tout au plus qu'une quadrature; seulement il ne donne pas explicitement ces intégrales.

3. En adoptant pour l'équation (1) la forme

$$r + (\lambda + \mu)s + \lambda\mu t = 0, \tag{6}$$

λ et μ étant des fonctions indéterminées des variables p et q, les deux systèmes de caractéristiques sont définis par les équations suivantes

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad dz - pdx - qdy = 0,$$
$$dy - \mu dx = 0, \qquad dy - \lambda dx = 0,$$
$$dp + \lambda dq = 0, \qquad dp + \mu dq = 0.$$

Les combinaisons intégrables de ces systèmes correspondent, d'après la théorie, avec les intégrales communes des deux systèmes linéaires

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A(V) = \dfrac{\partial V}{\partial q} - \lambda \dfrac{\partial V}{\partial p} = 0, \\ B(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial V}{\partial y} + (p + \mu q) \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

et

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} A_1(V) = \dfrac{\partial V}{\partial q} - \mu \dfrac{\partial V}{\partial p} = 0, \\ B_1(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial V}{\partial y} + (p + \lambda q) \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant que l'équation donnée possède deux intégrales intermédiaires. Dans ce cas il faut et il suffit que chacun des deux systèmes linéaires précédents admette deux intégrales communes. En déduisant des équations $A(V) = 0$ et $B(V) = 0$ les nouvelles équations

$$C(V) = AB(V) - BA(V) = 0,$$
$$D(V) = AC(V) - CA(V) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

pour obtenir le système complet, il est évident que ce système complet doit se réduire à trois équations indépendantes. Cette condition sera remplie si l'équation $D(V) = 0$ dépend linéairement des trois premières. En développant

$$C(V) = A(\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + A(p + \mu q) \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$
$$D(V) = AA(\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + AA(p + \mu q) \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

la condition cherchée prend la forme

$$\frac{AA(\mu)}{A(\mu)} = \frac{AA(p + \mu q)}{A(p + \mu q)}.$$

De la même manière le système (II) donne

$$\frac{A_1 A_1(\lambda)}{A_1(\lambda)} = \frac{A_1 A_1(p + \lambda q)}{A_1(p + \lambda q)}.$$

Ces conditions, ou

$$(\lambda - \mu) AA(\mu) = A(\lambda) A(\mu) - 2A^2(\mu),$$
$$(\lambda - \mu) A_1 A_1(\lambda) = - A_1(\lambda) A_1(\mu) + 2A_1^2(\lambda),$$

sont donc nécessaires et suffisantes pour que chaque système de caractéristiques admette deux combinaisons intégrables.

4. Proposons-nous maintenant de réduire les conditions précédentes ou les suivantes

$$(7)\quad \begin{cases} (\lambda-\mu)[AA(\mu)+A_1A_1(\lambda)] \\ \qquad\qquad = A(\lambda)A(\mu)-A_1(\lambda)A_1(\mu)-2A^2(\mu)+2A_1^2(\lambda), \\ (\lambda-\mu)[AA(\mu)-A_1A_1(\lambda)] \\ \qquad\qquad = A(\lambda)A(\mu)+A_1(\lambda)A_1(\mu)-2A^2(\mu)-2A_1^2(\lambda) \end{cases}$$

que l'on en déduit par addition et soustraction. En remarquant que

$$(\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial p}=A_1-A, \quad (\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial q}=\lambda A_1-\mu A$$

on a, en omettant pour un moment les parenthèses:

$$\begin{aligned} A_1A\mu+A_1A_1\lambda-AA\mu-AA_1\lambda &= (A_1-A)(A\mu+A_1\lambda) \\ &= (\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial p}(A\mu+A_1\lambda)=P, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda A_1A\mu+\lambda A_1A_1\lambda-\mu AA\mu-\mu AA_1\lambda &= (\lambda A_1-\mu A)(A\mu+A_1\lambda) \\ &= (\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial q}(A\mu+A_1\lambda)=Q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda A_1A\mu+\mu A_1A_1\lambda-\lambda AA\mu-\mu AA_1\lambda \\ &\qquad = (A_1-A)(\lambda A\mu+\mu A_1\lambda)+A\lambda A\mu-A_1\lambda A_1\mu \\ &\qquad = (\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial p}(\lambda A\mu+\mu A_1\lambda)+A\lambda A\mu-A_1\lambda A_1\mu \\ &\qquad = R+A\lambda A\mu-A_1\lambda A_1\mu=R', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda^2A_1A\mu+\lambda\mu A_1A_1\lambda-\lambda\mu AA\mu-\mu^2AA_1\lambda \\ &= (\lambda A_1-\mu A)(\lambda A\mu+\mu A_1\lambda)+\mu A\lambda A\mu-\lambda A_1\lambda A_1\mu-(\lambda-\mu)A_1\lambda A\mu \\ &= (\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial q}(\lambda A\mu+\mu A_1\lambda)+\mu A\lambda A\mu-\lambda A_1\lambda A_1\mu-(\lambda-\mu)A_1\lambda A\mu \\ &= S+\mu A\lambda A\mu-\lambda A_1\lambda A_1\mu-(\lambda-\mu)A_1\lambda A\mu=S'. \end{aligned}$$

De ces quatre équations il résulte

$$AA(\mu)=\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}[\lambda\mu P-\mu Q-\lambda R'+S'],$$

$$A_1A_1(\lambda)=-\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}[\lambda\mu P-\lambda Q-\mu R'+S'],$$

par suite

$$(\lambda-\mu)[AA\mu+A_1A_1\lambda]=Q-R',$$

$$(\lambda-\mu)[AA\mu-A_1A_1\lambda]=\frac{1}{\lambda-\mu}[2\lambda\mu P-(\lambda+\mu)(Q+R')+2S'].$$

En posant maintenant $\lambda = a + b$, $\mu = a - b$ on aura

$$2b^4 \frac{\partial}{\partial p} \frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} = 2b^2 \frac{\partial}{\partial p}(A\mu + A_1\lambda) - (A\mu + A_1\lambda)(A_1 - A)(\lambda - \mu)$$

ou

$$\frac{2}{b^2} \frac{\partial}{\partial p}(A\mu + A_1\lambda)$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial p} \frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} + \frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} \cdot \frac{A\mu + A_1\lambda - A\lambda - A_1\mu}{b^2}.$$

De la même manière on obtient

$$\frac{2}{b^2} \frac{\partial}{\partial q}(A\mu + A_1\lambda)$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial q} \frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} + \frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} \cdot \frac{\lambda A_1\lambda - \lambda A_1\mu - \mu A\lambda + \mu A\mu}{b^2},$$
$$\frac{2}{b^2} \frac{\partial}{\partial p}(\lambda A\mu + \mu A_1\lambda)$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial p} \frac{\lambda A\mu + \mu A_1\lambda}{b^2} + \frac{\lambda A\mu + \mu A_1\lambda}{b^2} \cdot \frac{A\mu + A_1\lambda - A\lambda - A_1\mu}{b^2},$$
$$\frac{2}{b^2} \frac{\partial}{\partial q}(\lambda A\mu + \mu A_1\lambda)$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial q} \frac{\lambda A\mu + \mu A_1\lambda}{b^2} + \frac{\lambda A\mu + \mu A_1\lambda}{b^2} \cdot \frac{\lambda A_1\lambda - \lambda A_1\mu - \mu A\lambda + \mu A\mu}{b^2}.$$

En calculant $Q - R'$ avec ces valeurs, on trouve

$$Q - R' = 2b^2\left[\frac{\partial}{\partial q} \frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\lambda A\mu + \mu A_1\lambda}{b^2}\right]$$
$$+ A\lambda A\mu - A_1\lambda A_1\mu - 2A^2\mu + 2A_1^2\lambda,$$

par suite la première équation prend la forme

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\lambda A\mu + \mu A_1\lambda}{b^2}. \tag{8}$$

Si

$$\frac{A\mu + A_1\lambda}{b^2} = -\frac{2}{D} \frac{\partial D}{\partial p},$$

on a, d'après l'équation (8)

$$\frac{\lambda A\mu + \mu A_1\lambda}{b^2} = -\frac{2}{D} \frac{\partial D}{\partial q}.$$

En introduisant ces valeurs, la seconde des équations (7) s'écrit

$$2\lambda\mu = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial p}\right) - 2(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial p}\right) + 2\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial q}\right)$$
$$= \lambda\mu\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2 - (\lambda + \mu)\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial p}\right)\left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial q}\right) + \left(\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2. \tag{9}$$

5. Comme

$$A(\mu) + A_1(\lambda) = 2\left(\frac{\partial a}{\partial q} - a\frac{\partial a}{\partial p} + b\frac{\partial b}{\partial p}\right),$$

$$\lambda A(\mu) + \mu A_1(\lambda) = 2\left[a\frac{\partial a}{\partial q} - (a^2 + b^2)\frac{\partial a}{\partial p} + 2ab\frac{\partial b}{\partial p} - b\frac{\partial b}{\partial q}\right],$$

l'équation (8) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{\frac{\partial a}{\partial q} - a\frac{\partial a}{\partial p} + b\frac{\partial b}{\partial p}}{b^2} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{a\frac{\partial a}{\partial q} - (a^2+b^2)\frac{\partial a}{\partial p} + 2ab\frac{\partial b}{\partial p} - b\frac{\partial b}{\partial q}}{b^2},$$

ou, si l'on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{b\frac{\partial b}{\partial p}}{b^2} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{b\frac{\partial b}{\partial q}}{b^2},$$

elle prend la forme plus simple

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{\frac{\partial a}{\partial q} - a\frac{\partial a}{\partial p} + 2b\frac{\partial b}{\partial p}}{b^2} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{a\frac{\partial a}{\partial q} - (a^2+b^2)\frac{\partial a}{\partial p} + 2ab\frac{\partial b}{\partial p}}{b^2}.$$

En posant

$$\frac{\partial a}{\partial q} - a\frac{\partial a}{\partial p} + 2b\frac{\partial b}{\partial p} = -b^2\cdot\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial p}$$

on aura

$$a\frac{\partial a}{\partial q} - (a^2 + b^2)\frac{\partial a}{\partial p} + 2ab\frac{\partial b}{\partial p} = -b^2\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial q},$$

ϱ étant une fonction de p et q.

De ces équations on déduira

$$\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial p}a = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial q}$$

et par suite, $\varphi(q)$ étant une fonction arbitraire de q,

$$a = \frac{1}{\varrho}\left[\int\frac{\partial \varrho}{\partial q}dp + \varphi(q)\right].$$

En choisissant maintenant une fonction $\tau = \tau(q)$ de la seule variable q et une fonction $\sigma = \sigma(p, q)$ des deux variables p et q, telles que

$$\varphi(q) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial q^2}, \quad \varrho = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2},$$

la valeur précédente de a prend la forme

$$a = \frac{1}{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2}}\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial q^2}\right] = \frac{\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial q}\right)}{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial q}\right)}$$

ou, en écrivant $\frac{\partial \sigma}{\partial p}+\frac{\partial \tau}{\partial q}=\frac{\partial \theta}{\partial p}$,

$$a=\frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial p\,\partial q}}{\frac{\partial^2\theta}{\partial p^2}}=\frac{\theta_{12}}{\theta_{11}}.$$

Cela posé, l'équation

$$\frac{\partial a}{\partial q}-a\frac{\partial a}{\partial p}+2b\frac{\partial b}{\partial p}=-\frac{b^2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial p},$$

donne

$$\frac{\partial (b^2)}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial p}b^2=a\frac{\partial a}{\partial p}-\frac{\partial a}{\partial q},$$

d'où

$$b^2=\frac{1}{\varrho}\left[\int\varrho\left(a\frac{\partial a}{\partial p}-\frac{\partial a}{\partial q}\right)dp+\psi(q)\right],$$

$\psi(q)$ représentant une fonction arbitraire de q.

Or,

$$\varrho\left(a\frac{\partial a}{\partial p}-\frac{\partial a}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\frac{\theta_{12}^2-\theta_{11}\theta_{22}}{\theta_{11}},$$

par suite

$$b^2=\frac{1}{\theta_{11}}\left(\frac{\theta_{12}^2-\theta_{11}\theta_{22}}{\theta_{11}}+\psi(q)\right).$$

On verra aisément qu'on ne diminue point la généralité en posant

$$b^2=\frac{\theta_{12}^2-\theta_{11}\theta_{22}}{\theta_{11}^2};$$

pour cela en effet on n'a qu'à ajouter à la fonction θ une fonction convenable de q.

Des valeurs précédentes se déduit enfin

$$\lambda+\mu=2a=2\frac{\theta_{12}}{\theta_{11}},\quad \lambda\mu=\frac{\theta_{22}}{\theta_{11}}$$

ou la première condition annoncée

$$\frac{H}{\theta_{11}}=\frac{K}{\theta_{12}}=\frac{L}{\theta_{22}}. \tag{2}$$

6. Si maintenant nous introduisons les valeurs trouvées pour λ et μ dans l'équation (9), celle-ci s'écrit

$$2D\left(\theta_{22}\frac{\partial^2 D}{\partial p^2}-2\theta_{12}\frac{\partial^2 D}{\partial p\partial q}+\theta_{11}\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}\right)$$
$$=3\left[\theta_{22}\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2-2\theta_{12}\frac{\partial D}{\partial p}\frac{\partial D}{\partial q}+\theta_{11}\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2\right], \tag{3}$$

où

$$D=b\varrho=\sqrt{\theta_{12}^2-\theta_{11}\theta_{22}}.$$

Choisissons d'après M. Vályi comme variables indépendantes q et θ_1 et posons avec lui

$$\frac{\partial D}{\partial p} = D_1, \quad \frac{\partial D}{\partial \theta_1} = D_2, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial q^2} = D_{11}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial q \partial \theta_1} = D_{12}, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \theta_1^2} = D_{22},$$

alors

$$\frac{\partial D}{\partial p} = \theta_{11} D_2, \qquad \frac{\partial D}{\partial q} = D_1 + \theta_{12} D_2,$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial p^2} = \theta_{11}^2 D_{22} + \theta_{111} D_2, \qquad \frac{\partial^2 D}{\partial q^2} = \theta_{12}^2 D_{22} + D_{11} + 2\theta_{12} D_{12} + \theta_{122} D_2,$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial p \partial q} = \theta_{11} D_{12} + \theta_{11}\theta_{12} D_{22} + \theta_{112} D_2.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (3), celle-ci prend la forme

$$- 2\theta_{11} D^3 D_{22} + 2\theta_{11} D D_{11} + 3\theta_{11} D^2 D_2^2 - 3\theta_{11} D_1^2$$
$$+ 2 D D_2 (\theta_{22}\theta_{111} - 2\theta_{12}\theta_{112} + \theta_{11}\theta_{122}) = 0.$$

Or, en différentiant $- D^2 = \theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}^2$ par rapport à p on a

$$- 2 D D_2 \theta_{11} = \theta_{22}\theta_{111} - 2\theta_{12}\theta_{112} + \theta_{11}\theta_{122},$$

par suite l'équation précédente se réduit à

$$2 D D_{11} - 2 D^3 D_{22} - 3 D_1^2 - D^2 D_2^2 = 0. \tag{10}$$

7. Cette équation différentielle de la forme

$$2zr - 2z^3 t - 3p^2 - z^2 q^2 = 0, \tag{11}$$

dont les caractéristiques sont définies par les équations suivantes

$$dz - pdx - qdy = 0, \qquad dz - pdx - qdy = 0,$$
$$dy - zdx = 0, \qquad dy + zdx = 0,$$
$$2zdp - 2z^2 dq - (3p^2 + z^2 q^2) dx = 0, \quad 2zdp + 2z^2 dq - (3p^2 + z^2 q^2) dx = 0,$$

présente la particularité que chacun de ces systèmes admet une combinaison intégrable. En effet le premier système donne

$$2p(dz - pdx - qdy) + 2pq(dy - zdx) - 2zdp$$
$$+ 2z^2 dq + (3p^2 + z^2 q^2) dx = 0$$

d'où

$$x + \frac{2z}{p - qz} = \alpha = \text{const.},$$

et le second système

$$2p(dz - pdx - qdy) + 2pq(dy + zdx) - 2zdp$$
$$- 2z^2 dq + (3p^2 + z^2 q^2) dx = 0$$

d'où

$$x + \frac{2z}{p + qz} = \beta = \text{const.}$$

Il s'ensuit qu'il existe une transformation de contact qui ramène l'équation (11) à la forme

$$s' + \lambda(x'y'z'p'q') = 0.$$

Pour la trouver, cherchons d'abord une fonction γ formant avec α et β un système en involution. Comme cette fonction doit satisfaire aux deux équations simultanées

$$z\frac{\partial \gamma}{\partial x} + qz\frac{\partial \gamma}{\partial z} + pq\frac{\partial \gamma}{\partial p} = 0$$

et

$$2z\frac{\partial \gamma}{\partial x} + 2pz\frac{\partial \gamma}{\partial z} + (3p^2 + q^2z^2)\frac{\partial \gamma}{\partial p} + 2pq\frac{\partial \gamma}{\partial q} = 0,$$

on aperçoit aisément que l'on peut choisir

$$\gamma = \frac{z}{q} - y.$$

Déterminons ensuite deux fonctions ϱ et σ de x, y, z, p, q donnant lieu à l'identité

$$d\gamma - \varrho d\alpha - \sigma d\beta = k(dz - pdx - qdy).$$

Ces fonctions étant

$$\varrho = \frac{(p+qz)^2}{2q^2z}, \qquad \sigma = -\frac{(p-qz)^2}{2q^2z},$$

la transformation de contact cherchée est définie par les équations

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = \alpha = x + \dfrac{2z}{p-qz}, \quad y' = \beta = x + \dfrac{2z}{p+qz}, \quad z' = \gamma = \dfrac{z}{q} - y, \\ p' = \varrho = -\dfrac{(p-qz)^2}{4q^2z}, \quad q' = \sigma = \dfrac{(p+qz)^2}{4q^2z}. \end{cases}$$

Si maintenant on écrit au lieu du premier système de caractéristiques le système

$$\begin{aligned} &dz - pdx - qdy = 0, \\ &dz - (p + zq)dx = 0, \\ &2zdp - 2z^2dq - (3p^2 + z^2q^2)dx = 0, \end{aligned}$$

ou le suivant

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

$$2p[dz - (p + qz)dx] - [2zdp - 2z^2dy - (3p^2 + z^2q^2)dx] = 0,$$

$$\frac{p^2+q^2z^2}{q^2z(p+qz)}[dz-(p+qz)dx] - \frac{1}{2zq^2}[2zdp-2z^2dq-(3p^2+z^2q^2)dx]=0,$$

la transformation précédente conduit aisément au système

$$dz' - p'dx' - q'dy' = 0, \qquad dx' = 0,$$

$$(x' - y')dp' - 2i\sqrt{p'q'}dy' = 0.$$

A ce système correspond enfin l'équation différentielle transformée

$$(x'-y')s' - 2i\sqrt{p'q'} = 0,$$

dont l'intégrale générale s'écrit[1])

$$z' = \int X'^2 dx' - \int Y'^2 dy' - \frac{(X-Y)^2}{x'-y'},$$

X et Y étant deux fonctions arbitraires de x' et y' respectivement.

Pour faire disparaître tout signe d'intégration, il suffira d'exprimer x' et X en fonction d'une variable auxiliaire u, de telle façon que $\int X'^2 dx'$ s'exprime aussi explicitement, et de même pour y' et Y. Nous n'avons pour cela qu'à poser

$$X' = u, \qquad Y' = v, \qquad x' = \varphi''(u), \qquad y' = \psi''(v),$$

ce qui donne

$$X = \int X' dx' = u\varphi'' - \varphi', \qquad Y = \int Y' dy' = v\psi'' - \psi',$$

$$\int X'^2 dx' = u^2\varphi'' - 2u\varphi' + 2\varphi, \qquad \int Y'^2 dy' = v^2\psi'' - 2v\psi' + 2\psi.$$

En définitive, l'intégrale précédente est représentée par les formules suivantes, où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires, u et v deux paramètres variables:

$$x' = \varphi''(u), \qquad y' = \psi''(v),$$
$$z' = u^2\varphi'' - 2u\varphi' + 2\varphi - v^2\psi'' + 2v\psi' - 2\psi - \frac{[u\varphi'' - \varphi' - v\psi'' + \psi']^2}{\varphi'' - \psi''}.$$

Pour déduire de cette intégrale l'intégrale générale de l'équation (11) nous n'avons qu'à déterminer p' et q' en fonction de u et v et de résoudre les équations (12). Or,

$$p' = \left(X' - \frac{X-Y}{x'-y'}\right)^2 = \left(\frac{(v-u)\psi'' + \varphi' - \psi'}{\varphi'' - \psi''}\right)^2,$$

$$q' = -\left(Y' - \frac{X-Y}{x'-y'}\right)^2 = -\left(\frac{(v-u)\varphi'' + \varphi' - \psi'}{\varphi'' - \psi''}\right)^2,$$

par suite

$$\frac{p'}{q'} = -\left(\frac{y'-x}{x'-x}\right)^2 = -\left(\frac{\psi''-x}{\varphi''-x}\right)^2 = -\left(\frac{(v-u)\psi'' + \varphi' - \psi'}{(v-u)\varphi'' + \varphi' - \psi'}\right)^2,$$

d'où

$$x = \frac{\varphi' - \psi'}{u - v}.$$

---

1) Goursat, Equations aux dérivées partielles du second ordre T. II. p. 252.

Les deux premières équations (12) donnent ensuite

$$q = \frac{x'-y'}{(x'-x)(y'-x)} = \frac{(\varphi''-\psi'')(u-v)^2}{[(u-v)\varphi''-(\varphi'-\psi')][(u-v)\psi''-(\varphi'-\psi')]}$$

et la dernière

$$z = \left(\frac{x'-y'}{x'-x}\right)^2 q' = -(u-v)^2.$$

De la troisième on tire en dernier lieu

$$y = (\varphi'+\psi')(u-v) - 2(\varphi-\psi).$$

Remarquons encore que l'équation différentielle (11) ne change pas si l'on remplace y et z par $-y$ et $-z$; ainsi la solution cherchée est représentée par les formules:

$$x = \frac{\varphi'-\psi'}{u-v}, \quad y = 2(\varphi-\psi)-(\varphi'+\psi')(u-v), \quad z = (u-v)^2. \tag{13}$$

8. En revenant à l'équation différentielle (10) l'intégrale générale de cette équation s'exprime:

$$\begin{cases} D = \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}} = (u-v)^2, \\ \theta_1 = 2(\varphi-\psi)-(\varphi'+\psi')(u-v), \\ q \;= \dfrac{\varphi'-\psi'}{u-v}. \end{cases} \tag{14}$$

Il nous reste encore le problème de chercher la forme la plus générale de θ qui satisfait à ces formules.

Pour y arriver nous commencerons par déterminer la valeur de p en fonction de u et v.

En posant

$$T = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial u} & \dfrac{\partial q}{\partial u} \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} & \dfrac{\partial q}{\partial v} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

les équations

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial u} = \theta_{11}\frac{\partial p}{\partial u} + \theta_{12}\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial u} = \theta_{12}\frac{\partial p}{\partial u} + \theta_{22}\frac{\partial q}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial v} = \theta_{11}\frac{\partial p}{\partial v} + \theta_{12}\frac{\partial q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial v} = \theta_{12}\frac{\partial p}{\partial v} + \theta_{22}\frac{\partial q}{\partial v}$$

donnent

$$\begin{cases} T\theta_{11} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u} & \dfrac{\partial q}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \theta_1}{\partial v} & \dfrac{\partial q}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad T\theta_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial u} & \dfrac{\partial \theta_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} & \dfrac{\partial \theta_1}{\partial v} \end{vmatrix}, \\ T\theta_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \theta_2}{\partial u} & \dfrac{\partial q}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \theta_2}{\partial v} & \dfrac{\partial q}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad T\theta_{22} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial u} & \dfrac{\partial \theta_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial p}{\partial v} & \dfrac{\partial \theta_2}{\partial v} \end{vmatrix}. \end{cases} \tag{16}$$

En introduisant dans les deux formules pour θ_{12} les valeurs

$$(17) \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{1}{(u-v)^2}\frac{\partial \theta_1}{\partial u}, \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{1}{(u-v)^2}\frac{\partial \theta_1}{\partial v},$$

que l'on tire des équations (14), on obtient

$$(18) \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial v}\frac{\partial \theta_2}{\partial u} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_2}{\partial v} = (u-v)^4\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right).$$

Or, d'après les équations (16),

$$\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22} = (u-v)^4$$

prend la forme

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial v}\frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_2}{\partial v} = (u-v)^4\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right),$$

par suite

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial v}\frac{\partial \theta_2}{\partial u} = (u-v)^4\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \theta_1}{\partial u}\frac{\partial \theta_2}{\partial v} = (u-v)^4\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u},$$

ou, ayant égard aux formules (17):

$$(20) \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial u} = (u-v)^2\frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial v} = -(u-v)^2\frac{\partial p}{\partial v}.$$

Les dernières équations donnent

$$(21) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u\, dv} - \frac{1}{u-v}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{1}{u-v}\frac{dp}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$(22) \qquad p = \frac{1}{u-v}[g'(u) - h'(v) = \frac{g'-h'}{u-v}.$$

Pour déterminer maintenant θ, on n'a qu'à substituer cette valeur de p dans les équations (20). On obtient ainsi

$$(23) \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial u} = (u-v)g'' - (g'-h'), \qquad \frac{\partial \theta_2}{\partial v} = (u-v)h'' - (g'-h'),$$

d'où

$$(24) \qquad \theta_2 = -2(g-h) + (g'+h')(u-v).$$

De cette formule et de la formule (14) pour θ_1 on obtient aisément la valeur de θ. En effet on a

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{1}{(u-v)^2}\left(\theta_1\frac{\partial \theta_2}{\partial u} - \theta_2\frac{\partial \theta_1}{\partial u}\right), \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{(u-v)^2}\left(\theta_2\frac{\partial \theta_1}{\partial v} - \theta_1\frac{\partial \theta_2}{\partial v}\right),$$

par suite

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = (g'+h')\varphi'' - (\varphi'+\psi')g''$$
$$- \frac{2}{u-v}[(g-h)\varphi'' + g'(\varphi'-\psi') - (\varphi-\psi)g'' - \varphi'(g'-h')]$$
$$- \frac{2}{(u-v)^2}[(\varphi-\psi)(g'-h') - (g-h)(\varphi'-\psi')].$$

En intégrant par rapport à u

$$\theta = \int (g'\varphi'' - \varphi' g'')du + h'\varphi' - g'\psi'$$
$$- \frac{2}{u-v}[(g-h)(\varphi'-\psi') - (\varphi-\psi))(g'-h')] + k(v).$$

La fonction arbitraire $k(v)$ se déduit aisément de la comparaison des deux valeurs de $\frac{\partial \theta}{\partial u}$. De cette manière on trouve

$$\frac{\partial k}{\partial v} = \psi' h'' - h'\psi'',$$

d'où

$$\theta = \int (g'\varphi'' - \varphi' g'')du + \int (\psi' h'' - h'\psi'')dv + h'\varphi' - g'\psi'$$
$$- \frac{2}{u-v}[(g-h)(\varphi'-\psi') - (\varphi-\psi)(g'-h')].$$

En écrivant encore

$$\int (g'\varphi'' - \varphi' g'')du = -g'\varphi' + 2\int g'\varphi'' du,$$
$$\int (\psi' h'' - h'\psi'')dv = \quad h'\psi' - 2\int h'\psi'' dv,$$

on voit que la solution demandée sera représentée par les formules

$$(4) \quad \begin{cases} p = \frac{g'-h'}{u-v}, \qquad q = \frac{\varphi'-\psi'}{u-v}, \\ \theta = 2\int g'\varphi'' du - 2\int h'\psi'' dv - (g'-h')(\varphi'+\psi') \\ \quad - \frac{2}{u-v}[(g-h)(\varphi'-\psi') - (\varphi-\psi)(g'-h')]. \end{cases}$$

9. Considérons à présent, pour déterminer les intégrales intermédiaires, le système complet

$$A(V) = \frac{\partial V}{\partial q} - \lambda \frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$
$$B(V) = \frac{\partial V}{\partial x} + \mu \frac{\partial V}{\partial y} + (p + \mu q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$
$$C(V) = A(\mu)\frac{\partial V}{\partial y} + A(p + \mu q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

D'après les formules (14), (16), (17) et (20) on a

$$\theta_{11} = \frac{2(u-v)^2}{T}\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v},$$
$$\theta_{12} = -\frac{(u-v)^2}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right),$$
$$\theta_{22} = \frac{2(u-v)^2}{T}\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v},$$

par suite

$$\lambda = \frac{\theta_{12} + \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}}}{\theta_{11}} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial v}}{\frac{\partial q}{\partial v}}, \qquad \mu = \frac{\theta_{12} - \sqrt{\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22}}}{\theta_{11}} =$$

$$A(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial q} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{1}{T}\left[\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial u} - \lambda\left(\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)\right]$$

$$A(p + \mu q) = \mu - \lambda + qA(\mu) = q\frac{\frac{\partial \mu}{\partial v}}{\frac{\partial q}{\partial v}} - \frac{T}{\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}}.$$

Remarquons encore que d'après l'équation (21)

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial^2 q}{\partial u \partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}}{\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2} = \frac{\frac{\partial p}{\partial u}\left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial v}\right) - \frac{\partial q}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v}\right)}{(u - v)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}$$

$$= -\frac{T}{(u - v)\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2}.$$

Comme

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial v},$$

l'équation $A(V) = 0$ prend la forme simple $\frac{\partial V}{\partial v} = 0$; par co
F étant une fonction arbitraire:

$$V = F(x, y, z, u).$$

En substituant cette valeur dans l'équation $C(V) = 0$, cell

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \left(q - \frac{T}{\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}}\right)\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Or,

$$q - \frac{T}{\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \mu}{\partial v}} = q + (u - v)\frac{\partial q}{\partial u} = \varphi'',$$

par suite la fonction la plus générale qui satisfait simultané
équations $A(V) = 0$ et $C(V) = 0$ est représentée, G étant une
fonction arbitraire, par

$$F = G(x, \alpha, u), \qquad \alpha = z - y\varphi''.$$

En introduisant cette valeur dans l'équation $B(V) = 0$, c
réduit à

$$\frac{\partial G}{\partial x} + [p + \mu(q - \varphi'')]\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0$$

ou à

$$\frac{\partial G}{\partial x} + g''\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0,$$

parce que

$$p + \mu(q - \varphi'') = \frac{g' - h'}{u - v} - \frac{\frac{\partial p}{\partial u}}{\frac{\partial q}{\partial u}}\left(\frac{\varphi' - \psi'}{u - v} - \varphi''\right)$$

$$= \frac{g' - h'}{u - v} + (u - v)\frac{\partial p}{\partial u} = g''.$$

Il en résulte que les deux intégrales communes du système complet sont

$$u = \text{const.} \quad \text{et} \quad \alpha - xg'' = z - y\varphi'' - xg'' = \text{const.}$$

d'où, $\mathfrak{F}$ étant une fonction arbitraire, la première intégrale intermédiaire:

(25) $$z - y\varphi'' - xg'' = \mathfrak{F}(u).$$

En traitant de la même manière le second système complet

$$A_1(V) = \frac{\partial V}{\partial p} - \mu\frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$B_1(V) = \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda\frac{\partial V}{\partial y} + (p + \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

$$C_1(V) = A_1(\lambda)\frac{\partial V}{\partial y} + A_1(p + \lambda q)\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

on trouve pour la seconde intégrale intermédiaire

(26) $$z - y\psi'' - xh'' = \mathfrak{F}(v).$$

10. Il ne sera pas sans intérêt de montrer par un exemple comment se déterminent les fonctions g', h', φ' et ψ'.

L'équation différentielle

$$Hr + 2Ks + Lt = 0,$$

où

$$\begin{aligned} H &= pq\beta^2 - (1 + q^2)\alpha\beta, \\ 2K &= (1 + q^2)\alpha^2 - (1 + p^2)\beta^2, \\ L &= (1 + p^2)\alpha\beta - pq\alpha^2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha &= a + cp, \\ \beta &= b + cp, \end{aligned}$$

admet les deux intégrales intermédiaires

$$z + \frac{a + cp}{aq - bp}y - \frac{b + cq}{aq - bp}x = \mathfrak{F}\left(\frac{a + cp}{b + cq}\right),$$

$$z + \frac{b}{c}y + \frac{a}{c}x = \mathfrak{F}\left(\frac{ap + bq - c}{\sqrt{(a^2 + c^2)\beta^2 - 2ab\alpha\beta + (b^2 + c^2)\alpha^2}}\right);$$

il faut donc que $\frac{a+cp}{b+cp}$ soit une fonction de la seule variable u, et que $\frac{ap+bq-c}{\sqrt{(a^2+c^2)\beta^2-2ab\alpha\beta+(b^2+c^2)\alpha^2}}$ ne dépende que de la seule variable v.

Soit

$$\frac{\alpha}{\beta}=P(u), \qquad \frac{a\alpha+b\beta-m^2}{\sqrt{(a^2+c^2)\beta^2-2ab\alpha\beta+(b^2+c^2)\alpha^2}}=Q(v),$$

où

$$m^2=a^2+b^2+c^2.$$

En substituant $\alpha=\beta P$ dans la seconde de ces équations on a, en posant

$$\sqrt{a^2+c^2-2abP+(b^2+c^2)P^2}=M,$$

$$\frac{(aP+b)\beta-m^2}{\beta M}=Q,$$

d'où

$$\beta=\frac{m^2}{aP+b-MQ} \quad \text{et} \quad \alpha=\frac{m^2P}{aP+b-MQ}.$$

De ces valeurs on déduit aisément

$$p=\frac{(m^2-a^2)P+aMQ-ab}{c(aP+b-MQ)}, \qquad q=\frac{-abP+bMQ+m^2-b^2}{c(aP+b-MQ)}.$$

En identifiant ces valeurs avec les valeurs (4)

$$p=\frac{g'-h'}{u-v}, \qquad q=\frac{\varphi'-\psi'}{u-v}$$

on obtient, ε étant une constante indéterminée:

$$aP+b=\varepsilon uM, \qquad Q=\varepsilon v.$$

La première de ces équations détermine la fonction P; en effet elle donne

$$(aP+b)^2=\varepsilon^2u^2[a^2+c^2-2abP+(b^2+c^2)P^2],$$

d'où

$$P=\frac{ab(1+\varepsilon^2u^2)}{(b^2+c^2)\varepsilon^2u^2-a^2}+\frac{m\varepsilon u\sqrt{a^2+b^2-c^2\varepsilon^2u^2}}{(b^2+c^2)\varepsilon^2u^2-a^2}$$

et

$$M=\frac{aP+b}{\varepsilon u}=\frac{m^2b\varepsilon u+am\sqrt{a^2+b^2-c^2\varepsilon^2u^2}}{(b^2+c^2)\varepsilon^2u^2-a^2}.$$

Avec cette valeur de M on aura donc

$$g'=\frac{m^2-a^2}{ac}u-\frac{bm^2}{ac\varepsilon M}, \qquad h'=-\frac{a}{c}v,$$

$$\varphi'=-\frac{b}{c}u+\frac{m^2}{c\varepsilon M}, \qquad \psi'=-\frac{b}{c}v.$$

Comme

$$\frac{1}{M}=\frac{m^2b\varepsilon u-am\sqrt{a^2+b^2-c^2\varepsilon^2u^2}}{m^2(a^2+b^2)},$$

les expressions pour g' et φ' se réduiront à

$$g' = \frac{ac}{a^2+b^2}u + \frac{bm}{c\varepsilon(a^2+b^2)}\sqrt{a^2+b^2-c^2\varepsilon^2u^2},$$

$$\varphi' = \frac{bc}{a^2+b^2}u - \frac{am}{c\varepsilon(a^2+b^2)}\sqrt{a^2+b^2-c^2\varepsilon^2u^2}.$$

Pour déterminer la constante ε, remarquons qu'en posant

$$\theta_{11} = He^t, \quad \theta_{12} = Ke^t, \quad \theta_{22} = Le^t,$$

on aura

$$K\frac{\partial t}{\partial p} - H\frac{\partial t}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial K}{\partial p},$$

$$L\frac{\partial t}{\partial p} - K\frac{\partial t}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial p},$$

d'où se déduit aisément

$$\theta_{11} = \frac{H}{N^2}, \qquad \theta_{12} = \frac{K}{N^2}, \qquad \theta_{22} = \frac{L}{N^2},$$

$$N^2 = 4(K^2 - HL) = [(1+q^2)\alpha^2 - 2pq\alpha\beta + (1+p^2)\beta^2]^2,$$

par suite

$$\theta_{12}^2 - \theta_{11}\theta_{22} = \frac{K^2 - HL}{N^4} = \frac{1}{4N^2} = (u-v)^4.$$

Or,

$$N = \frac{\beta^2}{c^2}M = \frac{m^4}{c^2\varepsilon^2(u-v)^2},$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{m^2}{c}\sqrt{2}.$$

(Suite.)

Der Gauß-Lemoinesche Punkt im Kreisviereck.

Von Ernst Eckhardt in Homburg v. d. Höhe.

Fällt man von einem Punkte einer Ebene die Lote auf ein System von n Geraden derselben Ebene, so heißt der Punkt, für den die Summe der Quadrate jener Lote ein Minimum ist, der Gauß-Lemoinesche Punkt des Systems. Seine Bestimmung ist in voller Allgemeinheit analytisch und geometrisch auch für den Fall durchgeführt, daß die einzelnen Quadrate mit positiven oder negativen Faktoren behaftet sind, die man dann als ein System an den einzelnen Geraden parallel wirkender Kräfte ansehen kann.[1]) In allen diesen Arbeiten und den

1) Yvon Villarceau: C. R. de l'Ac. des Sciences de Paris, 72, 531—537 und 580—587, 1876; Bertot: C. R. 72, 682—685, 1876; d'Ocagne: C. R. 104, 1415—1416, 1892; d'Ocagne, Laisant: J. de l'Éc. Polyt., LXIIIe cahier, pp. 1—22, 22—25, 1893; Espanet, Duporcq, Neuberg: Intermédiaire des Math., 1899, pp. 20, 22, 277; Neuberg: Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles, t. XXIII, 1899, p. 27; Neuberg: Nieuw Archief voor Wiskunde, Tweede Reeks, Deel. IV, p. 192, 1899.

darin für das Vierseit, Viereck und n-Eck gegebenen interessanten Konstruktionen spielen der Schwerpunkt M_1 des Fußpunktpolygons eines beliebigen Punktes und der symmetrische Schwerpunkt M_2 von M eine wesentliche Rolle. Der Minimumpunkt ist der Punkt, welcher mit seinem symmetrischen Schwerpunkt zusammenfällt; er ist der Doppelpunkt zweier invers ähnlicher Figuren, deren Doppellinien parallel sind zu den Halbierungslinien der von zwei homologen Geraden gebildeten Winkel.

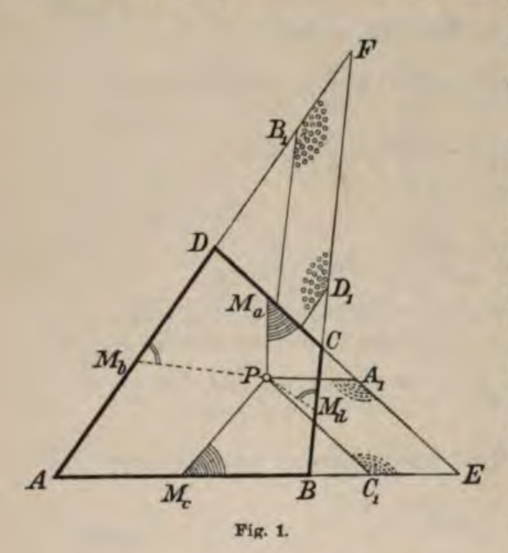


Fig. 1.

Bei der im folgenden zunächst für das Kreisviereck dargebotenen Behandlung wird von den Punkten M_1 und M_2 kein Gebrauch gemacht; in ihr treten die Seiten des Vierecks in den Vordergrund. Es wird eine Reihe neuer Eigenschaften des Minimumpunktes entwickelt, und hierdurch sowohl als durch die sich ergebende einfache Konstruktion dürfte vorliegende Arbeit einiges Interesse beanspruchen.

In dem Kreisviereck $ABCD$, Fig. 1, wähle man die Ecke A zum Koordinatenanfang, AB als die positive x-Achse und die Senkrechte in A auf AB im üblichen Sinne als y-Achse. Sind dann $AB = c$, $BC = d$, $CD = a$, $DA = b$ die Seiten des Kreisvierecks, $\sphericalangle DAB = \alpha$ und $\sphericalangle CDA = \delta$, so erhält man für die Abstände p_c, p_d, p_a, p_b des Punktes ξ, η von den Seiten AB, BC, CD, DA die Werte

$$\begin{aligned}
p_c &= +\eta, \\
p_d &= -\xi \sin\delta + \eta\cos\delta + c\sin\delta, \\
p_a &= -\xi\sin(\alpha+\delta) + \eta\cos(\alpha+\delta) + b\sin\delta, \\
p_b &= +\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Bei der Bestimmung der Vorzeichen dieser Lote ist zu beachten, daß

$$a\cdot p_a + b\cdot p_b + c\cdot p_c + d\cdot p_d = (a\cdot b + c\cdot d)\sin\delta$$

sein muß, was wegen der Beziehungen

$$\begin{aligned}
c - b\cos\alpha + a\cos(\alpha+\delta) + d\cos\delta = 0, \\
b\sin\alpha - a\sin(\alpha+\delta) - d\sin\delta = 0
\end{aligned}$$

in der Tat der Fall ist.

Die Bedingungen dafür, daß $V = p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + p_d^2$ ein Minimum wird, sind dann

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial \eta} = -\,\xi \cdot [\sin 2\alpha + \sin(2\alpha + 2\delta) + \sin 2\delta] \\ +2\eta \cdot [1 + \cos^2\alpha + \cos^2(\alpha+\delta) + \cos^2\delta] + 2[b\cos(\alpha+\delta) + c\cos\delta]\sin\delta = 0,\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial \xi} = 2\xi[\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+\delta) + \sin^2\delta] - \eta[\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+2\delta) + \sin 2\delta] \\ -\,2[b\sin(\alpha+\delta) + c\sin\delta]\sin\delta = 0.\end{cases}$$

Die Vereinfachung der Koeffizienten führt zu

$$(1_1)\begin{cases}-\,2\xi\cos\alpha\cos\delta\sin(\alpha+\delta) + 2\eta \cdot [1 + \cos\alpha\cos\delta\cos(\alpha+\delta)] \\ +\sin\delta \cdot [b\cos(\alpha+\delta) + c\cos\delta] = 0,\end{cases}$$

$$(2_2)\begin{cases}+\,2\xi \cdot [1 - \cos\alpha\cos\delta\cos(\alpha+\delta)] - 2\eta\cos\alpha\cos\delta\sin(\alpha+\delta) \\ -\sin\delta \cdot [b\sin(\alpha+\delta) + c\sin\delta] = 0.\end{cases}$$

Eliminiert man aus beiden Gleichungen ξ, so ergibt sich nach gehöriger Reduktion

$$\eta = \frac{\sin\alpha\sin^2\delta}{2(1 - \cos^2\alpha\cos^2\delta)} \cdot (b - c\operatorname{ctg}\delta \cdot \sin\alpha).$$

Führt man in der Klammer für $\operatorname{ctg}\delta$ und $\sin\alpha$ die bekannten Werte

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{4F} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{2F}{ad + bc}$$

ein, so folgt schließlich

$$p_c \equiv \eta = \frac{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\delta}{8F(1 - \cos^2\alpha\cos^2\delta)} \cdot [c \cdot (-\,a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2abd]).$$

Da a die gegenüberliegende Seite von c ist, so schließt man aus der Form von p_c sofort auf die der übrigen Lote. Bezeichnet man den Faktor vor der eckigen Klammer, der sich für die aufeinanderfolgenden Winkel α und δ, δ und $180^0 - \alpha$, $180^0 - \alpha$ und $180^0 - \delta$, $180^0 - \delta$ und α nicht ändert, mit λ, so kann man die Ausdrücke für die Lote in folgender eleganten Form schreiben:

$$(3)\qquad\begin{cases}p_a = \lambda \cdot [a \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d\,) - 2c \cdot (ac - bd)], \\ p_b = \lambda \cdot [b \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2d \cdot (ac - bd)], \\ p_c = \lambda \cdot [c \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2a \cdot (ac - bd)], \\ p_d = \lambda \cdot [d \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2b \cdot (ac - bd)].\end{cases}$$

In den Kreisvierecken, in denen $a \cdot c = b \cdot d$ ist, erhält man hiernach besonders einfache Ausdrücke für die p_ν. Ist nämlich φ der der Seite b gegenüberliegende Winkel, unter dem sich die Diagonalen e und f schneiden, so ist die Bedingung

$$a \cdot c = b \cdot d \ \textit{identisch mit} \ \cos\alpha\cos\delta + \cos\varphi = 0,$$

sodaß

$$\lambda = \frac{\sin^2\alpha \sin^2\delta}{8F \cdot \sin^2\varphi}$$

wird. Da nun mit Rücksicht auf $e \cdot f = 2ac = 2bd$

$$1 : \frac{\sin\alpha \sin\delta}{\sin\varphi} = \frac{(ab + cd)(bc + da)}{ef \cdot 2F} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4F},$$

so ergibt sich, wenn man noch $\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4F}$ setzt,

$$p_a = \tfrac{1}{2}a \cdot \operatorname{tg}\varepsilon, \quad p_b = \tfrac{1}{2}b \cdot \operatorname{tg}\varepsilon, \quad p_c = \tfrac{1}{2}c \cdot \operatorname{tg}\varepsilon, \quad p_d = \tfrac{1}{2}d \cdot \operatorname{tg}\varepsilon,$$

also Ausdrücke, wie sie bei *dem Minimumpunkte für das Dreieck auftreten.*

Die Konstruktion des Winkels ε läßt sich in einfacher Weise für *jedes* Kreisviereck ausführen. Man ziehe in den Ecken A und C die Tangenten an den Umkreis und durch B und D Parallelen zu AC. Die Schnittpunkte der Parallelen mit der linken Tangente seien E und G und die mit der rechten entsprechend F und H. Dann ist $\sphericalangle FGH = \varepsilon$.

Mit Hilfe der entstandenen ähnlichen Dreiecke findet man nämlich leicht, daß $EF = \frac{a^2 + b^2}{AC}$, $GH = \frac{c^2 + d^2}{AC}$ ist. Die Mittellinie des Trapezes $EFHG$, die gleich der Projektion GI von GF auf GH, ist also $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2AC}$ und mithin:

$$\operatorname{ctg} FGI = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2AC \cdot FI} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4F}.$$

Die Vierecke, in denen $ac = bd$ ist, erhält man, wenn man die zu einer beliebigen Sehne AC gehörigen Bogen in Q_1 und Q_2 halbiert und dann von Q_1 und Q_2 durch einen beliebigen Punkt S innerhalb von AC Gerade zieht. Sie bestimmen die Punkte B und D.

Um nun in einem solchen Viereck den Minimumpunkt zu zeichnen, konstruiere man über a, b, c, d als Basen gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel ε. Ihre Spitzen seien A_1, B_1, C_1, D_1. *Die Parallelen durch diese Spitzen zu den zugehörigen Seiten schneiden sich in dem Minimumpunkt.*

Bestimmung von λ und $\sum p_\nu^2$ durch die Seiten. — Setzt man $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = s^2$ und $a \cdot c - b \cdot d = t^2$, so erhält man aus (3)

$$2F = \lambda \cdot (s^4 - 4t^4), \text{ also } \lambda = \frac{2F}{s^4 - 4t^4}.$$

Für die Summe der Quadrate der p_ν findet man hiernach

$$p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + p_d^2 = \frac{4F^2}{s^4 - 4t^4} \cdot s^2.$$

Die vier durch P gehenden Geraden l_ν. — Ersetzt man in) und (2_2) ξ und η durch die laufenden Koordinaten x und y, so P der Schnitt der Geraden (1_1) und (2_2) oder L_1 und L_2. Bildet n hieraus

$$l_c \equiv \sin(\alpha + \delta) \cdot L_1 + \cos(\alpha + \delta) \cdot L_2 = 0,$$

ist dies eine neue durch P gehende Gerade, deren Gleichung in einfachter Form

$$l_c \equiv -x + y \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta) + \tfrac{1}{2}c = 0$$

tet. Nimmt man statt AB nacheinander die Seiten BC, CD, DA x_1-, x_2-, x_3-Achse und die Lote in B, C, D auf diesen Seiten im bräuchlichen Sinne als y_1-, y_2-, y_3-Achse, so erhält man drei weitere raden durch P, deren Gleichungen analog wie die von l_c gebildet sind.

Die Gleichungen dieser vier Geraden sind:

$$)\quad \begin{cases} l_a \equiv -x_2 + y_2 \cdot (-\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\delta) + \tfrac{1}{2}a = 0, \\ l_b \equiv -x_3 + y_3 \cdot (-\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta) + \tfrac{1}{2}b = 0, \\ l_c \equiv -x\ \ + y\ \ \cdot (+\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta) + \tfrac{1}{2}c = 0, \\ l_d \equiv -x_1 + y_1 \cdot (+\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\delta) + \tfrac{1}{2}d = 0. \end{cases}$$

Diese vier Geraden gehen also durch die Mitten M_a, M_b, M_c, M_d Seiten a, b, c, d und, wie man aus den Koeffizienten der Gleichungen l_a und l_c, l_b und l_d entnimmt, muß

$$\sphericalangle PM_aC = \sphericalangle PM_cB \quad \text{und} \quad \sphericalangle PM_bD = \sphericalangle PM_dC$$

. In Worten: *Die Verbindungsgeraden des Minimumpunktes mit den ten der gegenüberliegenden Seiten des Kreisvierecks bilden mit diesen der Richtung nach ihrem Schnittpunkt genommenen Seiten je zwei che Winkel.*

Gibt man l_c die beiden Formen

$$l_c \equiv -x + y \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\delta \cdot (y + \tfrac{1}{2}c \cdot \operatorname{tg}\delta) = 0,$$
$$l_c \equiv -x + y \operatorname{ctg}\delta + c + \operatorname{ctg}\alpha \cdot (y - \tfrac{1}{2}c \cdot \operatorname{tg}\alpha) = 0,$$

sagt die *erste* Form aus, daß l_c durch den Schnitt von

$$b \equiv -x + y \operatorname{ctg}\alpha = 0 \quad \text{und} \quad y + \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg}\delta = 0$$

die *zweite* Form, daß es auch durch den Schnitt von

$$d \equiv -x + y \cdot \operatorname{ctg}\delta + c = 0 \quad \text{und} \quad y - \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg}\alpha = 0$$

t.

Analoge Umgestaltungen und Schlußfolgerungen lassen die Geen l_a, l_b, l_d zu und führen so zu einer einfachen **Konstruktion**

des Minimumpunktes: Man errichte in c und d die Mittelsenkrechten, welche b bez. a in G und H schneiden mögen. Hierauf ziehe man durch G und H zu c und d die Parallelen GI und HK bis zum Schnitt mit d und c. $M_c I$ und $M_d K$ bestimmen dann den Punkt P. (Fig. 2.)

Die vier durch P gehenden Geraden λ_ν. — Bildet man aus den Geraden L_1 und L_2 die neue Gerade

$$\lambda_c \equiv \cos(\alpha + \delta) \cdot L_1 - \sin(\alpha + \delta) \cdot L_2 = 0,$$

so geht diese ebenfalls durch P, und ihre Gleichung in x, y lautet:

$$\lambda_c \equiv [- x \cdot \sin(\alpha + \delta) + y \cos(\alpha + \delta) + \tfrac{1}{2} b \sin \delta] \\ + \cos\alpha \cos\delta \, (y + \tfrac{1}{2} c \operatorname{tg} \delta) = 0.$$

Der Ausdruck in der ersten eckigen Klammer ist identisch mit der linken Seite der Gleichung für die Parallele durch M_b zu a. λ_c geht also durch den Schnitt der Parallelen durch M_b zu a mit der Parallelen zu c im Abstand $y = -\frac{1}{2} c \cdot \operatorname{tg} \delta$. Setzt man $y = 0$ in λ_c, so ergibt sich für den Punkt C_1 auf c, durch den λ_c geht,

$$x = AC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\delta\,(b + c\cos\alpha)}{\sin(\alpha + \delta)}.$$

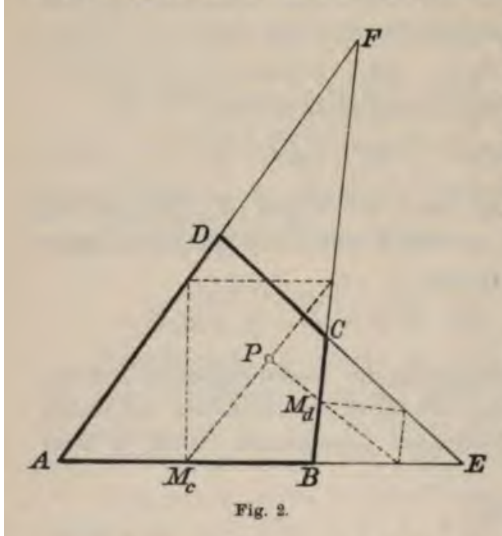


Fig. 2.

C_1 wird gefunden, wenn man von B auf AD das Lot BB_2 fällt und durch die Mitte von $B_2 D$ zu a eine Parallele zieht. Sie trifft c in C_1.

Um die zu λ_c analoge Gerade λ_d zu erhalten, ersetze man wie bei (4) x, y durch das System x_1, y_1, α durch $180^0 - \delta$, δ durch α, c durch d, b durch c. Dann ist

$$\lambda_d \equiv x_1 \cdot \sin(\alpha - \delta) + y_1 \cos(\alpha - \delta) + \tfrac{1}{2} c \sin\alpha - \cos\alpha\cos\delta\,(y_1 + \tfrac{1}{2} d \operatorname{tg}\alpha) = 0.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\lambda_a \equiv x_2 \sin(\alpha + \delta) + y_2 \cos(\alpha + \delta) + \tfrac{1}{2} d \sin\delta + \cos\alpha\cos\delta\left(y_2 - \frac{a}{2}\operatorname{tg}\delta\right) = 0,$$

$$\ldots \delta) - y_3 \cos(\alpha - \delta) + \tfrac{1}{2} a \sin\alpha - \cos\alpha\cos\delta\,(y_3 - \tfrac{1}{2} b \operatorname{tg}\alpha) = 0$$

Schneiden sich die Gegenseiten a und c in E, b und d in F, so erkennt man aus den Gleichungen für λ_a und λ_c, daß

$$\sphericalangle PA_1E = \sphericalangle PC_1E,$$

und aus denen von λ_d und λ_b, daß

$$\sphericalangle PB_1F = \sphericalangle PD_1F.$$

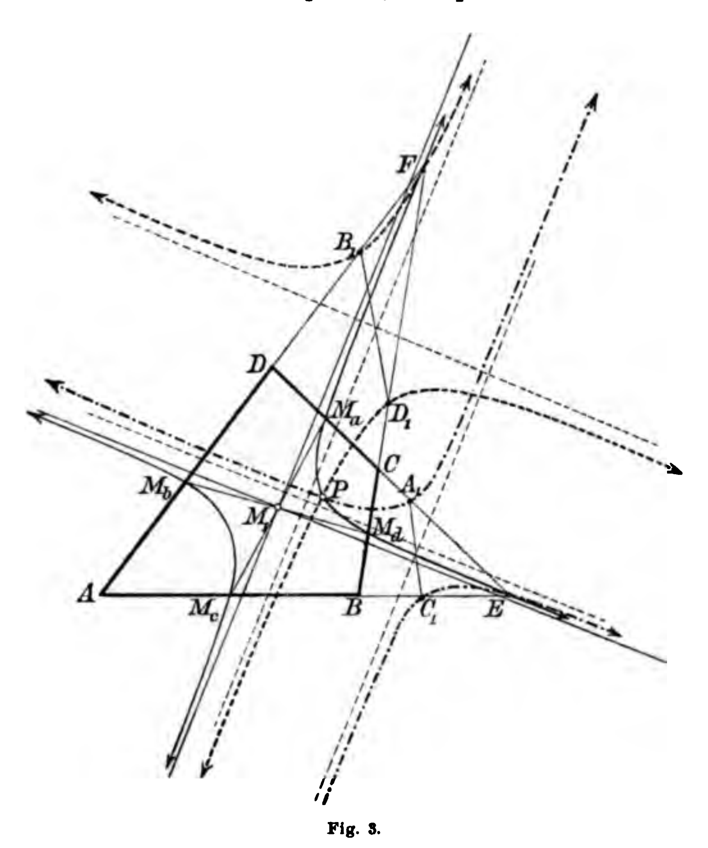


Fig. 3.

Daraus und aus dem Resultat der Gleichungen (4) folgt weiter, daß $\triangle PC_1M_c \sim \triangle PA_1M_a$ und $\triangle PB_1M \sim \triangle PD_1M_d$, und daß sich also verhält

$$A_1M_a : C_1M_c = p_a : p_c, \quad D_1M_d : B_1M_b = p_d : p_b.$$

Die Rechnung bestätigt dieses Resultat.

Der Minimumpunkt als Schnitt dreier rechtwinkliger Hyperbeln. — Figur 3. Es wurde festgestellt, daß $\sphericalangle PM_aE = \sphericalangle PM_cE$. Es liegt nun nahe, *den Ort der Punkte* Q innerhalb oder außerhalb eines Winkels M_aEM_c zu suchen, für die stets $\sphericalangle QM_aE = \sphericalangle QM_cE = \psi$ ist.

Wählt man die Winkelhalbierende von $\sphericalangle M_a E M_c$ zur positiven X-Achse und die auf ihr im Schnitt R mit $M_a M_c$ Senkrechte zur Y-Achse, so schneiden $M_a Q$ und $M_c Q$ die X-Achse unter demselben Winkel ϑ, und wenn Q, M_a, M_c die Koordinaten x, y; $-m, n$; $+p, -q$ haben, gilt

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{y+q}{p-x} = \frac{y-n}{x+m}, \quad \text{oder}$$

$$2xy + x(q-n) - y(p-m) + mq + np = 0.$$

Setzt man $x = x' + \frac{p-m}{2}$, $y = y' - \frac{1}{2}(q-n)$, verschiebt man also das Koordinatensystem parallel mit sich selbst *in die Mitte* M_1 *von* $M_a M_c$, so ergibt sich bei Weglassung der Indizes als Ort für Q:

$$4xy = -(p+m)\cdot(q+n).$$

Dies ist aber die Gleichung einer auf ihre Asymptoten als Achsen bezogenen Hyperbel, und da diese Achsen nach der Einführung senkrecht waren, so ist der *Ort für Q eine rechtwinklige oder gleichseitige Hyperbel.* Ihr Koordinantenanfang ist M_1, ihre Asymptoten sind parallel bez. senkrecht zur Halbierungslinie von $\sphericalangle M_a E M_c$.

$(p+m)\cdot(q+n)$ ist gleich dem Inhalt des Rechtecks mit der Diagonale $M_a M_c$, dessen Seiten senkrecht bez. parallel derselben Halbierungslinie sind.

Auf dieser gleichseitigen Hyperbel liegt außer dem Minimumpunkt P zunächst der Punkt E, da $\sphericalangle EM_cE = 0 = \sphericalangle EM_aE$. Auf ihr liegen aber auch die Punkte M_a und M_c, da ja $\sphericalangle PM_aE = \sphericalangle PM_cE$

Die Betrachtungen für den $\sphericalangle M_a E M_c$ gelten in gleicher Weise für den $\sphericalangle M_b F M_d$. In bezug auf diesen Winkel muß also P wieder auf einer *gleichseitigen Hyperbel* liegen, die durch F, M_b, M_d hindurchgeht. Ihre Asymptoten schneiden sich in der Mitte M_2 von $M_b M_d$ und sind senkrecht bez. parallel zu der Halbierungslinie von $\sphericalangle M_b F M_d$.

Nun ist zunächst $M_1 \equiv M_2$, denn $M_a M_b M_c M_d$ ist ein Parallelogramm. Außerdem stehen im Kreisviereck die Halbierungslinien der Winkel $M_a E M_c$ und $M_b F M_d$ *senkrecht* aufeinander, folglich fallen außer den Mittelpunkten der beiden Hyperbeln für die Winkel E und F auch *ihre Asymptoten zusammen.*

Da nun ferner die zwei Hyperbeln den Punkt P gemeinsam haben und durch *einen* Punkt und die Asymptoten die Hyperbel völlig bestimmt ist, so sind *beide Hyperbeln identisch.*

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises von $ABCD$, und sind M_e und M_f die Mitten der Diagonalen AC und BD, so schließt man aus der Gleichheit der Winkel, welche die von M, M_e, M_f nach den Mitten

der Gegenseiten gezogenen Strahlen mit den Seiten bilden, daß auch M, M_e, M_f auf den zwei zusammenfallenden Hyperbeln liegen.

Der Minimumpunkt liegt also auf einer gleichseitigen Hyperbel, die den Schnitt der Diagonalen von $M_a M_b M_c M_d$ zum Mittelpunkt hat, deren Asymptoten parallel zu den Halbierungslinien der Winkel $M_a E M_c$ und $M_b F M_d$ sind und die durch die Punkte

$$E,\ F,\ M,\ M_a,\ M_b,\ M_c,\ M_d,\ M_e,\ M_f$$

des Kreisvierecks hindurchgeht.

Hieraus ergibt sich nebenbei der Satz: Die Rechtecke mit den Diagonalen $M_a M_c$ bezw. $M_b M_d$, deren Seiten mit den Halbierungslinien der Winkel $M_a E M_c$ und $M_b F M_d$ parallel laufen, sind gleich. Die Rechnung bestätigt das zuletzt Gesagte. Bestimmt man nämlich den Inhalt des Rechtecks mit der Diagonale $M_a M_c$, indem man m, n, p, q durch

$$EM_c = \frac{b \sin \delta}{\sin(\alpha + \delta)} - \tfrac{1}{2} c, \quad EM_a = \frac{b \sin \alpha}{\sin(\alpha + \delta)} - \tfrac{1}{2} a,$$
$$\sphericalangle M_a E M_c = 180^0 - (\alpha + \delta)$$

ausdrückt, so findet man nach einiger Rechnung

$$(m + p) \cdot (n + q) = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \delta\, (c^2 - a^2)(b^2 - d^2)}{8F}.$$

Um das Rechteck mit der Diagonale $M_b M_d$ zu erhalten, muß man c mit b, a mit d, δ mit $180^0 - \delta$ vertauschen. Hierdurch ändert sich aber der Wert der rechten Seite nicht.

Die gleichseitige *Zehnpunkt-Hyperbel* hat nach dem obigen die Gleichung

$$4xy = -\frac{1}{8F} \cdot (c^2 - a^2)(b^2 - d^2) \sin \alpha \sin \delta,$$

die man mit Rücksicht auf $4F \cdot \operatorname{ctg} \alpha = -a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ und $4F \cdot \operatorname{ctg} \delta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ auch schreiben kann

$$xy = +\frac{F}{8} \cdot \frac{\sin(\alpha + \delta) \cdot \sin(\alpha - \delta)}{\sin \alpha \cdot \sin \delta}.$$

Sie liegt für $\alpha > \delta$ im 1. und 3., für $\alpha < \delta$ im 2. und 4. Quadranten. Ist $\alpha = \delta$, wie dies beim Quadrat, Rechteck und Kreistrapez eintritt, so zerfällt die Hyperbel in ihre Asymptoten.

Für die Teile der Hyperbel, welche außerhalb des Winkels $M_a E M_c$ und seines Scheitelwinkels liegen, kehrt sich die Richtung des einen Winkelschenkels um, sodaß $M_a D$ an die Stelle von $M_a E$ und $M_c A$ an die Stelle von $M_c E$ tritt. So gilt z. B. für den Punkt F: $\sphericalangle\, FM_a D = FM_c E$.

Man erkennt dies deutlich, wenn man zwei zu M_a unendlich nahe Punkte P_i und P_a betrachtet, P_i innerhalb, P_a außerhalb des Vierecks. Dann ist sowohl $\sphericalangle P_i M_c E$ als auch $P_a M_c E$ kleiner als 90^0, sie sind gleich dem Winkel, den die Tangente in M_a mit $M_a E$ bildet, und dieser ist gleich $M_a M_c E$.

Ähnliches gilt für die noch zu behandelnden Hyperbeln.

Die zweite rechtwinklige Hyperbel. — Aus den Geraden λ_v hatte sich ergeben, daß die Winkel PA_1E und PC_1E gleich sind.

Der Ort für P ist daher wieder eine gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt die Mitte von $A_1 C_1$ ist, die durch A_1, C_1, E geht und deren Asymptoten dann der ersten Hyperbel parallel laufen.

Während aber bei der ersten Hyperbel für $\alpha < \delta$ (Fig. 1) $EM_a < EM_c$ war, ist jetzt $EA_1 > EC_1$. Berechnet man nämlich auf Grund der Konstruktion von A_1 und C_1 die Werte von EA_1 und EC_1, so findet man

$$EA_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(d + a\cos\alpha)\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}, \quad EC_1 = \frac{(b - c\cos\alpha)\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Fällt man nun von B auf b das Lot BB' und von D auf d das Lot DD', so ist $BD' = d + a\cos\alpha$, $DB' = b - c\cos\alpha$. Da nun $BB'DD'$ ein Kreisviereck ist und FD als Hypotenuse größer als FD', so muß $BD' > DB'$, also auch $EA_1 > EC_1$ sein.

Damit ist die Lage der zweiten Hyperbel für $\alpha < \delta$ entschieden. C_1 liegt im *ersten*, A_1 im *dritten* Quadranten der Asymptoten, und dasselbe gilt also auch von den beiden Zweigen der Hyperbel.

Ihre Gleichung erhält man aus der der ersten Hyperbel, wenn man statt $-m$, n die Koordinaten $-m'$, $-n'$ von A_1 und statt $+p$, $-q$ die Koordinaten $+p'$, $+q'$ von C_1 setzt, also m mit m', n mit $-n'$, p mit p', q mit $-q'$ vertauscht. Dann wird

$$4x'y' = +(p' + m') \cdot (q' + n').$$

Hierin ist

$$m' = EA_1 \cdot \cos\frac{\alpha+\delta}{2}, \; p' = EC_1 \cdot \cos\frac{\alpha+\delta}{2}; \; n' + q' = (EA_1 - EC_1)\sin\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Durch Ausführung der Rechnung unter Benutzung von $\sin\alpha = \frac{2F}{ad+bc}$ und $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{-a^2+b^2+c^2-d^2}{4F}$ wird

$$4x'y' = \frac{1}{8} \frac{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\delta}{\sin(\alpha+\delta)} \cdot (c^2 - a^2),$$

und wenn man wie früher $c^2 - a^2 = 2F(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\delta)$ einführt,

$$x'y' = -\frac{F}{16} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\delta\sin(\alpha-\delta)}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Die dritte rechtwinklige Hyperbel. — Da $\sphericalangle PB_1F = \sphericalangle PD_1F$ ist, so muß P auf einer dritten Hyperbel liegen, deren Asymptoten sich in der Mitte von B_1D_1 rechtwinklig schneiden und mit denen der ersten zwei Hyperbeln parallel laufen. Sie geht durch B_1, D_1, F. Ihre Gleichung erhält man aus der vorigen, wenn man δ durch $180^0 - \delta$ ersetzt. Sie lautet

$$x''y'' = -\frac{F}{16}\frac{\sin\alpha\cdot\sin\delta\cdot\sin(\alpha+\delta)}{\sin(\alpha-\delta)}.$$

Aus den Gleichungen der drei rechtwinkligen Hyperbeln entnimmt man, daß für $\alpha \lesseqgtr \delta$ die erste Hyperbel im 2. und 4., bez. 1. und 3., die zweite und dritte Hyperbel aber dann im 1. und 3., bez. 2. und 4. Quadranten liegen.

Für $\alpha = \delta$ zerfallen die ersten zwei Hyperbeln in ihre Asymptoten. Bei der dritten Hyperbel liegen dann B_1, D_1, F und also auch die eine Asymptote im Unendlichen, während die andere Asymptote durch P geht und parallel AD ist.

Vier weitere Punkte auf der Zehnpunkt-Hyperbel. — Fällt man von M_a und M_c auf die Diagonalen AC und BD die Lote M_aS_1 und M_cS_2, so bilden diese Lote mit M_aE und M_cE *gleiche* Winkel, da $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DCA$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen. Der Schnitt X_1 dieser Lote muß demnach auf der Zehnpunkt-Hyperbel liegen, und es ist demnach auch $\sphericalangle X_1M_bC = \sphericalangle X_1M_aD$.

Fällt man von M_a und M_c die Lote auf BD und AC, so erhält man den zu X_1 analogen Punkt X_2 mit denselben Eigenschaften wie X_1.

X_1 und X_2 sind die Höhenschnittpunkte der Dreiecke $M_aM_dM_c$ und $M_cM_bM_a$. Es bestätigt sich also der Satz: Wenn drei Punkte M_a, M_b, M_c auf einer Hyperbel liegen, so liegt ihr Höhenschnitt auf derselben Hyperbel.

Die Lote von M_b und M_d auf die Diagonale ergeben zwei weitere Punkte Y_1 und Y_2, die Höhenschnittpunkte der Dreiecke $M_bM_cM_d$ und $M_dM_aM_b$ sind und also gleichfalls auf der ersten Hyperbel liegen.

Aus der Konstruktion von X_1 und X_2 folgt leicht, daß $M_aX_1M_cX_2$ und $X_2M_bX_1M_d$ von *Hyperbelsehnen* gebildete *Parallelogramme* sind. Dasselbe gilt von $M_bY_1M_dY_2$, $Y_2M_aY_1M_c$, $X_1Y_1X_2Y_2$.

Die Mittellinien dieser fünf Parallelogramme bestimmen die Richtungen von fünf Paaren konjugierter Durchmesser.

Zieht man von M_c und M_a durch irgend einen Punkt Q der ersten oder Zehnpunkt-Hyperbel Strahlen, die DE in U, EA in V treffen, so ist M_aUVM_c ein Kreisviereck, da nach der Art der Bestimmung dieser Hyperbel $\sphericalangle UM_aV = VM_cU$ ist. Demnach ist $\sphericalangle VUE = EM_cM_a$, und da der Winkel EM_cM_a gleich dem Winkel

ist, den die Tangente in M_c mit $M_c E$ bildet, so ist *diese Tangente* UV *parallel.* Dasselbe gilt von der Tangente in M_c.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich eine einfache Konstruktion der ersten Hyperbel *ohne* deren Achsen und Asymptoten: Man trage den Winkel $M_a M_c E$ in irgend einem Punkte U an UE gleich VUE an. Der Schnitt Q von $M_a V$ und $M_c U$ ist dann ein Punkt der Hyperbel *innerhalb* des Winkels $M_a E M_c$.

Die Punkte der Hyperbel außerhalb des Winkels $M_a E M_c$ findet man in ähnlicher Weise unter Benutzung von $\sphericalangle M_b F M_d$, da für die Tangenten in M_b und M_d entsprechende Beziehungen gelten.

Ebenso ist es mit den Tangenten in A_1, C_1 und B_1, D_1 an die zweite und dritte Hyperbel und der Konstruktion dieser Kurven.

Zum Schluß sei noch auf folgende interessante Eigenschaft von P hingewiesen: Zieht man von P durch M_a und M_c Strahlen, so ergibt sich unter Beachtung von $\sphericalangle PM_a E = PM_c E$ und mit Hilfe der Winkel des Kreisvierecks, daß diese zwei Strahlen mit den Seiten a und c und ebenso mit b und d je zwei gleiche Winkelpaare bilden, wobei der eine Schenkel jedes Winkels immer nach E oder F hin zu nehmen ist.

Diesen vier Paaren gleicher Winkel entsprechen nach den früheren Betrachtungen vier gleichseitige Hyperbeln, die durch P und die Scheitel jener Winkel gehen.

Da für die von P durch die Punktepaare M_b, M_d; A_1, C_1; B_1, D_1 gehenden Strahlen ähnliche Resultate gelten, so kann man mithin sagen:

Der Minimumpunkt P des Kreisvierecks ist der Schnitt von 16 gleichseitigen Hyperbeln, von denen die durch M_a, M_c und M_b, M_d gehenden in eine zusammenfallen.

Homburg v. d. Höhe, im Oktober 1904.

Über eine Eigenschaft der binären quadratischen Formen.

Von O. Spiess in Basel.

Ist eine quadratische Gleichung gegeben mit den Wurzeln α_1, α_2, und bestimmen wir β_1, β_2 so, daß für jedes t die Identität besteht

$$(1) \qquad 2(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) = (t-\beta_1)^2 + (t-\beta_2)^2,$$

so gilt zugleich

$$(2) \qquad 2(t-\beta_1)(t-\beta_2) = (t-\alpha_1)^2 + (t-\alpha_2)^2.$$

In der Tat folgt aus den beiden Bestimmungsgleichungen für β_1, β_2

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2,$$
$$2\alpha_1\alpha_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$$

die dritte

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 2\beta_1\beta_2,$$

und eine Vertauschung der α mit den β läßt das System dieser Gleichungen unverändert. Man findet für die Diskriminanten

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2 = 0.$$

Aus (1) und (2) ziehen wir noch die Identität

$$\frac{2\left(\frac{t-\alpha_1}{t-\alpha_2}\right)}{1+\left(\frac{t-\alpha_1}{t-\alpha_2}\right)^2} \cdot \frac{2\left(\frac{t-\beta_1}{t-\beta_2}\right)}{1+\left(\frac{t-\beta_1}{t-\beta_2}\right)^2} = 1,$$

welche für $\frac{t-\alpha_1}{t-\alpha_2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $\frac{t-\beta_1}{t-\beta_2} = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$ die Form annimmt

$$\sin\varphi \cdot \sin\psi = 1. \tag{3}$$

Betrachten wir die Gleichungen (1), (2) von einem allgemeineren Gesichtspunkt. Links in (1) steht eine quadratische Form von der Determinante $+1$ und den Variablen $(t-\alpha_1)$, $(t-\alpha_2)$, rechts eine solche von der Determinante -1 und den Variablen $(t-\beta_1)$, $(t-\beta_2)$, und diese Formen stehen in einer Art von Reziprozität zueinander, indem ihre Gleichheit fortbesteht, wenn das System ihrer Variablen vertauscht wird. Wir stellen uns nun die *Aufgabe, zu einer beliebigen Form* (ABC) *alle Formen* $(A'B'C')$ *zu bestimmen, welche zu ihr diese Beziehung haben, für welche also die beiden folgenden Gleichungen gleichzeitig für jedes* t *erfüllt sind*

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} A(t-\alpha_1)^2 + 2B(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) + C(t-\alpha_2)^2 \\ = A'(t-\beta_1)^2 + 2B'(t-\beta_1)(t-\beta_2) + C'(t-\beta_2)^2, \end{cases}$$

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} A(t-\beta_1)^2 + 2B(t-\beta_1)(t-\beta_2) + C(t-\beta_2)^2 \\ = A'(t-\alpha_1)^2 + 2B'(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) + C'(t-\alpha_2)^2. \end{cases}$$

Wir betrachten A, B, C als gegeben, $D = B^2 - AC$ als von Null verschieden, ebenso α_1, α_2 als gegeben und nicht identisch, und stellen zunächst die Bedingungen für das Bestehen der Gleichung (4) allein auf. Sie sind

$$A + 2B + C = A' + 2B' + C', \tag{6}$$
$$(A+B)\alpha_1 + (B+C)\alpha_2 = (A'+B')\beta_1 + (B'+C')\beta_2, \tag{7}$$
$$A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\alpha_2 + C\alpha_2^2 = A'\beta_1^2 + 2B'\beta_1\beta_2 + C'\beta_2^2. \tag{8}$$

Die erste dieser Gleichungen enthält die notwendige Beziehung zwischen den Koeffizienten, die beiden andern dienen zur Berechnung von β_1, β_2. Wir leiten hieraus einige weitere Formeln ab, die zu unserem Zwecke geeigneter sind, müssen jedoch verschiedene Fälle unterscheiden. Nehmen wir zunächst

I. $$A + 2B + C \neq 0$$

an, so können wir Gleichung (8) ersetzen durch eine andere, die wir erhalten, indem wir (7) beiderseits quadrieren und das Produkt von (6) und (8) hiervon subtrahieren. Es kommt so

$$D(\alpha_1 - \alpha_2) = D'(\beta_1 - \beta_2)^2. \tag{9}$$

Verstehen wir unter $\sqrt{D}$, $\sqrt{D'}$ den positiven Wert der Quadratwurzel, resp. falls der Radikand negativ ist, $+i$ mal dem absoluten Betrag der Wurzel, so folgt hieraus

$$\sqrt{D} \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) = \varepsilon \sqrt{D'}(\beta_1 - \beta_2). \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{10}$$

Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem der Ausdruck $\sqrt{D} - \varepsilon\sqrt{D'}$ von Null verschieden ist oder nicht. Im allgemeinen ist das erstere der Fall. Multiplizieren wir dann Gleichung (7) mit diesem Faktor, Gleichung (10) aber mit $(B + C) - (B' + C')$ und addieren beide, so folgt unter Rücksicht auf (6)

$$\begin{aligned}(11)\quad &\{(A'+B')\sqrt{D}-\varepsilon(A+B)\sqrt{D'}\}\alpha_1+\{(B'+C')\sqrt{D}-\varepsilon(B+C)\sqrt{D'}\}\alpha_2\\ &=\{(A'+B')\sqrt{D}-\varepsilon(A+B)\sqrt{D'}\}\beta_1+\{(B'+C')\sqrt{D}-\varepsilon(B+C)\sqrt{D'}\}\beta_2.\end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß unter den gemachten Voraussetzungen die Gleichungen (10) und (11) linear unabhängig sind und rückwärts wieder auf (7) und (8) führen.

Tritt aber der Spezialfall ein, daß $D = D'$ und $\varepsilon = 1$ ist, so haben wir zunächst

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \tag{10$_a$}$$

und bringen damit die Gleichung (7) leicht auf die Form

$$\{(A' + B') - (A + B)\}(\alpha_1 - \alpha_2) = (A + 2B + C)(\alpha_2 - \beta_2). \tag{11$_a$}$$

Ehe wir aus diesen Gleichungen die Konsequenzen ziehen, stellen wir noch die nötigen Formeln auf für den Fall, daß

II. $$A + 2B + C = A' + 2B' + C' = 0.$$

Gleichung (7) nimmt jetzt die Gestalt von (10) an,

$$(A + B)(\alpha_1 - \alpha_2) = (A' + B')(\beta_1 - \beta_2), \tag{10$_b$}$$

m jetzt $D = (A + B)^2$, $D' = (A' + B')^2$ ist. Führen wir den Wert C, C' in (8) ein und berücksichtigen (10$_b$), so folgt

$$(A' + B')[A\alpha_1 + (2B + A)\alpha_2] = (A + B)[A'\beta_1 + (2B' + A')\beta_2].$$

hieraus die analoge Gleichung wie (11) zu erhalten, multiplizieren beide Seiten mit $(A' + B') - (A + B)$, *vorausgesetzt, daß dieser ruck nicht Null ist*, ferner Gleichung (10$_b$) mit $(AB' - A'B)$ und eren beide Gleichungen. Wir erhalten

$$\begin{cases} [AD' - A'D]\alpha_1 + [(A + 2B)D' - (A' + 2B')]\alpha_2 \\ = [AD' - A'D]\beta_1 + [(A + 2B)D' - (A' + 2B')D]\beta_2. \end{cases}$$

em Spezialfall $(A + B) = (A' + B') \neq 0$ erhalten wir analog zu), (11$_a$) die Formeln

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2,$$

$$(A' - A)(\alpha_1 - \alpha_2) = 2(A + B)(\alpha_2 - \beta_2).$$

Ausnahme $A + B = 0$ liefert eine Trivialität, die wir ausschließen.

Die Gleichungen (10), (11) resp. (10$_a$), (11$_a$); (10$_b$), (11$_b$); (10$_c$),) liefern nun sofort die Lösung der Aufgabe. *Soll nämlich Glei- g (5) mit (4) zusammen bestehen, so müssen die erwähnten Gleichungs- e unverändert bleiben, wenn α_1, α_2 mit β_1, β_2 vertauscht wird.* Da- ergibt sich im *Fall I* aus Gleichung (10) *die notwendige* Be- gung

$$D^2 = D'^2.$$

se Bedingung ist aber auch *hinreichend*. In der Tat, falls *erstens*

$$D' = -D$$

kann der Ausdruck $(\sqrt{D} - \varepsilon\sqrt{D'})$ für keinen Wert von ε ver- winden, und es kommt Gleichung (11) zur Geltung. Diese enthält r $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\beta_1\beta_2)$ symmetrisch und ist also auch nach der Vertauschung llt. Aus ihr und der Gleichung

$$\beta_1 - \beta_2 = \varepsilon i(\alpha_1 - \alpha_2) \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

lten wir zwei konjugiert komplexe Lösungen für $(\beta_1\beta_2)$. — Ist *zweitens*

$$D' = D,$$

iefert die Annahme $\varepsilon = -1$ oder $\beta_1 - \beta_2 = -(\alpha_1 - \alpha_2)$ eine ung aus demselben Grunde, und zwar die einzige. Nehmen wir lich $\varepsilon = +1$ an, so gelten die Gleichungen (10$_a$), (11$_a$). Bei Ver- chung von $(\alpha_1\alpha_2)$ mit $(\beta_1\beta_2)$ geht aber Gleichung (11$_a$) nicht in

sich selbst über, da die linke Seite unverändert bleibt, während die rechte das Vorzeichen wechselt. Diese Annahme führt daher zu keiner Lösung der Aufgabe.

Fall II. — Ganz analog erledigt sich der Fall II. Gleichung (1 liefert als *notwendige* Bedingung

$$(12_c) \qquad (A+B)^2 = (A'+B')^2, \qquad \text{das ist} \qquad D = D'.$$

Diese Bedingung ist auch *hinreichend*; denn setzt man

$$A' + B' = -(A+B), \quad \text{also} \quad \beta_1 - \beta_2 = -(\alpha_1 - \alpha_2),$$

so gilt Gleichung (11_b), welche sich durch die Vertauschung von α_1, α_2 mit β_1, β_2 nicht ändert. Indes gibt es nur diese eine Lösung; denn macht man

$$A' + B' = A + B,$$

so kommt Gleichung (11_c) in Betracht, und diese ist nicht mehr erfüllt, wenn wir die Vertauschung vornehmen. Wir können also schließlich folgenden Satz aussprechen.

Satz: Sind (ABC), $(A'B'C')$ zwei quadratische Formen mit den Determinanten D, resp. D', und besteht die Beziehung

$$A + 2B + C = A' + 2B' + C',$$

so können für alle Werte der Variablen α_1, α_2 die Größen β_1, β_2 so bestimmt werden, daß die Gleichung identisch in t besteht

$$\begin{aligned} &A(t-\alpha_1)^2 + 2B(t-\alpha_1)(t_1-\alpha_2) + C(t-\alpha_2)^2 \\ &= A'(t-\beta_1)^2 + 2B'(t-\beta_1)(t-\beta_2) + C'(t-\beta_2)^2. \end{aligned}$$

Damit dann zugleich noch die zweite Gleichung gilt

$$\begin{aligned} &A(t-\beta_1)^2 + 2B(t-\beta_1)(t-\beta_2) + C(t-\beta_2)^2 \\ &= A'(t-\alpha_1)^2 + 2B'(t-\alpha_1)(t-\alpha_2) + C'(t-\alpha_2)^2, \end{aligned}$$

ist notwendige und hinreichende Bedingung

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad D = \pm D', && \text{falls} \quad A + 2B + C \neq 0, \\ &\text{II.} \quad D = D', && \text{falls} \quad A + 2B + C = 0, \end{aligned}$$

und zwar gibt es für β_1, β_2 ein reelles, resp. zwei konjugiert komplexe Lösungssysteme, jenachdem das Verhältnis der Determinanten $+1$ oder -1 ist.

Basel, 28. Sept. 1903.

Beitrag zur Untersuchung des erkenntnistheoretischen Wertes der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen.

Von P. Milau in Kreuznach.

(Schluß.)

5. *Raumformen, bei denen die Raumkonstante* $\gtrless 0$ *ist, sind erkenntnistheoretisch nicht möglich. a) Widerlegung von Einwendungen.* — Weit mehr als die Axiome der projektiven Geometrie und das von den 3 Dimensionen des Raumes sind die Axiome der metrischen Geometrie, nämlich dasjenige von der Unendlichkeit des Raumes und das sogenannte Parallelenaxiom umstritten worden. Der bekannteste Einwand, der gegen die Apriorität dieser Axiome gemacht wird, ist der von v. Helmholtz[1]) herrührende Gedanke, daß wir uns „den Anblick einer pseudosphärischen oder sphärischen Welt ebenso gut nach allen Richtungen hin ausmalen" könnten, wir wir ihren Begriff entwickeln können. Der Gedankengang, den v. Helmholtz hier verfolgt, ist etwa der folgende: Unser Raum ist nicht der allgemeinste Begriff einer Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen, auch nicht bei Annahme der freien Beweglichkeit und Festigkeit der Raumgebilde (Krümmungsmaß $K =$ const.), sondern es sind 3 gleichberechtigte Fälle: $K = 0$ (euklidische oder parabolische Raumform), $K < 0$ (pseudosphärische Raumform) und $K > 0$ (sphärische Raumform). Nun könnte die Erkenntnis $K = 0$ uns a priori gegeben sein. Dann würden wir uns die Reihe der Eindrücke, die bei einer Raumform auftreten, in welcher $K \gtrless 0$ ist, in keiner Weise sinnlich ausmalen können; denn wenn wir uns die verschiedenen Eindrücke ausmalen *könnten*, so müßte es der Erfahrung überlassen bleiben, zu entscheiden, ob diese oder jene den reellen tatsächlichen Verhältnissen entsprechen. Nun behauptet v. Helmholtz aber, daß wir uns die Reihe der sinnlichen Wahrnehmungen, die ein pseudosphärischer oder sphärischer Raum aufweisen müßte, anschaulich ausmalen können, und entwickelt dieses im Anschluß an die Beltramische[2]) Abbildung in eigenartiger

1) v. Helmholtz: „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometr. Axiome". Populäre Vorträge, Heft III, S. 45 ff.

2) Beltrami: „Essai d'interprétation de la Géom. etc." Man vgl. auch F. Klein: „Über die sogenannte nichteukl. Geom." Math. Ann. IV. — Eine Kritik der v. Helmholtzschen Betrachtungsweise findet sich bei F. Klein: „Gutachten betreffend den 3. Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie" Math. Ann. 1898. S. 584.

Weise mit Benutzung physikalischer Hilfsmittel (gekrümmter Spiegel und Linsen). Daraus zieht er dann die Folgerung, daß die Erkenntnis $K = 0$ empirisch erworben ist. Wenn nun aber aus der Möglichkeit, die Eindrücke sich auszumalen, die eine nichteuklidische Welt auf ihren Bewohner machen müßte, auf die empirische Herkunft der Raumanschauung geschlossen werden soll, so ist hiergegen, wie Jakobson[1]) hervorhebt, einzuwenden, daß v. Helmholtz notgedrungen irgend eine Annahme über den diesen Bewohnern innewohnenden Intellekt machen muß. Ist dieser Intellekt, insbesondere der Anschauungszwang, dem sie unterworfen sind, dem unsrigen völlig entsprechend, so würden die Bewohner eines nichteuklidischen Raumes trotz aller widersprechenden Verhältnisse dort genau dieselbe Geometrie ausbilden, wie wir. Dasjenige, was nicht hineinzupassen scheint, würden jene Intelligenzen durch optische Täuschung bezw. durch Unvollkommenheit der betreffenden Sinnesorgane zu erklären bestrebt sein. Nun könnte aber der vorauszusetzende Intellekt ein von dem unsrigen völlig verschiedener sein. Dann kann über die Raumanschauung der mit diesem fremden Intellekt begabten Wesen überhaupt nichts ausgesagt werden. Nun nimmt aber v. Helmholtz offenbar weder das eine, noch das andere an, er setzt vielmehr stillschweigend voraus, daß das Erkenntnisvermögen der betreffenden Raumbewohner, also ihre gesamte Raumanschauung, von der jedesmaligen Natur des Raumes, den sie bewohnen, abhängig sein müßte, im übrigen aber der unsrigen analog sei. Eine solche Voraussetzung zu machen, ist aber nicht statthaft, da sie gerade dasjenige enthält, was zu beweisen war, nämlich daß die Axiome der Geometrie durch Empirie gefunden seien. — Was die Sache selbst anbetrifft, so sind die beiden Standpunkte so fundamental verschieden, daß eine Einigung kaum möglich erscheint. v. Helmholtz nimmt an, daß die Ausbildung der Raumanschauung, also unser subjektives Empfinden, durch die jedesmalige Natur des Raumes bedingt werde, wir dagegen gerade umgekehrt, daß *durch unser subjektives Empfinden*, durch die uns einmal immanente psychische Veranlagung, *die Natur des Raumes, wie er uns erscheint, bedingt wird.* Wir stellen uns den Raum, von dem wir das ihm objektiv zugrunde Liegende nicht zu erkennen fähig sind, noch jemals sein werden, in ganz bestimmter Weise vor, weil wir psychisch dazu gezwungen sind, und erleiden nicht umgekehrt durch den Raum den Antrieb zu der jedesmaligen Raumvorstellung. Der den Antrieb ausübende Raum könnte doch auch nur der objektive Raum sein,

1) J. Jakobson: „Philosophische Untersuchungen zur Metageometrie". S. 146 ff. Man vgl. auch Schotten: „Die Grenze zw. Philos. u. Mathem." Unterrichtsblätter II. 4. S. 56.

und von diesem wissen wir nichts (§ 6), und es hat auch keinen Sinn, sich denselben „eben“ oder „gekrümmt“ vorzustellen. — Bei der hier vertretenen Ansicht ist es auch nicht nötig, die Raumvorstellung als „notwendige Eigenschaft aller denkenden Intelligenzen“ anzunehmen, wogegen Erdmann[1]) protestiert, sondern nur als notwendig verknüpft mit den Gesetzen des Bewußtseins aller uns selbst analogen Intelligenzen. Daß andere mit Intellekt begabte Wesen, die sich einer ganz fremden Anschauungsform erfreuen, möglich sind, ist zwar zugegeben[2]), beweist aber an sich durchaus nichts gegen die Apriorität der uns gegebenen Form. — Aus dem vorigen ergibt sich, daß die Supposition von Intelligenzen, die sich in einem nichteuklidischen Raume befinden und dort eine bezügliche Raumanschauung ausbilden, in keiner Weise unsere Erkenntnis über die Herkunft der Raumanschauung selbst fördert. Auch Wundt[3]) nennt es „ein hoffnungsloses Beginnen, aus dem Möglichen das Wirkliche erklären zu wollen“, und meint, es werde „niemals auf diesem Wege über den Ursprung des Wirklichen etwas ausgesagt werden können.“

Der gewichtigste Schlag gegen die von Kant aufgestellte Lehre über den Raum, als Anschauungsform a priori, ist durch die fundamentale Unterscheidung zwischen projektiven und metrischen räumlichen Beziehungen geführt worden. Aus dieser Unterscheidung, wie sie insbesondere F. Klein[4]) durchführt, scheint nämlich hervorzugehen, daß die Urteile der projektiven Geometrie größere Allgemeinheit aufweisen, als die der metrischen Geometrie, da sich die 3 möglichen Maßbestimmungen, bezw. die 3 möglichen Raumformen, gleichberechtigt aus den allgemeinen projektiven Beziehungen ableiten lassen. Strenge Allgemeinheit wird aber unbedingt für ein Urteil a priori gefordert. Wenn wir daher durch die Betrachtungen der vorigen Abschnitte zu der Überzeugung gelangten, daß die Axiome der projektiven Geometrie Urteile a priori seien, so scheint dieses für die metrischen Axiome nicht mehr zuzutreffen. Nun gibt Russell[5]), der im übrigen die metrischen Axiome ebenfalls nur als Tatsachen der Erfahrung anerkennen will, da auch die Annahmen der nichteuklidischen Geometrie nach seiner Meinung Erfahrung ermöglichten, Gesichtspunkte an, die meines Erachtens zur Folge haben, daß man die Übertragung der Kleinschen Maßbestimmungen

1) Benno Erdmann: „Die Axiome der Geometrie“ S. 115 f.

2) Man vgl. Liebmann: „Zur Analysis der Wirklichkeit“. S. 62 u. 63. — Auch Jul. Schultz: „Psychologie der Axiome“. Göttingen 1899.

3) Wundt: „Logik“ I. Kap. 3, 2.

4) Felix Klein: „Über die sogenannte nichteukl. Geom.“ Math. Ann. IV 1871.

5) Russell: „Essai sur les Fondements de la Géométrie.“ 1901. 36 u. 37.

auf reale Verhältnisse ablehnen muß. Sein Gedankengang ist etwa der folgende: Für 2 Punkte einer Geraden wird eine quantitative Beziehung gefordert, um die beiden Punkte von 2 andern Punkten auf derselben Geraden überhaupt unterscheiden zu können, da die einzige qualitative Beziehung (Lage) für 2 Punktepaare auf einer Geraden die gleiche bleibt. Auch 3 Punkte auf einer Geraden unterscheiden sich qualitativ (projektivisch) nicht von 3 andern auf ihr. Erst 4 Punkte haben eine bestimmte projektivische Eigentümlichkeit, das Doppelverhältnis der 4 Punkte, das sich durch Lagenbeziehungen definieren läßt. Soll also der Abstand zweier Punkte mittels projektiver Beziehungen definiert werden, so kann dieses nur als Beziehung zwischen 4 Punkten, mittelst des Doppelverhältnisses, geschehen. So ergibt sich die Formel für den Abstand zweier Punkte auf einer Geraden nach F. Klein: $\alpha = c \cdot \log \frac{z}{z_1}$, d. h. es wird „die Entfernung zweier Elemente des Grundgebildes gleich dem mit einer gewissen Konstanten multiplizierten Logarithmus des von denselben mit den beiden Fundamentalelementen gebildeten Doppelverhältnisses.“ Die angegebene Funktion zeigt nun in der Tat die für den Abstand allgemeinen charakteristischen analytischen Merkmale, nämlich daß sich die Maßunterschiede addieren und daß die Maßbestimmungen durch eine Bewegung im Raume nicht geändert werden (lineare Transformation). Analytisch ist also der gefundene Ausdruck durchaus korrekt, und mittelst des Doppelverhältnisses läßt sich der Abstand nicht anders definieren. Es ist aber nicht die Berechtigung dafür bewiesen, daß man diese Funktion des Doppelverhältnisses auch als den Abstand im realen Sinne anzusehen hat. Diese Berechtigung wird von Russell geleugnet, da der Abstand im natürlichen Sinne durchaus nur eine bestimmte Beziehung zweier Punkte allein ist und nicht von 4 Punkten abhängen kann. Hieraus würde sich dann natürlich ergeben, daß die projektive Geometrie überhaupt nicht imstande ist, den Abstandsbegriff im natürlichen Sinne zu erklären. Und das scheint auch mir unzweifelhaft richtig: denn wie eine Raumlehre, die nur die projektiven (qualitativen) Beziehungen der Raumgebilde behandelt, dazu kommen soll, eine Definition von quant[illegible] tativen Beziehungen zu geben, bliebe unerklärlich. Nur die *Möglichk*[illegible] quantitativen Vergleichens kann durch sie gegeben werden, da qualitat[illegible] Gleiches erst quantitativ verschieden sein kann. Mir scheint nun ab[illegible] gerade hieraus hervorzugehen — und darin weiche ich von Russe[illegible] vollkommen ab —, daß die *Möglichkeit* der 3 Maßbestimmungen bez[illegible] Raumformen, da sie sich nur aus der willkürlichen Wahl der beid[illegible] festen Fundamentalelemente ergibt (2 reelle, 2 konjugiert imaginäre, od[illegible]

2 zusammenfallende Punkte) *nur eine analytische* (logische) ist, daß dagegen für das Reale diese Möglichkeit nicht existiert. Jedenfalls muß, falls man das Vorige billigt, anerkannt werden, daß aus jener Darstellung die reale Möglichkeit und Gleichberechtigung der 3 Raumformen nicht folgt.

Es ist ferner behauptet worden, daß von den 3 analytisch möglichen Raumformen die nichteuklidischen allgemeineren Charakter aufzuweisen haben als die euklidische. So sagt z. B. Simon[1]), daß es unendlich viel wahrscheinlicher sei, daß unser Raum ein krummer Raum sei, weil die Annahme eines solchen eine Hypothese weniger enthalte (nämlich die Annahme $K=0$). Daß er uns aber als ein „ebener“ Raum *erscheine*, liege daran, daß wir immer nur ein beschränktes Gebiet des über alles menschliche Vorstellen ausgedehnten Raumes betrachten könnten, welches gegenüber dem Weltmaßstab unendlich klein sei, und daß im Unendlichkleinen alle drei möglichen Raumformen identisch seien. Dieser Einwand scheint mir auf einer Verkennung der Negation zu beruhen. Es ist nämlich zweierlei, ob man sagt: Die Konstante K hat den Wert 0, oder: Eine solche Konstante existiert überhaupt nicht. Die letztere Annahme machen wir hier. Wir leugnen schlechthin die Existenz eines Krümmungsmaßes für den Raum, da für die Annahme eines solchen weder ein Grund noch das geringste Bedürfnis vorliegt. Deshalb machen wir durch $K=0$ keine weitere Hypothese, sondern haben im Gegenteil eine Hypothese weniger, als wenn wir eine gekrümmte Raumform annehmen würden: denn dann müßte das Krümmungsmaß ja einen ganz bestimmten positiven oder negativen Wert haben, wenn wir denselben auch zur Zeit nicht kennen.

b) Gründe für die Apriorität beider Axiome. — Aus dem vorigen können wir auch direkte Gründe für die Apriorität der metrischen Axiome entnehmen. Der Begriff einer für den Raum durchaus charakteristischen Konstanten, die als absolutes Maß für räumliche Größen einzuführen wäre, scheint nämlich nicht mit den Forderungen in Einklang zu stehen, die wir für den Raum aufzustellen durch die reine Anschauung gezwungen werden.[2]) Die reine Anschauung zwingt uns nämlich, die Raumgebilde nach ihrer Qualität und Quantität, also nach

---

1) **Max Simon**: „Zu den Grundlagen der nichteukl. Geom.“ S. 28.

2) Selbst **Gauß**, der innerlich fest von der Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie überzeugt ist, muß zugeben, daß „das Einzige, was unserm Verstande darin widerstrebt, ist, daß es, wäre sie wahr, im Raum eine *an sich bestimmte* (obwohl uns unbekannte) Liniengröße geben müßte.“ Brief von Gauß an Taurinus, Göttingen, 8. Nov. 1824. (C. F. Gauß' Werke VIII, Göttingen 1900. „Grundlagen der Geometrie“ S. 187.

Lage und Größe zu unterscheiden, sie zwingt uns aber ebensowenig dazu, einem einzelnen Raumgebilde eine absolute Lage im Raum, als einem einzelnen Gebilde absolute Größe zu erteilen. Wenn durch 2 Punkte eine gewisse Richtung und ein gewisser Abstand bestimmt ist, so ist diese Bestimmtheit doch nur als der Ausdruck für die räumliche Beziehung der 2 Punkte zu einander, nicht aber als ein absolutes Quale oder Quantum aufzufassen. Erst durch eine andere Richtung oder durch eine andere Strecke gelangen wir zu dem richtigen Lagen- und Größenbegriff, der also nur durch Vergleichen gefunden werden kann, d. h. Lagen und Größen im Raum sind stets relativ zu nehmen. Weder eine Richtung, noch eine Größe kann vor andern besonders ausgezeichnet sein. Das würde der von uns für den Raum zu fordernden absoluten Regelmäßigkeit widersprechen. Also widerspricht eine absolute Raum-Konstante unserer Anschauung. Ähnlich steht es ja mit der Zeit. Die Existenz eines absoluten Zeitmaßes würde ebenfalls als logische Möglichkeit anzunehmen sein, sie widerspricht aber dem Anschauungszwang, der auch die absolute Gleichförmigkeit der Zeitform fordert, so daß eine Spanne Zeit vor andern Zeitteilen nicht besonders ausgezeichnet sein darf. — Es ist noch der Einwand zu entkräften, daß ja auch in der euklidischen Raumform ein absolutes Maß existiert, nämlich für die Größe der Drehung (Winkel). Für den Winkel existiert indessen nicht ein absolutes Maß in dem Sinne eines absoluten Quantums. Für die nichteuklidische Raumform soll aber *eine* Strecke charakteristisch für den ganzen Raum sein, und durch sie jede Länge, als durch ein absolutes Maß, gemessen werden können.

c) Gründe für die Apriorität des Axioms von der Unendlichkeit des Raumes. — Gegen die beiden analytisch möglichen *endlichen* Raumformen (Riemannsche und Kleinsche in der Killingschen Bezeichnung) läßt sich ferner einwenden, daß wir die Fähigkeit haben, unsere Anschauung ins Unendliche zu erweitern. Allerdings fehlt uns fürs Unendliche die Anschauung, aber das Unendlichferne ist für uns nichts Fremdes, etwa eine Gegend des Raumes, wo die räumlichen Verhältnisse ganz andere sein könnten, sondern das Wort „unendlich" sagt uns nur aus, daß kein Grund vorhanden ist, mit derjenigen Erkenntnis an irgend einer noch so fernliegenden Stelle des Raumes aufzuhören, zu welcher wir vermöge innerer Organisation gezwungen sind. Schultz[1]) nennt diesen uns innewohnenden Zwang das *Regelmäßigkeitsprinzip.* Es ist die Forderung, „aus Einzeltatsachen aufs Allgemeine zu schließen, d. h. anzunehmen, die Natur wäre absolut regelmäßig". Auch Killing[2])

1) Julius Schultz: „Psychologie der Axiome". Göttingen 1899. S. 59.
2) Killing: „Einführung in die Grundlagen etc." I S. 18.

spricht davon, „daß der Geist unwillkürlich bereit ist, die durch direkte Erfahrung gewonnenen Anschauungen, für welche immer nur ein ganz kleines Gebiet zur Verfügung steht, zu verallgemeinern und als allgemein gültig anzusehen." Aber Killing hält diesen Drang gerade für unzuverlässig und für geeignet, unser Urteil zu trüben[1]), während wir im Gegenteil behaupten, daß auch für das Unendliche nicht abweichende Gesetze gelten *können*, weil wir solche Regelmäßigkeit psychologisch fordern, und weil *wir selbst uns das Unendliche konstruieren.* — Nach Riemann[2]) muß man allerdings Unbegrenztheit und Unendlichkeit trennen. Die Unbegrenztheit gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, die Unendlichkeit zu den Maßverhältnissen, oder mit andern Worten: Bei der Unbegrenztheit wird die *Grenze negiert* (z. B. bei der Kugel), bei der Unendlichkeit aber die *Grenze des möglichen Wachsens.* So scharfsinnig diese Unterscheidung aber auch ist, so muß doch darauf aufmerksam gemacht werden, daß hier wieder ein *Analogieschluß* vorliegt. Wenn bei Linien und Flächen Unbegrenztheit und Unendlichkeit verschiedene Bedeutung haben, so ist es nicht ohne weiteres notwendig, daß beim Raume dasselbe zutrifft. Wollen wir aber Analogie zulassen, so muß beachtet werden — wie Schotten[3]) anführt —, daß wir uns eine unbegrenzte, aber endliche Fläche nur vorstellen können als Grenze eines bestimmten Raumteils. Analog müßte ein unbegrenzter aber endlicher Raum ein durch ihn begrenztes Gebilde von 4 Dimensionen voraussetzen. Da wir nun die Existenz eines solchen ablehnen müssen, so ist auch ein unbegrenzter, aber endlicher Raum abzulehnen. — Ferner scheint mir der Zwang, das mögliche *Wachsen* der Elementargebilde, Gerade, Ebene, Raum, als ein *unbegrenztes* anzusehen, ebenso sicher vorzuliegen, als der, für diese Gebilde keine Grenzen anzunehmen. Setzen wir den Fall, der Raum sei endlich, so drängt sich sofort die Frage unwiderstehlich auf: *Wie* groß ist er? Wenn wir auch die richtige Antwort nicht wissen, so müßte doch die Möglichkeit angenommen werden, diese Frage richtig zu beantworten. Die richtige Antwort möge lauten: Der Raum hat die Größe a. Dann würde inbetreff der menschlichen Vorstellungskraft entweder anzunehmen sein, daß sie imstande ist, auch einen Raum von der Größe $(a + 1)$ vorzustellen, oder nicht.

1) Ein ähnliches Urteil fällt F. Klein: „Gutachten betreffend den 3. Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie etc." Math. Ann. 1898. S. 584 u. 585. Für ihn besteht das eigentliche Wesen der Axiome in einer „Idealisierung" der empirischen Daten. Unser „Anschauungszwang" ist für ihn nur ein Produkt „der Erziehung und der Gewöhnung."

2) Riemann: „Über die Hypothesen etc." III § 2.

3) Schotten: „Inhalt u. Methode des planimetr. Unterrichts." S. 120 Anm. 2.

Im ersten Falle würde aber die Größe des Raumes *für uns* nicht a, sondern mindestens $(a + 1)$ betragen. Im andern Falle würde man in den Zwiespalt geraten, daß man sich einen Raum von der Größe a vorstellen kann, nicht aber einen solchen von der Größe $(a + 1)$. Diese Eigentümlichkeit könnte doch nur im Raume selbst begründet sein. Die Empiristen nehmen eben an, daß uns die Erfahrung lehren würde — wenn überhaupt jemals menschliche Erkenntnis so weit dringen sollte —, der Raum habe die bestimmte Größe a, gerade so wie wir etwa vom Erdradius die Größe bestimmen können. Doch die beiden Fälle weisen einen fundamentalen Unterschied auf: Den Erdradius *kann* man sich auch beliebig größer vorstellen, den Raum aber, wie wir eben sahen, nicht, d. h. die einmal gefundene Raumgröße müßte jede andere *mögliche* Erfahrung ausschließen.

Etwas, dessen Gegenteil der möglichen Erfahrung widerstreitet, kann aber nicht empirisch gefunden sein, sondern ist a priori. Nun ist aber doch sicher die Erkenntnis, der Raum hat die Größe a, nicht a priori, daher ist die sich darbietende Schwierigkeit zu lösen unmöglich, und deshalb fordern wir die Unendlichkeit des Raumes, die das Verbot in sich schließt, überhaupt nach der Größe des Raumes zu fragen.

Gegen die endlichen Raumformen läßt sich ferner anführen, daß bei ihnen Bewegung eines Punktes längs einer Geraden und Drehung einer Geraden um einen Punkt in ihr ganz gleichartige Erscheinungen wären (Lineartransformation mit Zugrundelegung zweier konjugiert-imaginärer Fundamentalpunkte). Wenn nun auch meines Erachtens die reine Anschauung uns unmittelbar bekundet, daß auch fortschreitende Bewegung möglich ist, so scheint diese Tatsache doch nicht allgemein anerkannt zu sein. Suchen wir daher nach Gründen, die uns veranlassen, zwei Arten der Bewegung anzunehmen. Die Übertragung des Kausalitätsgesetzes auf das räumliche Gebiet verlangt wegen des zu fordernden absolut *passiven Verhaltens des Raumes*, als einer reinen Form, daß eine Erscheinungsreihe im Unendlichen fortbestehen bleibt, wofern nicht ein besonderer äußerer Grund für das Gegenteil vorliegt. Bei der Bildung des Begriffes Winkel wird nun die eine Gerade b in räumliche Beziehung zu einer sie schneidenden a gebracht. Bei der diese Beziehung vermittelnden Bewegung bleibt der Schnittpunkt von a und b, da er bereits beiden Geraden angehört, unverändert in seiner Lage. Das ist der Grund dafür, daß sich a von b nicht völlig, d. h. unendlich weit entfernen kann, wie es etwa der Fall wäre, wenn 2 Parallele sich parallel verschieben. Andrerseits wird aber durch die uns innewohnende psychische Fähigkeit, unsere reinen Anschauungen ins Unendliche zu erweitern, eine unaufhörliche Fortsetzung der Bewegung gefordert. Unser

seelisches Vermögen löst nun dieses Problem möglichst einfach, indem es die beiden einander scheinbar widerstreitenden Begriffe „unendliche Fortsetzung der Bewegung" und „Beschränkung der Bewegung" räumlich dadurch überbrückt, daß es die verschiedenen Lagen von b sich wiederholen läßt. Es wird also zu dem Begriff der periodischen Bewegung gedrängt. Ganz anders liegt die Sache, wenn wir 2 Punkte (A und B) in Beziehung bringen. Da hier das eine Element (B) mit dem andern (A) durchaus nichts Gemeinsames hat, und da die dem Schnittpunkt zweier Geraden entsprechende Verbindungslinie der beiden Punkte bei der Fortbewegung von B niemals dieselbe bleibt, so wird in diesem Falle durchaus kein Grund geboten, die Bewegung sich nicht so zu konstruieren, daß der Abstand der beiden Punkte ins Unendliche wächst. Es ist also nur das *Fehlen jeglichen Anlasses* für die Annahme einer in sich zurücklaufenden Geraden, was unserer Raumanschauung das Axiom von der Unendlichkeit der geraden Linie aufnötigt. Natürlich ist dieses kein Beweis der logischen Unmöglichkeit von Geraden, die in sich zurücklaufen. Ein solcher ist unmöglich, da wir ja auf analytischem Wege den Begriff von endlichen Geraden bilden können. Hier sollte nur gezeigt werden, daß die reine Anschauung vermöge einiger höchst einfachen Annahmen über den Raum, zu denen sie uns nötigt, auch zur Forderung der Unendlichkeit des Raumes drängt. Ähnlich steht es ja auch mit der Zeit. Auch der Begriff einer in sich zurücklaufenden zwar unbegrenzten, aber nicht unendlichen Zeit bietet keinen Widerspruch in sich, sondern erst die reine Anschauung zwingt uns zu der Forderung der zeitlichen Unendlichkeit oder Ewigkeit, da ein Grund dafür fehlt, daß die Erscheinungsreihe des Wachsens eines Zeitabschnittes mit verfließender Zeit in irgend einem Zeitmoment sich ändern sollte.

d) Gründe für die Apriorität des Parallelenaxioms. — Falls nun zugegeben wird, daß wir a priori genötigt sind, für den Raum absolute Regelmäßigkeit zu postulieren, läßt sich auch die Apriorität des Parallelenaxioms direkt begründen. Zu diesem Nachweis eignet sich besonders gut die von Legendre herrührende Fassung des Axioms: Wenn man zwischen den Schenkeln eines hohlen Winkels einen Punkt P annimmt, so wird sich in der euklidischen Geometrie durch P stets eine Gerade so ziehen lassen, daß sie die beiden Schenkel selbst schneidet. In der hyperbolischen Raumform dagegen müßte es 1. Punkte geben von der angegebenen Eigenschaft, 2. Punkte von der Eigenschaft, daß sich durch sie eine solche Gerade nicht ziehen läßt, und 3. als Grenzfall Punkte von der Eigenschaft, daß sich durch sie eine Gerade legen läßt, die beiden Schenkeln parallel geht. — Analytisch gleichberechtigt sind alle

3 angeführten Punktarten. Doch wir vermögen keinen Grund einzusehen, warum sich ein Punkt zwischen den Schenkeln eines hohlen Winkels von einem andern in räumlicher Beziehung qualitativ unterscheiden sollte. Es kommt hier noch dazu, daß das verschiedene Verhalten der einzelnen Punkte nicht erst in unendlicher Entfernung von dem Scheitelpunkt beginnt, sondern daß in der hyperbolischen Raumform 2 Punkte, die beide vom Schenkel *endliche* Entfernung haben, sich dadurch wesentlich von einander unterscheiden können, daß die Strahlen der durch die Punkte gelegten Büschel zu den Schenkeln des Winkels qualitativ verschiedene Beziehungen haben. Um nicht mißverstanden zu werden, möchte ich noch betonen, daß mir nicht die Tatsache, daß durch 2 sich schneidende Gerade in der hyperbolischen Raumform eine einzige dritte Gerade vollkommen bestimmt wird (nämlich die zu beiden Parallele) dem Regelmäßigkeitsprinzip des Raumes zu widersprechen scheint, denn sie entspricht der Tatsache der euklidischen Geometrie, daß durch eine Gerade und einen Punkt eine andere Gerade (Parallele) bestimmt ist; sondern erst durch die notwendige Folge jener Tatsache, daß die genannte Gerade nämlich die Punkte in zwei qualitativ verschiedene Gruppen scheiden müßte, scheint mir das Regelmäßigkeitsprinzip verletzt zu werden, da kein Grund für diese Unregelmäßigkeit angebbar ist. Wir sind somit genötigt, für den wirklichen Raum auch die hyperbolische Form abzulehnen.

6. *Resultate. Objektiver Raum. Psychologie der Raumanschauung.* — Fassen wir nun noch einmal kurz die Resultate unserer Betrachtungen zusammen, so wurde zunächst erkannt, daß nicht logisches Denken allein die Bedingungen für mögliche Erfahrung liefert, sondern daß daneben auch der reinen Raum- und Zeitanschauung eine ebenso streng beeinflussende Stellung eingeräumt werden muß. Dieser Einfluß wurde alsdann näher entwickelt, und es wurde nachgewiesen, daß trotz der vielen logisch möglichen Raumformen doch nur die eine euklidische den Forderungen der reinen Anschauung entspricht. Das Fundament der Lehre Kants über den Raum wird also durch die moderne Theorie der verschiedenen analytisch möglichen Raumformen nicht erschüttert. Auch wir sind genötigt, ihn als a priori gegebene reine Anschauungsform zu erklären. Da uns ferner die reine Anschauung, also ein psychischer Akt, zu ganz bestimmten Annahmen über räumliche Erscheinungen *zwang*, so muß der Raum, als alle Erfahrung erst ermöglichend, subjektives apriorisches Eigentum unseres Geistes sein, und es kann ihm in der Form, in welcher wir ihn anschauen, keine objektive Realität zukommen. Ob aber nicht dennoch der Grund für jene subjektive Vorstellung in einem „objektiven Raum" zu suchen ist — was Kant

leugnet —, scheint mir nicht genügend geklärt. Wenigstens wüßte ich nichts gegen Lotzes[1]) Ansicht einzuwenden, welcher darauf hinweist, daß die Annahme, der Raum sei apriorisches Eigentum unseres Geistes, nichts gegen seine Objektivität beweist. Denn, wenn auch ein solcher objektiver Raum existierte, würden „die vielen Anschauungen von ihm, die in den vielen denkenden Wesen vorhanden sind, natürlich nicht er selbst, sondern nur dieser Wesen subjektive Vorstellung von ihm sein.“ Ob wir indessen durch die Einräumung der *Möglichkeit eines objektiven Raumes* irgend etwas gewonnen haben, ist zweifelhaft. Gerade so wie Kants „Ding an sich“ der menschlichen Erkenntnis Schranken auferlegt[2]), über welche hinaus eine Erfahrung dem Menschen zur Unmöglichkeit wird, und wie daraus sich mit Notwendigkeit ergibt, daß Art und Grad der Abhängigkeit und Übereinstimmung zwischen Vorstellungen und Dingen dem Menschen für immer unerkennbar[3]) sind, gerade so steht es mit dem objektiven Raume. Auch hier wird Art und Grad der Abhängigkeit und Übereinstimmung zwischen dem objektiven Raum und unserer Raumanschauung niemals für den Menschen zu erkennen möglich sein.

In dem vorigen wurde auch erörtert, welches im einzelnen die Annnahmen über räumliche Erscheinungen sind, zu denen uns die Anschauung zwingt. Diese Annahmen können wir also wegen des subjektiven Charakters der Raumanschauung als *a priori aufzustellende Forderungen* unseres psychischen Vermögens ansehen.[3]) Es sind folgende:

1) Empfindungen überhaupt räumlich zu projizieren, d. h. einen Punkt vor anderen auszuzeichnen.

2) Qualitative Verschiedenheit und Vergleichbarkeit für Raumgebilde anzunehmen (Lage).

3) Quantitative Verschiedenheit und Vergleichbarkeit für Raumgebilde anzunehmen (Größe, also auch Teilbarkeit und Begrenzbarkeit ausgedehnter Raumgebilde).

4) Für den Raum absolute Regelmäßigkeit und Passivität anzunehmen.

5) Für eine räumliche Erscheinungsreihe das Fortbestehen anzunehmen, falls nicht ein äußerer Grund entgegentritt.

6) Die Fähigkeit anzunehmen, unsere Anschauungen ins Unendliche zu erweitern.

---

1) Lotze: „Metaphysik“ S. 101 f.

2) Vgl. Tobias: „Grenzen der Philosophie.“ S. 39 f.

3) Man vgl. Jakobson: „Die Axiome der Geometrie etc.“ Königsberg 1883.

4) Vgl. Julius Schultz: „Psychologie der Axiome“. Göttingen 1899.

7) Für den Raum anzunehmen, daß erst eine dreimalige Teilung mit Grenzübergängen zum unteilbaren Einzelnen führt.

Die ersten 6 Forderungen entspringen zwei verschiedenen seelischen Trieben oder Funktionen, nämlich: 1. *Logische Begriffe räumlich zu projizieren* (Identität [1], Qualität [2], Quantität [3], Kausalität [4, 5, 6]), und: 2. Die räumlichen Beziehungen so zu gestalten, daß dabei ein *Minimum psychischer Tätigkeit* aufgewandt wird (Ökonomie der Anschauung). Dieselbe tritt auf bei der Aufstellung der Axiome der projektiven und der metrischen Geometrie und entspricht im ganzen den Forderungen 4 bis 6). — Für die 7. Forderung muß noch außerdem der seelische Trieb angenommen werden, Räumliches nach 3 Dimensionen zu ordnen.

Es wäre nun noch zu erklären, woher jene Funktionen oder Triebe stammen, mit andern Worten, worauf es beruht, daß die Seele genötigt ist, die Eindrücke, die sie empfängt, räumlich in ganz bestimmter Weise zu ordnen. Herbart[1]) ist der erste gewesen, der diese Aufgabe sich gestellt hat. Lotze[2]) und Wundt[3]) haben sodann die Aufgabe teils zu lösen, teils ihre Unlösbarkeit nachzuweisen versucht. In der erwähnten Aufgabe liegen nämlich nach Lotze zwei verschiedene Forderungen: erstens zu erklären, worauf es beruht, daß die Seele die Eindrücke, welche sie von den Dingen empfängt, und durch welche nur unräumliche Zustände in der Seele hervorgerufen werden können, „überhaupt unter der Form eines räumlichen Nebeneinander anzuschauen genötigt ist, und zweitens, die Bedingungen und Mittel aufzufinden, durch die die Seele, wenn einmal ihre Fähigkeit, überhaupt Mannigfaltiges räumlich aufzufassen zugegeben wird, die jedesmaligen einzelnen Eindrücke in bestimmte räumliche Beziehungen einreiht, dieselben *lokalisiert*.“ Ich möchte mich hier der Ansicht Lotzes durchaus anschließen, der die erste Forderung für unausführbar erklärt und deutlich ausspricht, daß jeder Versuch, „das Nebeneinander, das uns in der Gestalt einer Raumlinie erscheint, aus irgend welchen abstrakten Verhältnissen noch unräumlicher Art zwischen psychischen Affektionen abzuleiten“, fehlschlagen muß. Auch die Zukunft kann darüber keine weitere Aufklärung bringen. Die Fähigkeit der Seele, räumliche Anschauung zu haben, wird stets ebenso unerklärt bleiben, wie die Entstehung des Bewußtseins überhaupt.[4]) Anderer Ansicht scheint darüber Wundt zu

1) Herbart: „Psychologie als Wissenschaft“. I.

2) Lotze „Metaphysik“, insbesondere S. 231 ff., und schon früher in seiner „Medizinischen Psychologie“. Leipzig 1854. Buch II.

3) Wundt: „Logik“ I. Bd., sowie in: „Menschen- u. Tierseele“ 1863. 2. Aufl. 1892.

4) Man vgl. hierzu: Tobias: „Grenzen der Philosophie“. — Simon: „Zu den Grundlagen etc.“ — Jakobson: „Die Axiome der Geometrie“ u. andere.

sein, der durch seine Untersuchungen den „Dualismus des materiellen und psychischen Geschehens bei der Empfindung“ glaubt aufheben zu können. — Inwieweit nun aber durch die *Lokalzeichentheorie* Wundts und Lotzes die zweite Forderung erfüllt wird, soll hier nicht beurteilt werden. Eins steht aber wohl fest, daß weder Wundts Theorie der „komplexen Lokalzeichen“, nach welcher die Raumanschauung durch „eine Ausmessung des mehrfach ausgedehnten Lokalzeichensystems der Netzhaut durch die einförmigen Lokalzeichen der Bewegung“ zustande kommt, noch Lotzes Lehre von den quantitativ und intensiv verschiedenen Lokalzeichen[1]), noch auch Wenderholds[2]) Theorie von den extensiven Lokalzeichen und seine Unterscheidung zwischen psychologischen und physiologischen Lokalzeichen vollkommen befriedigt.

1) Lotze a. a. O. Man vgl. auch Stumpf: „Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung“. Leipzig 1873.

2) Wenderhold: „Zur Metaphysik und Psychologie des Raumes“. Inaug. Dissert. Halle 1882.

Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten mittels Determinanten.

Von Ludwig Matthiessen in Rostock.

Diekmann hat in seiner „Einleitung in die Lehre von den Determinanten“ (1876) S. 24 eine elegante Methode angegeben, welche sich mit Vorteil auf die Auflösung spezieller symmetrischer quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten anwenden läßt. Im allgemeinen löst man die Gleichungen wie lineare nach den Unbekannten auf, setzt die Koeffizienten-Determinante gleich D und sucht darauf neue lineare Gleichungen der Unbekannten zu gewinnen, welche keine Absolutglieder enthalten. Es muß dann die Koeffizienten-Determinante des neuen Systems verschwinden, woraus sich der Wert von D und mit Hilfe der gegebenen Gleichungen die Werte der Unbekannten ergeben. Es möge diese Methode auf das folgende System zur Erläuterung angewendet werden:

$$\text{(I)} \qquad x^2 + xy + y^2 = a,$$

$$\text{(II)} \qquad y^2 + yz + z^2 = b,$$

$$\text{(III)} \qquad z^2 + zx + x^2 = c.$$

Zur Vereinfachung der Lösung kann man zuvor ableiten die lineare Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad (a-c)x + (b-a)y + (c-b)z = 0$$

und hinzufügen (I) und (II) in folgender Form:

$$(a-c)x+(b-a)y+(c-b)z=0,$$
$$(x+y)x+y\cdot y+0\cdot z=a,$$
$$0\cdot x+(y+z)y+z\cdot z=b.$$

Man erhält daraus

$$\text{(V)}\quad x=\begin{vmatrix}0 & b-a & c-b\\ a & y & 0\\ b & y+z & z\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a-c & b-a & c-b\\ x+y & y & 0\\ 0 & y+z & z\end{vmatrix}=d_1:D,$$

$$\text{(VI)}\quad y=\begin{vmatrix}a-c & 0 & c-b\\ x+y & a & 0\\ 0 & b & z\end{vmatrix}:D=d_2:D,$$

$$\text{(VII)}\quad z=\begin{vmatrix}a-c & b-a & 0\\ x+y & y & a\\ 0 & y+z & b\end{vmatrix}:D=d_3:D.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich die linearen Beziehungen

$$\text{(VIII)}\qquad Dx+(a-b)(b-c)y-(a^2-2ab+ac)z=0,$$
$$\text{(IX)}\qquad b(c-b)x-[D+b(b-c)]y+a(a-c)z=0,$$
$$\text{(X)}\qquad b(b-a)x+(a-b)(a-b-c)y+[D+a(a-c)]z=0.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{vmatrix}D:b & (b-a)(b-c) & -(a-2b+c)\\ c-b & D+b(b-c) & a-c\\ b-a & (b-a)(a-b-c) & D:a+(a-c)\end{vmatrix}=0.$$

Diese Determinante führt zu einer kubischen Gleichung in D, in welcher das Absolutglied gleich Null ist, wie man leicht findet, indem man $D=0$ setzt. Nun ist die Koeffizienten-Determinante

$$D=\begin{vmatrix}a-c & b-a & c-b\\ x+y & y & 0\\ 0 & y+z & z\end{vmatrix}$$
$$=(c-b)y^2+(c-b)xy+2(a-b)yz+(a-2b+c)xz.$$

Die vorhergehende Determinante ergibt aber für D auch eine Funktion der bestimmten Größen. Es ist überraschend in dieser Methode, daß die Determinante D eine quadratische Funktion der Unbekannten ist, welche sich zugleich durch die bestimmten Größen allein ausdrücken

läßt. Um die Wurzeln x, y, z zu erhalten, eliminiere man z aus (VIII) und (IX), woraus resultiert

$$Mx - Ny = 0, \quad y = \frac{M}{N}x.$$

Die Gleichung (I) liefert die Wurzelwerte

$$x = \pm \sqrt{aN^2 : (M^2 + NM + N^2)},$$
$$y = \pm \sqrt{aM^2 : (M^2 + NM + N^2)}.$$

Sodann eliminiere man x aus (IX) und (X), woraus

$$Oy - Pz = 0, \quad y = \frac{P}{O}z.$$

Die Gleichung (II) liefert den Wurzelwert

$$z = \pm \sqrt{bO^2 : (O^2 + PO + P^2)}.$$

Wenn z. B. $a = 7$, $b = 19$, $c = 13$ angenommen wird, findet man die Resolvente

$$D^3 + 72\,D^2 - 37\,908\,D = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$D_1' = 0, \quad D_2 \text{ u. } D_3 = -36 \pm 198, \quad D_2 = 162, \quad D_3 = -234.$$

Für $D = -234$ erhält man aus (VIII), (IX) und (X): $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Für $D = 162$ erhält man $x = -5\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $y = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $z = 7\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; $D = 0$ genügt den Gleichungen nicht.

Mit Hilfe derselben Methode lassen sich die Wurzeln von einem Systeme von n Gleichungen mit beliebig vielen oder n Unbekannten finden, von denen zwei quadratisch, die übrigen $n - 2$ linear und gleich Null sind. Die Resolvente in D ist immer vom $n$ten Grade.

Sind die linearen Gleichungen nicht Null, so können durch Substitution von $n - 2$ neuen Unbekannten die Absolutglieder derselben zum Verschwinden gebracht werden. Es sei beispielsweise $n = 4$, also zwei Gleichungen linear, die übrigen zwei quadratisch in folgender allgemeinen Form:

$$\text{(I)} \qquad a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = k,$$

$$\text{(II)} \qquad a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = l,$$

$$\text{(III)} \qquad a_3(x + \alpha_1 y + \beta_3 z + \gamma_1 u + \delta_1)x + b_3(y + \beta_2 z + \gamma_2 u + \delta_2)y \\ + c_3(z + \gamma_3 u + \delta_3)z + d_3(u + \delta_4)u = m,$$

$$\text{(IV)} \qquad a_4(x + \varepsilon_1 y + \zeta_1 z + \eta_1 u + \vartheta_1)x + b_4(y + \zeta_2 z + \eta_2 u + \vartheta_2)y \\ + c_4(z + \eta_3 u + \vartheta_3)z + d_4(u + \vartheta_4)u = n.$$

Substituiert man nun in diesen vier Gleichungen

$$z = z_1 + \begin{vmatrix} k & d_1 \\ l & d_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}, \quad u = u_1 + \begin{vmatrix} c_1 & k \\ c_2 & l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix},$$

so verschwinden die Absolutglieder der beiden linearen Gleichungen, und man gelangt schließlich zu einer Resolvente in D, welche vom vierten Grade ist.

Man kann ja nun freilich die Auflösung der vier Gleichungen, auch bewerkstelligen, dadurch daß man mittels der Gleichungen (I) und (II) z und u aus den beiden Gleichungen (III) und (IV) eliminiert. Man erhält dann noch zwei vollständige quadratische Gleichungen in x und y. Durch Anwendung der Methode des gemeinschaftlichen Teilers erhält man aber nach einem Theorem von Bézout immer eine Finalgleichung in x oder y, deren Grad gleich dem Produkte der beiden Ordnungsexponenten, also hier der vierte ist. Die biquadratische Finalgleichung ist nun allerdings durch eine kubische Resolvente lösbar; durch die Diekmannsche Methode wird eine solche direkt nicht gewonnen. Die Resolvente D steht in keiner angebbaren Beziehung zu jener.

Rostock, den 15. Juli 1903.

Rezensionen.

E. Landfriedt, Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig 1902, Göschen. IV u. 294 S. Sammlung Schubert XXXI.

Das vorliegende Lehrbuch der Sammlung Schubert stellt die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale in fünf Kapiteln dar, über deren wesentlichen Inhalt hier kurz referiert werden soll.

Das erste Kapitel erfaßt den Begriff der algebraischen Funktion als einer mehrwertigen Funktion mit nur polaren Unstetigkeiten und stellt die Lehre von der Fortsetzung dieser Funktion auf Grund der Puiseuxschen Methode der Reihenentwicklung dar. Das zweite konstruiert auf Grund der Ergebnisse des ersten die Riemannsche Verzweigungsfläche, diskutiert die Zusammenhangsverhältnisse der Fläche und ihre Zerschneidung in ein einfach zusammenhängendes Gebilde, entwickelt den Riemannschen Begriff einer Klasse algebraischer Funktionen und sucht die zwischen irgend zweien ihrer Elemente bestehenden Beziehungen auf. Dieser erste Teil des Werkes enthält — von einigen Einzelheiten abgesehen, welche nachher zur Sprache kommen sollen — eine klare und nicht zu schwierige Darstellung des viel behandelten Gegenstandes. Nur hätte nach unserer Meinung im Zusammenhang mit dem Begriffe der Klasse algebraischer Funktionen auch die birationale Transformation des Gebildes schon hier eingeführt und in ihren

Grundzügen erörtert werden sollen. Kann auch dieser Fundamentalbegriff nicht sogleich in seiner vollen Tragweite ausgeführt werden, so erscheint es doch nicht zweckmäßig, ihn so, wie dieses hier geschehen, an das Ende des systematischen Aufbaus der Theorie zu verweisen. Vielmehr ist er wegen seiner außerordentlichen Wichtigkeit so früh wie möglich zur Sprache zu bringen, damit durch ihn eine Übersicht über die verschiedenen Erscheinungsformen der zur Klasse gehörigen Riemannschen Flächen gewonnen und die Theorie der zu ihr gehörigen Abelschen Integrale erleichtert werden kann.

Viel weniger gelungen als die ersten beiden Kapitel erscheinen dem Referenten die drei folgenden, von denen sich das dritte mit der Klassifizierung und Aufstellung der zur gegebenen Riemannschen Fläche gehörigen Abelschen Integrale, das vierte mit dem Riemann-Rochschen Satze, das letzte mit den birationalen Transformationen und den zur Klasse gehörigen Moduln beschäftigt. Man weiß, daß in Riemanns Theorie diese Teile des Systemes aus dem Dirichletschen Prinzip hervorwachsen, und daß mit dem Verzicht auf dieses Prinzip das bei Forderung ausnahmsloser Allgemeinheit schwierige Problem sich ergab, die Integrale der Klasse mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten auf algebraischem Wege zu konstruieren und abzuzählen. Hier schließt sich nun der Verfasser genau an Christoffels Vorlesungen über Abelsche Integrale und an dessen in Brioschis Annalen erschienene Abhandlungen aus den Jahren 1879 und 1880 an. Daß sich der Verfasser in einem nur zur ersten Einführung bestimmten Lehrbuche auf den einfachen Fall beschränkt, in welchem das algebraische Gebilde nur Doppelpunkte aufweist, soll ihm gewiß nicht zum Vorwurfe angerechnet werden; dann aber hätten ihm außerordentlich viel einfachere Hilfsmittel zur Lösung der bezeichneten Fragen zur Verfügung gestanden. Ohne den historischen Wert und die Eigenartigkeit der Christoffelschen Untersuchungen hier etwa in Abrede stellen zu wollen, so glaubt Referent doch die Meinung vertreten zu dürfen, daß dieselben zur Zeit längst überholt und zumal für ein elementares Lehrbuch ganz besonders wenig geeignet sind. Wie einfach lassen sich die Integrale der Klasse nach Clebsch und Gordan konstruieren! Mit wie wenigen Schritten lassen sich, etwa so wie es Appell und Goursat tun, die Betrachtungen des Riemann-Rochschen Satzes erledigen, wenn man mit dem Verfasser sich überall auf Kurven mit bloßen Doppelpunkten und auf die Behandlung des „allgemeinen“ Falles beschränkt und die „Ausnahmefälle“ bei Seite läßt! Daß der Verfasser die geometrische Seite dieser Probleme hier völlig bei Seite gesetzt hat, ist seiner Arbeit nicht zum Vorteile gediehen, denn die algebraisch-geometrischen Methoden erweisen sich bei der hier gegebenen Umgrenzung des Stoffes als überaus einfach und zugkräftig, und sie bedürfen eben erst dann einer Ergänzung, wenn man die Forderung einer erschöpfenden und ausnahmslos allgemeinen Behandlung der Probleme stellt. Hingegen wird die Darstellung des Verfassers durch den einseitigen Anschluß an Christoffel überaus schwerfällig und undurchsichtig, und sie läßt auch gelegentlich die völlige Durchdringung der Materie vermissen. So werden z. B. die Punktsysteme auf der Riemannschen Fläche in solche der ersten und zweiten Gattung (die Spezialgruppen und die Nichtspezialgruppen von Brill und Noether) geschieden, je nachdem ein Differential erster Gattung für dasselbe verschwinden kann oder nicht, und nun wird der Begriff der Äquivalenz zweier Punktgruppen allgemein, der

der Korresidualität aber nur für Punktgruppen erster Gattung eingeführt. Daß aber diese Definition der Korresidualität viel zu eng und darum nicht üblich und daß überhaupt Äquivalenz und Korresidualität für Punktgruppen gleicher Ordnung ganz dasselbe, nur in verschiedenartiger Auffassungsweise, ist, dies erfährt der Leser nirgends. In Summa dürfte der zweite Teil des Buches wenig geeignet sein, einem Lernenden ein zutreffendes Bild des dermaligen Standes der Wissenschaft zu geben.

Zum Schlusse stellt Referent noch in Kürze einige Bemerkungen über Einzelheiten zusammen, die sich ihm bei der Lektüre des Buches ergeben haben.

S. 5 muß bei dem Beweise des Satzes (III), daß eine algebraische Funktion stets Unendlichkeitsstellen besitzt, statt des Koeffizienten $f_1(z)$, der sehr wohl eine Konstante sein kann, *irgend* ein Koeffizient $f_h(z)$ der Gleichung genommen werden. In § 14 werden einfach zusammenhängende Flächen als solche definiert, in denen jeder Ringweg einen Teil vollständig begrenzt. Geht man von dieser Definition aus, so muß bewiesen werden, daß eine einfach zusammenhängende Fläche I) durch jeden Querschnitt in zwei getrennte Teile zerlegt wird (S. 105), II) nur eine Randkurve besitzt (S. 106). Aber der für den Satz (I) geführte Beweis ist, wenn die Randkurvenzahl der Fläche noch nicht bekannt ist, unrichtig und nur für Flächen mit einer Randkurve zutreffend. Es muß also notwendig eine Umstellung der Sätze (I) und (II) erfolgen.

S. 162 heißt es: Besitzt ein Integral erster Gattung an p von den $2p$ Querschnitten a_λ, b_λ Periodizitätsmoduln, die Null sind, so reduziert es sich auf eine Konstante. Daß das nicht richtig ist, lehrt schon die Theorie der hyperelliptischen Integrale vom Geschlechte zwei, wo man sehr leicht eigentliche Integrale der ersten Gattung konstruieren kann, deren Perioden nur für a_1, b_1 von Null verschieden, für a_2, b_2 aber gleich Null sind.[1]) Es ist aber überhaupt ein sehr wesentlicher Punkt in der Theorie der Abelschen Integrale, daß die hier zu wählenden Querschnitte nicht p beliebige, sondern p solche sind, welche keine Schnittpunkte haben. Daß hier mehr als eine bloße Flüchtigkeit vorliegt, zeigt sich darin, daß derselbe Fehler in dem unmittelbar folgenden Satz II, sodann auf S. 164 f. 13 v. u. und in Satz V wiederkehrt, und daß schließlich sogar auf S. 171 die Behauptung aufgestellt wird, daß man bei fest angenommener Lage der $2p$ Querschnitte a_λ, b_λ die p Normalintegrale im ganzen auf $\frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots p}$ Arten wählen kann, während diese Anzahl in Wahrheit nur 2^p ist.

S. 268 heißt es bei der Darstellung des ersten Riemannschen Beweises für die Zahl der Moduln der Klasse, daß für die zu konstruierende Riemannsche Fläche T_1 „eine bestimmte Anzahl von Verzweigungspunkten in beliebig gewählte Lagen gedrängt werden kann, während die übrigen Verzweigungspunkte in T_1 fest bleiben. Die Anzahl dieser fest bleibenden Verzweigungspunkte in T_1 ist die Zahl der Moduln der Klasse." Die Sache ist aber gerade umgekehrt; eine bestimmte Anzahl von Verzweigungspunkten kann von vornherein als fest angesehen werden, während die übrigen unabhängig von einander beweglich bleiben, und der Grad der *Beweglichkeit* des Systemes der Verzweigungspunkte ist alsdann gleich der Anzahl der Moduln.

G. Landsberg.

---

1) Vergl. z. B. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, S. 474 f.

Heinrich Bruns. Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. Leipzig 1903, B. G. Teubner. VI u. 159 S.

Mit diesem Werke hat Herr Bruns, der hervorragende Leiter der Leipziger Sternwarte eine höchst willkommene Ergänzung der Lürothschen Vorlesung über numerisches Rechnen gegeben. Hat dieser im wesentlichen die elementaren oder die Rechnungen für die Mittelschulen berücksichtigt, so jener die Bedürfnisse der Astronomie und der angewandten Mathematik. Der Verf. behandelt nur diesen Teil der „Technik, deren Zweck in der ziffernmäßigen Verfolgung mathematischer Größenbeziehungen besteht", aber dies in einer Weise, die ihm die Dankbarkeit aller Interessenten sichert.

So einfach übrigens die Kenntnisse aus der reinen Mathematik sind, die zum Verständnis der vielen praktischen Methoden nötig sind, so erfordern sie doch zu ihrer Würdigung und vergleichenden Beurteilung sehr viele Übung, und der Verf. hat deshalb überall Beispiele gegeben.

Abschnitt I. Differenzen und Summen. Das Verständnis des Differenzenschemas mit seiner Fortsetzbarkeit nach oben und unten bildet die Grundlage des Buches, und der Leser muß sich mit der von Encke mitgeteilten Gaußschen Bezeichnung durchaus vertraut machen. Verf. zeigt, wie sich der Fehler in der Differenzenzeile ausbreitet.

Abschnitt II. Interpolation bei Tafeln.

Hier hätte Ref. gern die so klare allgemeine Darstellung des Problems aus Abschnitt 9 als Einleitung gesehen. Historisch ist interessant, daß, wie die Simpsonsche Regel nicht von Simpson herrührt, so die „Lagrange"sche Interpolationsformel, die Quelle aller andern, sich schon früher, 1779, bei Waring in den Philosoph. Transact. 69 findet. Es werden die Formeln von Newton, Gauß, Stirling, Bessel auf ihre Brauchbarkeit geprüft.

Abschnitt III. Numerische Differentiation. Sie beruht auf der Erkenntnis, daß die Fundamentalformel der Interpolation, die Formel 12, auch sofort Näherungswerte für die Ableitung und das Integral von $f(x) = f(a + th)$ gibt. Es werden für die Anwendungen, die auf die erste und zweite Ableitung beschränkt werden, die Gaußschen Formeln ausgeschlossen.

Abschnitt IV. Numerische Integration, Summationsmethode. Die Methoden der numerischen Integration zerfallen in zwei Gruppen, je nachdem die benutzten Werte dem Integrationsgebiet angehören oder auch außerhalb liegen können. Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, daß es sich nur um reelle Werte der Variabeln handelt. Verf. beginnt mit der zweiten Gruppe, die er kurz „Summenmethode" nennt, da sie die Fortsetzung des Differenzenschemas nach oben, die Summenreihen benutzt. Es sind nur die Formeln S und B (Stirling und Bessel) und analoge, die sich aus Gliedern derselben Zeile des Differenzenschemas aufbauen, zweckmäßig. Verf. geht von S aus. Als Beispiel nimmt er das von Gauß (Briefwechsel mit Bessel) behandelte $\int \frac{dx}{\log x}$ von 10^5 bis 2.10^5.

Abschnitt V. Num. Integration, Viereckverbesserung. Die Fläche zwischen Kurve und zwei Ordinaten und Abszissenachse wird näherungsweise durch Trapeze (mit Segmenten) oder Rechtecke (mit Exzeß) berechnet. Hierher gehören wohl auch die Formeln von Poncelet und Parmentier.

Abschnitt VI. Mittelwertmethoden. Simpsonsche Regel (Cotes).

Abschnitt VII. Trigonometrische Reihen. — Auswertung der durch bestimmte Integrale definierten Koeffizienten.

Abschnitt VIII. Rekursionsformeln. Verf. behandelt als Beispiel die Kugelfunktionen, die trigonometrische Reihe $1 : \sqrt{1 - 2x \cos y + y^2}$ und die Besselsche Funktion $I_n(x)$ für ganzes n.

Abschnitt IX. Interpolation im weiteren Sinne. Nach eben so kurzer wie scharfer Definition des Problems geht Verf. auf die Methode der kleinsten Quadrate und ihre Verallgemeinerung durch Cauchy ein. Das Werk des Herrn Bruns wird für die angewandte Mathematik so unentbehrlich sein wie die Logarithmentafel, aber auch den reinen Mathematikern wäre eine Vertrautheit mit dem Brunsschen Buche zu wünschen.

Straßburg i. E. MAX SIMON.

Friedrich Junker. Höhere Analysis. Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 89 Figuren im Text. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig: G. J. Göschen. 208 S. 12mo (Sammlung Göschen, No 88, 1901).

Fr. Junker. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Mit 42 Figuren im Text. Leipzig: G. J. Göschen. 119 S. 12mo (Sammlung Göschen, No 146, 1902).

Fr. Junker. Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Leipzig: G. J. Göschen, 130 S. 12mo (Sammlung Göschen, No 147, 1902).

Als wir im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik **30**, 263, 1899 das Erscheinen des ersten Büchelchens anzeigten, haben wir einerseits die Brauchbarkeit der praktisch abgefaßten Schrift anerkannt, andererseits aber auch auf die vielen Ungenauigkeiten hingewiesen, deren Vorkommen wir einem Mangel an Sorgfalt bei der letzten Durchsicht zuschrieben. Trotz der Verbesserungen, die im Titel der zweiten Auflage versprochen sind, können wir leider nicht finden, daß die von uns damals angemerkten Fehler ausgemerzt sind. Wie wenig sorgfältig die Durchsicht gewesen ist, möge ein neues Beispiel zeigen. S. 135 wird der Schwerpunkt des Bogens der Kurve $9ay^2 = x(x - 3a)^2$ gesucht; die Schwerpunktskoordinaten ξ, η zwischen $x = 0$ und $x = 3a$ werden bestimmt als $\xi = \frac{4}{3}a$, $\eta = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, während das Maximum vom y in dem Intervalle $(0, 3a)$ von x den Wert $\frac{3}{2}a$ hat. Die Unrichtigkeit des Resultates springt also in die Augen; die richtigen Werte sind $\xi = \frac{7}{5}a$, $\eta = \frac{1}{4}a\sqrt{3}$ ($\eta > 0$; der negative Wert von η ist dadurch entstanden, daß für die positiven Ordinaten $3y\sqrt{a} = \sqrt{x}(x - 3a)$ statt $\sqrt{x}(3a - x)$ gesetzt ist). — Die unbewiesene und unrichtige Behauptung, daß der Schwerpunkt eines Kurvensektors immer auf demjenigen Radiusvektor liege, der die Fläche des Sektors hälftet, ist auf S. 139 wiederholt, ebenso in der Aufgabensammlung zur Integralrechnung (S. 99) und hat hier (S. 103) zu einer falschen Bestimmung des Schwerpunktes bei der Fläche der Archimedischen Spirale geführt.

Die beiden neuen Bändchen sollen als Aufgabensammlungen auch von solchen Lesern benutzt werden, welche die Differential- und die Integralrechnung des Verf. nicht besitzen. Sie teilen die Vorzüge und die Schwächen

dieser älteren Schriften. Die Aufgaben (437 zur Differentialrechnung, 417 zur Integralrechnung) sind mannigfaltig und interessant; die Korrektheit ist auch bei ihnen nicht immer vorhanden.

Bei den Übungsbeispielen zur Bestimmung extremer Werte von Funktionen einer Veränderlichen (S. 53 und 54 der Aufgaben zur Differentialrechnung) ist gleich die Lösung der ersten Aufgabe $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12x$ falsch; die angegebene Lösung $x = 1$ Max., $x = 2$ Min. gehört zu $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Zu $f(x) = \sin x . \cos(x - \alpha)$ wird bloß $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha$ als Maximum gegeben, während $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha + n\pi$ die Maxima, $x = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha + n\pi$ die Minima liefert. Ebenso ist zu $y = \frac{1}{2}a \sin\varphi \cos\varphi$ nur $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ als zum Maximum von y gehörig angegeben, dagegen $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ ausgelassen, wodurch das Minimum bestimmt ist. Nebenbei ist die bezügliche Aufgabe (No 267) unverständlich gefaßt. In der folgenden Aufgabe $r = 2a(1 + \cos\varphi)$, $y = r\cos\varphi$, die extremen Werte von y zu finden, gehört die angegebene Lösung nicht zu $y = r\cos\varphi$, sondern zu $y = r\sin\varphi$. Nach S. 108 soll die gleichseitige Hyperbel die Umhüllungslinie einer Geraden sein, welche mit den Schenkeln eines gegebenen beliebigen Winkels ein Dreieck von konstantem Inhalte begrenzt. Gleich dahinter (S. 109) wird angegeben, daß die auf bekannte Weise als Umhüllungslinie gefundene Parabel $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1$ die Achsen in den Punkten $x = 2a$ und $y = 2b$ berührt. In dem Resultate der folgenden Aufgabe ist a und b vertauscht. Die Bestimmung derjenigen Kurve dritter Ordnung, welche die Geraden $x = 0$, $x + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$ zu Asymptoten hat und durch die Punkte $(0, 0)$, $(-\frac{1}{3}, -1)$, $(\frac{11}{2}, \frac{3}{2})$ geht, hat die Lösung $x(x+1)(x+y-2) + \lambda(y - 3x) = 0$, wo λ einen unbestimmten Faktor bezeichnet; der Verf. gibt nur diejenige Gleichung, in der $\lambda = -1$ ist (No 350, S. 83).

In No 80 der Aufgaben zur Integralrechnung findet man:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + ln\,\frac{1+x}{2}, \text{ statt } \sqrt{1-x^2} + \text{arc sin } x.$$

No 122, wo $W = \sqrt{x^2 + 6x + 45}$ gesetzt ist, lautet:

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{x^2\,W} = \frac{2}{45}\frac{W}{x} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\,ln\,\frac{x + 15 - \sqrt{5}\,W}{x}.$$

Der Koeffizient des zweiten Gliedes des Resultates ist aber $17/45\sqrt{5}$. Der Flächeninhalt der Kurve $y^2 = x^3 - x^2$ zwischen 1 und x ist $\frac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}(2 + 3x)$, nicht aber $\frac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-2)$, wie S. 61 steht; die Unrichtigkeit des gegebenen Resultates ersieht man aus der daneben stehenden Figur sofort ohne Rechnung. Bei dem Bogen der Archimedischen Spirale (S. 56) ist die Hinzufügung der Grenzen im Resultate überflüssig, weil der berechnete Wert an der unteren Grenze verschwindet. Auf S. 58 sind aus Polarkoordinaten „Probekoordinaten" geworden.

Wenn bei einer Vornahme von Stichproben, die bei Sammlungen, wie sie vorliegen, sich doch immer nur auf wenige, zufällig herausgegriffene Beispiele beziehen können, so viele Punkte sich vorfinden, die zu Erinnerungen Anlaß geben, so genügt das, um unser obiges Urteil über mangelnde

Korrektheit zu rechtfertigen. Wir würden diesen Umstand hier nicht so ausführlich zur Sprache gebracht haben, wenn nicht der geringe Preis der einzelnen Bändchen der Sammlung Göschen ihnen eine ungemein weitgehende Verbreitung unter den Studierenden verschafft hätte; diese Anfänger in der Handhabung der Differential- und Integralrechnung müssen daher auf die vielen Ungenauigkeiten in den vorliegenden Bändchen hingewiesen werden.

Berlin. E. Lampe.

Richard Manno. Theorie der Bewegungsübertragung als Versuch einer neuen Grundlegung der Mechanik. Leipzig, Wilhelm Engelmann. V u. 102 S. gr. 8⁰.

Nachdem der Verf. auf der Naturforscherversammlung in Kassel, wo er einen Vortrag über die in dieser Broschüre niedergelegten Gedanken hielt, erfahren hat, daß nicht einer der anwesenden kompetenten Fachgelehrten, unter ihnen Ludwig Boltzmann, für seine neue Grundlegung zugänglich war, halten wir uns der Mühe für überhoben, des näheren auf den Inhalt einzugehen.

Berlin. E. Lampe.

Henri Lebesgue. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. [Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. E. Borel.] Paris, Gauthier-Villars, 1904. 138 S.

Das Werk behandelt den Begriff des Integrals einer reellen Funktion und die Beziehungen zwischen den Operationen des Differenzierens und Integrierens unter sehr allgemeinen Voraussetzungen hinsichtlich der betrachteten Funktionen. Zunächst wird die ältere, Cauchy-Dirichletsche Definition des bestimmten Integrals einer unstetigen Funktion erörtert und neu gefaßt; sodann wird die Riemannsche Integrabilitätsbedingung eingehend untersucht und in mehrere, äußerlich sehr verschiedene Formen gebracht.

Um den allgemeinen Begriff anwenden zu können, entwickelt unser Werk die Theorie der Funktionen von beschränkter Schwankung nach Jordan; das sind die Funktionen, die als Differenz zweier nicht zunehmender oder nicht abnehmender Funktionen dargestellt werden können, und die wohl noch in Jacobis Sinne als vernünftige Funktionen anzusehen sind, obwohl sie eine große Mannigfaltigkeit von Singularitäten zulassen. Mit Hilfe dieser Funktionen werden die Bedingungen für die Rektifizierbarkeit der Kurven untersucht. Als zweite Anwendung des entwickelten Integralbegriffs wird das Problem der unbestimmten Integration behandelt, und die Beziehungen zwischen dem Integranden und den Ableitungen des Integrals nach seinen Grenzen untersucht, die sich ja bei allgemeinen Voraussetzungen nicht ganz einfach gestalten. Dabei kommen unter anderem die Sätze von Scheeffer vor, die aussagen, in welchem Umfange eine Funktion durch ihre Ableitungen bestimmt ist, wenn unendlich viele Unstetigkeiten vorkommen.

Im letzten Abschnitt wird der Begriff des Integrals auf sehr originelle Weise aus gewissen formalen Eigenschaften entwickelt; der Verfasser vergleicht diese Entwicklung mit der axiomatischen Darstellung der Geo-

metrie in Hilberts Grundlagen der Geometrie, und definiert eine Klasse von „summierbaren“ Funktionen, die sich nicht ganz mit den im Riemannschen Sinne integrierbaren decken.

Als bemerkenswerte Einzelheit sei aus dem 6. Kapitel eine Methode hervorgehoben, das bestimmte Integral einer beliebigen stetigen Funktion aus dem Begriff des unbestimmten zu entwickeln. Man beginnt mit dem Satze, daß eine gleichmäßig konvergente Reihe gliedweise integriert werden kann, wobei unter Integration die Umkehrung des Differenzierens verstanden wird. Nun kann jede stetige Funktion angenähert durch eine andere dargestellt werden, deren geometrisches Bild ein Polygon ist, und zwar mit gleichem Grade der Annäherung für das ganze betrachtete Intervall. Daraus schließt man leicht, daß jede stetige Funktion durch eine gleichmäßig konvergente Reihe von integrierbaren Funktionen dargestellt, also selbst integriert werden kann. Auf diese Weise wird der Beweis für die Existenz des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion überflüssig, wenn man den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz als bekannt voraussetzt.

Berlin. A. Kneser.

C. Runge. Theorie und Praxis der Reihen. Sammlung Schubert XXXII. Leipzig, Göschen 1904. 266 S.

Bei der Aufstellung und Untersuchung unendlicher analytischer Ausdrücke, insbesondere unendlicher Reihen und Produkte hat man zunächst die Konvergenz nachzuweisen, um überhaupt mit den betrachteten Gebilden rechnen und Gleichungen zwischen ihnen aufstellen zu können. Will man aber zur numerischen Berechnung konkreter Fälle übergehen, die doch eigentlich Zweck und Ziel der wichtigsten Teile der Analysis ist, so erheben sich ganz neue Probleme. Es genügt nicht, wenn man weiß, daß der Rest einer Reihe etwa nach einer Rechenarbeit von der Dauer eines Menschenlebens unter eine vorgeschriebene Grenze herabsinkt, sondern man will mit einer der Wichtigkeit des Problems angemessenen Zeit auskommen, und um zu erkennen, ob und wie dies möglich ist, muß der Grad der bei irgend einer Annäherung erreichten Genauigkeit weit eingehender diskutiert und die Untersuchung der speziellen Natur des betrachteten Ausdrucks weit mehr angepaßt werden, als es in der reinen Analysis meistens geschieht und als es für rein theoretische Zwecke nötig ist.

Indem Herr Runge eine Reihe wichtiger analytischer Ausdrücke und die meist gebrauchten Darstellungsformeln unter beiden Gesichtspunkten, dem theoretischen wie dem praktischrechnerischen, bearbeitete, hat er an verschiedenen Stellen die Kluft zwischen der reinen Analysis und den Anwendungen überbrückt und sich dadurch den Anspruch auf den lebhaften Dank der Vertreter beider Untersuchungsrichtungen erworben.

Das Werk beginnt mit einer allgemeinen Auseinandersetzung über die Konvergenz der Reihen und das Rechnen mit ihnen, entwickelt den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz in anschaulicher Weise, wendet sich sodann den Potenzreihen zu und gibt handliche Methoden für die Division, Einschachtelung und Umkehrung dieser Reihen sowie zur Abschätzung des Rests. Es folgen Untersuchungen im Anschluß an das Cauchysche Integral, aus dem eine schöne, vom Verfasser des Werks vor Jahren entwickelte

Methode abgeleitet wird, eine analytische Funktion auf einem beliebigen Gebiet mit gleichmäßig vorgeschriebener Genauigkeit durch rationale Funktionen darzustellen. Ferner wird das Cauchysche Integral zur Entwicklung analytischer Funktionen nach gewissen Polynomen benutzt, die vor der Taylorschen Reihe gewisse Vorzüge bietet, wenn man auf einer ganzen Strecke möglichst guten Anschluß an eine gegebene Funktion herstellen will. Daneben werden noch die Entwicklungen nach Legendreschen Polynomen sowie die aus der parabolischen Interpolation entspringenden Reihen betrachtet; bei ersteren wird von der Aufgabe ausgegangen, ein Polynom gegebenen Grades einer reellen Funktion so anzuschmiegen, daß der Mittelwert des Fehlerquadrats ein Minimum wird.

Das Kapitel über die Fourierschen Reihen bietet wesentliche Vorzüge gegenüber den bisherigen Darstellungen des Gegenstandes. Es beginnt mit der endlichen trigonometrischen Reihe und stellt die Aufgabe, diese Reihe einer gegebenen periodischen Funktion so anzupassen, daß wiederum der Mittelwert des Fehlerquadrats ein Minimum werde. Daraus ergeben sich die Fourierschen Ausdrücke der Koeffizienten, und für den bezeichneten Mittelwert wird ebenfalls eine Formel abgeleitet. Ist die Funktion nur an diskreten Stellen gegeben, so erhält man aus der Forderung des Minimums endliche Summenausdrücke, zu deren Berechnung vervollkommnete Methoden gegeben werden; insbesondere wird der Michelsonsche Apparat für harmonische Analyse besprochen.

Die Fouriersche Entwicklung einiger analytisch definierter Funktionen leitet über zu der Frage nach der größten Abweichung eines angenäherten Ausdrucks von der dargestellten Funktion, eine Frage, die offenbar durch die Untersuchung des mittleren Fehlerquadrats noch nicht erledigt ist. Sie führt zu denjenigen Betrachtungen, die dem Dirichletschen Beweis für die Konvergenz und Gültigkeit der Fourierschen Reihe zugrunde liegen. Dieser Beweis wird in sehr geschickter Weise vorgeführt, und der Rest der Fourierschen Reihe unter verschiedenen Voraussetzungen in Grenzen eingeschlossen, insbesondere auch der Rest der Reihe, die entsteht, wenn man die eine gegebene Funktion darstellende Kurve durch Stücke einander oskulierender Parabeln ersetzt.

Hieran schließt sich ein theoretischer Paragraph, der eine schöne Theorie des Poissonschen Integrals enthält, aus dem man bekanntlich schließt, daß eine beliebige stetige periodische Funktion mit vorgeschriebener Genauigkeit durch eine endliche trigonometrische Reihe dargestellt werden kann. Wo dieser Satz auftritt, vermißt man den Namen Weierstraß; es wäre doch wohl an dieser Stelle darauf hinzuweisen, daß der ausgesprochene Satz bei der vorausgegangenen Entwicklung der Theorie der Fourierschen Reihe eine große und überraschende Entdeckung gewesen ist, so einfach er auch jetzt bewiesen werden kann.

In dem Abschnitt über unendliche Produkte werden die Elemente der Theorie der elliptischen Funktionen ausgehend von den Produktausdrücken der Θ-Funktionen entwickelt, und von ihnen wird zu den Integralen übergegangen, ähnlich wie Jacobi in den von Borchardt publizierten Vorlesungen von den Θ-Reihen ausgeht. Unser Werk entwickelt die Methoden zur Berechnung vollständiger und unvollständiger Integrale erster Gattung, insbesondere auch die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Im letzten Kapitel

werden einige der früheren Untersuchungen auf Funktionen zweier Variablen ausgedehnt.

Alles in allem kann das Werk nach Tendenz, Form und Inhalt lebhaft willkommen geheißen werden.

Berlin. A. Kneser.

Weber, H. und **Wellstein, J.** **Enzyklopädie der Elementar-Mathematik.** Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. 1. Band: Elementare Algebra und Analysis, bearbeitet von Heinrich Weber. XIV u. 447 S. gr. 8⁰. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Der vorliegende Band umfaßt diejenigen Teile der Algebra und Analysis, die Gegenstand des Unterrichts an den höhern Lehranstalten sind, aber auch noch Kapitel, die auf der Schule wohl selten durchgearbeitet werden können, so einzelne Abschnitte aus der Zahlentheorie, den Sturmschen Satz, den Fundamentalsatz von der Wurzelexistenz, die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen.

Von den in neuerer Zeit so zahlreich erschienenen Lehrbüchern der Elementar-Mathematik unterscheidet sich die Webersche Enzyklopädie aufs vorteilhafteste und ganz erheblich dadurch, daß sie ihren Stoff von Anfang an streng wissenschaftlich, dabei aber klar und verständlich, behandelt und überall die Ergebnisse der neueren Forschung berücksichtigt. Hervorgehoben als besonders interessante und wertvolle Kapitel seien die exakte Entwicklung des Zahlbegriffs (nach Dedekindscher Anschauung) und der Verhältnislehre, der Fundamentalsatz der Algebra, die Anwendung der Theorie der Potenzreste auf die Umwandlung gemeiner Brüche in Dezimalzahlen, die der Gruppentheorie auf die Lösung der biquadratischen Gleichungen, die Behandlung des casus irreducibilis der kubischen Gleichung, der Beweis für die Unauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch Radikale, die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks, endlich die Beweise für die Transzendenz der Zahlen e und π. Die Enzyklopädie will kein Schulbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes sein, ist aber zur Vorbereitung auf den Unterricht, namentlich in den oberen Klassen, den Lehrern der Mathematik dringend zu empfehlen, welche die bezüglichen Originalarbeiten nicht alle selbst studiert haben, sich aber doch orientieren wollen, wie vom Standpunkte der modernen Wissenschaft die Begriffsbildungen, Methoden und Entwicklungen der Elementar-Mathematik zu gestalten sind.

Berlin. C. Färber.

Eugen Netto. **Elementare Algebra.** Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. VIII u. 200 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner.

Über den Inhalt seiner „Elementaren Algebra" sagt der Herr Verf. im Vorwort selbst das Folgende: „Die Kapiteleinteilung schließt sich an die Gleichungen der vier ersten Grade an. Die Behandlung der Gleichungen ersten Grades leitet auf die Determinanten zweiten Grades, auf Kettenbrüche und unbestimmte Gleichungen. Die reinen Gleichungen zweiten Grades führen in das Studium der Newtonschen Näherungsmethode, der periodischen Kettenbrüche, der komplexen Größen ein. Bei den allgemeinen Gleichungen

zweiten Grades werden die Begriffe der Mehrwertigkeit, der Gleichungstransformation, der Diskriminante eingeführt. Es folgt dann im vierten Kapitel ein Exkurs in das Gebiet der Kombinatorik; in ihm findet sich der binomische und der polynomische Satz, die Behandlung der arithmetischen Reihen, sowie die Vorbereitung auf eine im fünften Kapitel gegebene elementare Theorie der Determinanten. An diese Theorie schließt sich die Behandlung von linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Die reinen Gleichungen werden im sechsten Kapitel behandelt; naturgemäß wird der Begriff der primitiven Einheitswurzeln eingeführt, und es folgt eine Besprechung der einfachsten, an ihn sich knüpfenden Probleme. Ausführlich ist dann in den beiden letzten Kapiteln die Theorie der kubischen und die der biquadratischen Gleichungen behandelt. Sie führt zu den symmetrischen, den zwei- und den mehrwertigen Funktionen, zu Resultanten und Diskriminanten, zu Resolventen und zu Invarianten. Zum Schluß wird der Sturmsche Satz hergeleitet.“ Aus dieser kurzen Inhaltsangabe geht schon hervor, daß, wenn auch die Vorlesungen sich scheinbar auf das elementare Gebiet der Gleichungen der vier ersten Grade beschränken, ihre Eigenart darin besteht, von Anfang an jeden Anlaß zu benutzen, um in vielerlei Probleme der höhern Algebra und auch der Zahlentheorie einzuführen und dem Studierenden das spätere Verständnis der allgemeinen Theorien dadurch zu erleichtern, daß sie ihm zunächst für die einfachsten Fälle vorgetragen und erläutert werden. Auf die erschöpfende Behandlung derjenigen Fragen, die das philosophische Gebiet streifen, wie „Grenzbegriff“, „irrationale Zahlen“, etc. hat der Verf. absichtlich verzichtet. Für Studenten solcher Universitäten, an welchen eine derartige vorbereitende Vorlesung nicht gehalten wird, dürfte das Buch von größtem Nutzen sein. Aber auch mathematisch befähigten und interessierten Primanern, die privatim ihre Kenntnisse erweitern und vertiefen möchten, ist das Studium dieser Vorlesungen ihrer klaren, anregenden Darstellungsweise wegen durchaus zu empfehlen.

Berlin. C. Färber.

Julius König. Einleitung in die Theorie der algebraischen Größen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. X u. 564 S.

Die Algebra hat in der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts sich zu nie geahnter Höhe entwickelt, und eine Reihe bedeutender Forscher war zu ihrer Förderung tätig. Da so von verschiedenen Seiten die neuen Begriffe geschaffen wurden, konnte es nicht ausbleiben, daß die Bezeichnungen auch verschieden ausfielen, weil sich die Begriffe zum Teil nicht deckten. Der Verfasser hat es nun unternommen, die verschiedenen Darstellungsweisen der algebraischen Tatsachen und Vorgänge zu einem einheitlichen Ganzen zusammenzuschmieden. Man darf wohl sagen, daß ihm dieser Versuch gut geglückt ist, und daß sein Buch wesentlich zur Annahme einheitlicher Bezeichnungen beitragen wird. Er schließt sich zwar in der Behandlungsweise durchweg an Kronecker an und stützt sich auf die Gedanken der „Festschrift“, aber er vergißt auch die anderen Forscher nicht und liefert selbst wertvolle Beiträge zum weiteren Aufbau. Die durch das Zusammenfassen nötige Neuprägung der Begriffe macht die Lektüre des Werkes etwas

mühevoll, aber man gewinnt durch die zwar abstrakte, aber klare und scharfe Darstellungsweise, die die Fragen immer bis zur letzten Allgemeinheit durchführt, bald einen großen Überblick über die Probleme der Algebra, so daß man dem Verfasser mit vielem Interesse auf seinem Wege folgt.

Es wird vor allem meine Aufgabe sein, die vom Verfasser gegebenen Begriffsbestimmungen zu besprechen.

Zunächst: Eine *algebraische Größe* wird inhaltlich durch eine Reihe von bestimmten und unbestimmten Zahlen festgelegt. In diesem Sinne betrachtet der Verfasser Bereiche von algebraischen Größen, und zwar nach seiner Bezeichnung *holoide* und *orthoide* Bereiche. Bemerkt sei, daß die ganzen Zahlen und die rationalen Zahlen derartige Bereiche bilden, aber sie nicht erschöpfen. Beide Bereiche haben dieselbe Eigenschaft, ein „gewöhnliches“ Additions- [kommutativ, assoziativ] und Multiplikationsgesetz [kommutativ, assoziativ, distributiv] zu besitzen. Ferner haben die Gleichungen $\alpha + \nu = \alpha$, $\nu\beta = \nu\alpha$ für beliebige α, β nur die eine Lösung $\nu = 0$. Eine Größe ε, die für beliebige α, β die Gleichung $\varepsilon\alpha = \varepsilon\beta$ befriedigt, soll absolute Einheit heißen und mit 1 bezeichnet werden. Ein Bereich heißt dann holoid, wenn außerdem die durch wiederholte Addition entstehende Reihe $1, 1+1, 1+1+1, \ldots$ die Null nicht enthält, und wenn es im Bereich mindestens zwei Größen α und β gibt, für die die Gleichung $\alpha\xi = \beta$ nicht lösbar ist. Ist die letzte Bedingung immer erfüllbar, so heißt der Bereich orthoid. Der einem holoiden Bereich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ zugeordnete orthoide Bereich ist $\beta = \frac{\alpha_i}{\alpha_k}$. Später wird noch ein *hyperorthoider* Bereich erwähnt, in dem Teiler der Null vorkommen. Ist in dem holoiden Bereich die Gleichung $\alpha\xi = \beta$ lösbar, so ist α ein Teiler von β. Zwei Größen, die sich nur um einen Teiler der Einheit unterscheiden, heißen *äquivalent*. Eine *irreduzible* Größe besitzt keine echten Teiler; eine Größe π heißt *Primgröße*, wenn ein Produkt $\alpha\beta$ nur dann durch π teilbar ist, wenn α oder β es ist. Ein holoider Bereich ist *vollständig*, wenn zu zwei Größen α und β, die gemeinsame Teiler haben, ein *größter gemeinsamer Teiler* gefunden werden kann, der alle anderen Teiler enthält. Dann gilt der Satz: In einem vollständigen Bereiche ist jede irreduzible Größe auch eine Primgröße. Als Beispiel eines unvollständigen Bereiches wird $[\sqrt{-5}]$ betrachtet.

Den Schluß des ersten Kapitels bildet die Erklärung des Begriffs der *relativen Äquivalenz*. Ein echter Teilbereich Π des holoiden Bereiches $[A]$ bedingt eine relative Äquivalenz $\alpha \sim \beta$, wenn es in Π zwei Größen π_1 und π_2 gibt, die im Bereich $[A]$ die Gleichung $\pi_1\alpha = \pi_2\beta$ erfüllen. —

Bei den späteren Untersuchungen werden scharf *Formen* von *Funktionen* unterschieden. Formen sind ganze Funktionen von Unbestimmten, deren Koeffizienten einem bestimmten Bereiche A angehören. Werden für die Unbestimmten Werte aus einem Bereich B genommen, so wird dadurch ihre Unbestimmtheit eingeschränkt, und die Form wird zu einer Funktion.

Im zweiten Kapitel werden die Formen mit den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_m$ und Koeffizienten aus dem orthoiden Bereich (A) betrachtet, und zwar: Anordnung der Glieder, symmetrische Funktionen usw.

Das dritte Kapitel beginnt mit der Teilbarkeit im Formenbereich. Zugrunde gelegt wird der Kroneckersche Satz von der Darstellung der

Koeffizientenprodukte mehrerer Formen durch die Koeffizienten des Formenproduktes. Diese Untersuchungen führen im holoiden Bereich $[A]$ zu primitiven Formen. Die weitere Betrachtung legt wieder den Bereich $[A]$ zugrunde und erledigt einfache Sätze über Resultanten. Es folgt eine Darstellung der vom Verfasser neu eingeführten Resolventenform. Nach dem Kroneckerschen Verfahren [Festschrift S. 29] wird aus einem Formensystem F_j des Bereiches $[(A), x_1, \ldots, x_m]$, dessen Formen den gemeinsamen Teiler D haben, ein anderes System $F_j^{(1)}$ abgeleitet. Dieses System wird ebenso behandelt, und man gelangt nach einer endlichen Anzahl von Schnitten zu einem Teiler $D^{(r)}$ und einem Größensystem C_{j_r}, das die Unbestimmten nicht mehr enthält. Bekanntlich führen die Operationen wegen der fortgesetzten Resultantenbildung zu Kongruenzen. Diese werden zusammengefaßt in der *Resolventenform*

$$\Phi = DD^{(1)} \ldots D^{(r)} \sum_{j_r} C_{j_r} \equiv 0 \ (\text{modd } F_1, \ldots, F_k).$$

Des Verfassers Darstellung ist allgemeiner als die Festschrift; er berücksichtigt auch die Multiplizität. Im Anschluß hieran folgt das *Gleichungsproblem:* Es sollen dem holoiden Bereich $[A]$ angehörige Größen $\xi_1, \ldots \xi_m$ bestimmt werden, für die das System $F_j(\xi_1, \ldots \xi_m) = 0$ $(j = 1, \ldots k)$ wird. Die Lösungen werden gruppiert nach den Lösungen der Teilresolventen $D^{(h)}$, und für jede Lösung wird eine Kette von Gleichungen entwickelt, bei der jede Gleichung immer nur eine Unbekannte hat:

$$D^{(h)}(x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots x_m) = 0,\ G_1^{(h)}(x_h \mid x_{h+1} \ldots x_m) = 0, \ldots$$
$$G_h^{(h)}(x_1 \mid x_1, \ldots x_m) = 0.$$

Dabei wird schon auf die Mannigfaltigkeit hingewiesen, die die Gleichung $D^{(h)} = 0$ darbietet.

Das vierte Kapitel beginnt mit der Erklärung, daß ein Formenbereich der einem beliebigen orthoiden Bereich (A) entstammt, *wohl definiert* heißen solle, wenn durch eine endliche Anzahl von Operationen jede Form als Produkt von Primformen hergestellt werden kann. Für solche Bereiche folgt die Einführung der *algebraischen Zahlen* und die *Adjunktion* der Wurzel einer irreduziblen Gleichung, nebst den hierhin gehörigen Sätzen. Hier findet auch das Wort *Rationalitätsbereich* seine Erklärung: die Gesamtheit der rationalen Funktionen von $(\mathfrak{R}_1, \ldots \mathfrak{R}_\mu)$, wobei die $\mathfrak{R}$ irgend einem holoiden oder orthoiden Bereich angehören.

Im nächsten Kapitel wird das *allgemeine Eliminationsproblem* in Angriff genommen. Mit dem holoiden Bereich $[A]$, der wie bereits im vorigen Kapitel auch ein Formenbereich sein kann, ist der orthoide Bereich (A) und damit der Bereich aller in (A) algebraischen Größen $\{A\}$ gegeben. Dann lautet die Frage: Die durch die Gleichungen $F_j(x_1, \ldots x_m) = 0$ bewirkte Beschränkung der Veränderlichkeit der x in $\{A\}$ vollständig und möglichst einfach zu beschreiben [Festschrift S. 93]. Mit Hilfe der Liouvilleschen Substitution $x = \sum_i x_i t_i$ wird der Inhalt der Resolventengleichung $DD^{(1)} \ldots D^{(r)} = 0$ beschrieben. Es findet eine genaue Diskussion der *Mannigfaltigkeiten* statt.

Als spezielle Fälle folgen Resultanten und Diskriminanten, besonders der homogenen Formen und andere hierher gehörige Fragen.

Die beiden nächsten Kapitel behandeln die *linearen diophantischen Probleme*, nämlich die Gleichungen $F_{i0} = \sum_j F_{ij} X_j$ zu erfüllen, wenn die F und X dem Formenbereiche $[A, x_1 \ldots x_m]$ angehören. Hierbei kommt man auf die *Modul-* oder *Divisorensysteme*, und der Satz über die Endlichkeit von Divisorenketten, bei denen jedes System in dem vorhergehenden enthalten ist, führt zur Erkenntnis, daß jede Lösung der diophantischen Gleichung durch eine endliche Schar von Lösungen vollständig gegeben ist. Es tritt jetzt eine Scheidung in algebraische und arithmetische Probleme ein, je nachdem der Bereich A orthoid (A) oder der Bereich $[1]$ ist. Im ersten Teil gibt der Verfasser die Hilbertschen Sätze [Über die vollen Invariantensysteme, Mathematische Annalen Bd. 36 u. 42]. Im zweiten Teil entwickelt er analog der vorher entwickelten absoluten Algebra eine Algebra relativ zu einem Primmodulsystem allgemeiner Art $[p, f_1(x_1), f_2(x_2; x_1), \ldots f_m(x_m; x_1, \ldots x_{m-1})]$, wobei f_k eine irreduzible Funktion im Kongruenzbereich des Modulsystems $(p, f_1, \ldots f_{k-1})$ ist. f_k muß x_k, darf nicht $x_l (l > k)$ und kann $x_l (l < k)$ enthalten. Die Angabe des Verfassers, daß diese Systeme bisher nur für den Fall $m = 1$ behandelt worden sind, ist ein Irrtum. [Man vergl. J. f. d. r. u. a. Math. 124 S. 121; 126 S. 102]. Dabei findet das Problem der linearen diophantischen Gleichungen für den Bereich $[[1], x_1, \ldots x_m]$ $m \leq 4$ volle Erledigung; für $m > 4$ wird wegen der Schwierigkeit der Rechnung von einer Behandlung abgesehen. Der Kongruenzbereich der zugrunde gelegten Primsysteme wird als ein *pseudoholoider* Bereich bezeichnet, da die Reihe $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \ldots$ einmal zu 0 führt.

Der letzte Abschnitt endlich behandelt die ganzen algebraischen Größen und die ihnen *assoziierten idealen Zahlen*. Zuerst werden ganze algebraische Formen besprochen, d. h. Formen, deren Koeffizienten ganze algebraische Größen sind. Es erfolgt die Einführung der idealen Zahlen als Quotienten einer ganzen algebraischen Form und einer primitiven Form. Dabei muß wegen des Fehlens des gemeinsamen Teilers eine primitive Form erklärt werden als eine Form, deren Norm eine primitive Form der Unbestimmten im Stammbereich der Gattung ist. Nach den Teilbarkeitseigenschaften der Ideale folgt eine Bestimmung des Fundamentalsystems der Gattung und eines Fundamentalsystemes der idealen Größen der Gattung, gestützt auf die Erklärung eines Bereiches, der zugleich Kongruenz- und Äquivalenzbereich ist: zwei aus einem vollständigen holoiden Bereiche entstammende Formen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sollen nach dem *Äquivalenzmodul* m *äquivalent* heißen, wenn es zwei zu m relative Größen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ gibt, für die die Gleichung besteht $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{e}_1 \equiv \mathfrak{A}_2 \mathfrak{e}_2 \pmod{m}$.

Dortmund. H. Kühne.

Hermann Schubert. Mathematische Mußestunden. 2. Auflage. Leipzig, G. J. Göschen 1904. 306 S.

Die zweite Auflage ist ein fast unveränderter Abdruck der ersten Auflage, die vergriffen ist. Der Verf. ist seinem Wahrspruch: ludendo discimus, getreu gefolgt, sodaß der Leser, der sich mit den Spielereien unterhalten will,

unmerklich durch die gelungene elementare Erklärung auch in seinen mathematischen Kenntnissen gefördert wird. Das Buch enthält im ersten Abschnitt Zahlenprobleme, unter denen Karten-, Würfel-, Dominokunststücke usw. vorkommen. Der zweite Abschnitt bringt Anordnungsprobleme, unter denen magische Quadrate, Rösselsprünge, ewige Kalender für Wochentage und Osterfeste usw. sich befinden. Auch der Mathematiker wird bei diesen Problemen Anregung und Erholung finden.

Dortmund. H. Kühne.

Gustave Robin. Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Publiée par Louis Raffy. Paris 1903, Gauthier-Villars. VI und 215 p.

Die Einleitung des Werkes, das nach dem Tode des Verfassers von seinem Freunde Raffy herausgegeben worden ist, enthält eine begeisterte Schilderung von der Neuheit und den Vorzügen der Ideen, auf die der Verfasser die Funktionenlehre gründen will. Diese Ideen sind aber schon lange, wie man aus dem Bericht Pringsheims [Enc. II A 1] sehen kann, Allgemeingut der Mathematiker. Das Bestreben des Verfassers, wenn ich mich so ausdrücken darf, ist es, die Funktionenlehre zu „arithmetisieren". Er erkennt also als Grundlage nur ganze Zahlen und Brüche an; alles Irrationale verweist er in das Reich der Fiktion. Er ersetzt es stets durch konvergente Zahlenfolgen. Er läßt durchblicken, er glaube der erste zu sein, der diese klare Anschauung vertrete. Das ist nun allerdings nicht sein Verdienst; aber das elegant und fließend geschriebene Buch bringt zum ersten Male eine Darstellung von funktionentheoretischen Begriffen, in der von der Existenz einer konvergenten Zahlenfolge nicht [wie man es wohl gewöhnlich der Einfachheit des Ausdrucks wegen tut] auf die Existenz einer durch sie definierten Größe geschlossen wird, sondern in der in jedem Falle zwischen der Folge und ihrer Grenze scharf unterschieden wird. Dies zur Einleitung des Buches. — Der Verfasser erklärt zunächst den Begriff der konvergenten Zahlenfolge, als einer Folge von Brüchen, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, bei der, je weiter man fortschreitet, die Glieder sich um weniger als einen vorher bestimmten echten Bruch unterscheiden. Äquivalente Zahlenfolgen sind solche, deren spätere Glieder sich außerordentlich nähern. Eine feste Zahl A, die von den späteren Gliedern einer Folge beliebig wenig verschieden ist, heißt Grenzwert. Es wird darauf aufmerksam gemacht, ob eine Folge ihren Grenzwert erreicht oder nicht. Die Wörter „irrational", „beliebige Größe" werden vermieden; es heißt immer eine Zahl (gemeint ganze Zahl oder Bruch) oder eine konvergente Folge von Zahlen. Die Summation einiger Zahlenreihen schließt den ersten Abschnitt. Der zweite Abschnitt bringt die Erklärung der Funktion einer Veränderlichen x. Hier werden nun wieder die Fälle scharf unterschieden. Entweder ist x eine Zahl (in dem erklärten Sinne) und die Funktion y eine eben dadurch bestimmte Zahl; oder y ist eine Zahlenfolge, die durch x bestimmt ist (für y hat man dann irgend ein entferntes Glied zu nehmen). Oder x ist selbst ein Glied einer Zahlenfolge, für das man selbstverständlich wieder ein entfernteres Glied nehmen darf, und y bietet dieselben beiden Möglichkeiten wie vorher dar. Betrachtungen über Grenzen und Schwan-

kungen beenden den Abschnitt. Es folgt eine Besprechung der Integrierbarkeit, Stetigkeit, Rektifizierbarkeit und Differenzierbarkeit. Die Begriffe werden alle scharf umgrenzt. Die folgenden Abschnitte behandeln die Reihen von Funktionen und bringen Sätze über Konvergenz, gleichmäßige Stetigkeit usw. Als besondere Fälle werden die Potenzreihen betrachtet. Den Schluß bilden Funktionen von 2 Variablen, unentwickelte Funktionen und die Differentialgleichungen erster Ordnung. — Die Lektüre der Arbeit ist sehr anregend; der eigenartige Aufbau und die strenge und klare Fassung der Begriffe halten das Interesse bis zum Schluß wach. Das Buch ist ein geeignetes Mittel, sich über die wichtigen Grundlagen der Funktionenlehre Klarheit zu verschaffen.

Dortmund. H. KÜHNE.

Emile Borel. Leçons sur les fonctions méromorphes. Recueillies et rédigées par L. Zoretti. Paris 1903, Gauthier-Villars. VI und 119 S.

Diese Vorlesungen bilden eine Fortsetzung der Vorlesungen Borels über die fonctions entières. Sie behandeln, nach Weierstraßscher Ausdrucksweise, die analytischen Funktionen, die den Charakter einer rationalen Funktion haben, d. h. als Quotienten zweier beständig konvergenten Potenzreihen darstellbar sind. Der erste Abschnitt bringt allgemeine Betrachtungen über analytische Funktionen, nämlich die Elemente ihrer Darstellung: Potenzreihe, die Mittag-Lefflersche Partialbruchzerlegung, die Weierstraßsche Zerlegung in Primfunktionen. Der zweite Abschnitt behandelt nach Cauchyschen Prinzipien, die jüngst von Hadamard aufs neue beleuchtet und erweitert worden sind, den Konvergenzradius und die an die Pole anknüpfenden Eigenschaften der Funktion, die man aus der Potenzreihe schließen kann. Der dritte Abschnitt erweitert einen Picardschen Satz über ganze Funktionen auf meromorphe Funktionen. Der Verfasser bringt den Satz am Schlusse eines langen Beweises, in dem er der Bequemlichkeit wegen verschiedene vereinfachende Ausdrücke eingeführt hat. Da er diese Ausdrücke auch im Satze benutzt, so ist die Fassung, die er ihm gibt, nicht allgemein verständlich. Ich würde den Satz vielleicht so formulieren: „Es seien f eine feste und φ eine beliebige meromorphe Funktion, von denen φ mit geringerer Stärke unendlich wird als f. Dann werden die Differenzen $f - \varphi$ im allgemeinen mit derselben Stärke wie f unendlich. Aber für gewisse f sinkt die Stärke des Unendlichwerdens der Differenz, doch kann das höchstens für zwei verschiedene φ eintreten“. Betreffs der Erklärung des Begriffs von der Stärke des Unendlichwerdens verweise ich auf Enc. II B 1. Im letzten Abschnitt werden Reihen behandelt, deren Elemente rationale Funktionen sind. Genauer werden die Reihen untersucht, in denen die rationalen Funktionen die Form $A\left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \cdots + \frac{z^{\lambda-1}}{a^\lambda}\right) = \frac{Az^\lambda}{a^\lambda(z-a)}$ haben. Unter Annahme eines regelmäßigen Wachsens der Pole a $[a_n = n^{\frac{1}{\varrho}}$, $\lim n = \infty]$ werden die A und λ so bestimmt, daß die Reihe eine meromorphe Funktion von einer gegebenen Stärke des Unendlichwerdens ϱ darstellt. Ferner werden sogenannte Konvergenzkurven abgeleitet, in denen die Reihe gleichmäßig kon-

vergiert, also gliedweise integriert werden darf. Das führt zu einer Verallgemeinerung des Cauchyschen Satzes. Einige allgemeine Sätze über die genannten Reihen und einige Noten, die die neuesten Arbeiten über meromorphe Funktionen erwähnen, schließen die Vorlesungen.

Dortmund. H. Kühne.

Emil Haentzschel. Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Leipzig 1903, B. G. Teubner. VI u. 140 S.

Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über das Geoid und seine Annäherung, das Erdsphäroid, folgt die Erklärung der Begriffe geographische Breite und Länge. Das Sphäroid wird dann auf die Kugel abgebildet, die die Erde an den Polen berührt, und zwar werden einander Punkte gleicher Länge und gleichen Abstandes von der Äquatorebene zugeordnet. Die Breite auf der Kugel heißt reduzierte Breite. Der Vergleich des Bildes mit dem Original wird bis ins einzelne durchgeführt; dabei werden die Ausdrücke längen- und flächentreu erwähnt, und es wird gezeigt, daß die Abbildung nicht flächentreu ist, daß ferner die Abbildung auf eine Kugel, die das Sphäroid schneidet, zwei Parallelkreise längentreu abbildet. Es folgen Berechnungen von Stücken der Oberfläche, womit der Übergang zu den Sektionen der Generalstabskarte und den Meßtischblättern gegeben ist.

Der zweite Abschnitt behandelt zuerst die von Mollweide durchgeführte winkeltreue Abbildung auf eine konzentrische Kugel. Es wird gezeigt, daß eine Kugel, die das Sphäroid in einem Parallelkreis P_0 schneidet, eine nicht zu breite Zone um P_0 mit ziemlicher Genauigkeit darstellt. Diese Darstellung ist von Gauß bedeutend verbessert worden. Er wählt einen Normalpunkt A_0 auf dem Sphäroid und wählt als Bildkugel die durch A_0 gehende Kugel, deren Mittelpunkt auf der Normale liegt, und die in A_0 dasselbe Krümmungsmaß wie das Sphäroid hat. Die von ihm gewählte Kugel ist durch den Punkt $B_0 = 52^0\ 42'2{,}5325''$, $L_0 = 31^0$ (ö. F.) bestimmt; sie liegt seiner Messung des Königreichs Hannover zugrunde und ist für die kartographische Darstellung von Deutschland übernommen worden. Außer ihr existiert bisher nur noch eine zweite Gaußische Kugel für Österreich. Der Punkt A_0 entspricht auf der Kugel sich selbst und soll A_0' heißen. In der Kugel ist die Breite so gewählt, daß $b_0 = 52^0 40'$ ist; in diesem Fall ist die Übereinstimmung zwischen Bild und Original sehr groß. Am größten ist die Abweichung in der Nähe des Parallelkreises $B = 60^0 23'$, wo sie auf der Gaußischen Kugel etwa $2'20''$ beträgt, während sie bei der Mollweideschen Kugel $11\frac{1}{2}'$ betragen würde. Die Gaußische Kugel erfüllt die Bedingungen, daß die Längendifferenzen $L - L_0$ und $l - l_0$ ein konstantes Verhältnis haben, daß der Vergrößerungsfaktor m für A_0 den Wert 1 hat [also das Original in unmittelbarer Nähe von A_0 genau wiedergibt], und daß die Entwicklung von $m - 1$ nach Breitendifferenzen erst mit der dritten Potenz von $B - B_0$ anfängt. Diese Kugel wird schließlich durch die Merkatorprojektion auf eine Ebene abgebildet. Zum Schluß werden wieder Generalstabskarte und die Meßtischblätter genau betrachtet.

Die Darstellung ist möglichst einfach gehalten; es genügen die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung sowie der Kurvenlehre. Das Buch kann deshalb in den weitesten Kreisen dazu beitragen, die Kenntnis

der Abbildung der Erdoberfläche in Karten zu verbreiten. Für die mathematische Geographie füllt es eine Lücke aus, die sicher schon viele empfunden haben. Man wird auch die Grundlagen dieser Entwicklungen in der Prima zur Anschauung bringen können.

Dortmund. H. Kühne.

Ganter und **Rudio. Die analytische Geometrie der Ebene.** Fünfte Auflage. Leipzig 1903, B. G. Teubner. VIII u. 188 S.

Es sind nur die Paragraphen über harmonische Strahlen und Kreisbüschel etwas verändert worden.

Dortmund. H. Kühne.

Salmon-Fiedler. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Sechste Auflage, zweiter Teil. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 8°. XXIV u. 413 S.

Die Veränderung, die die neue Auflage zeigt, ist vor allem eine Modernisierung der Darstellungsweise. Der Stoff ist im großen und ganzen derselbe geblieben, aber in den einzelnen Abschnitten hat unter Benutzung der neueren Untersuchungen, vor allem in dem Kapitel über die invariantentheoretischen Eigenschaften, eine Umordnung der einzelnen Sätze stattgefunden, verbunden mit einer den heutigen Gewohnheiten mehr angepaßten Darstellungsweise, sodaß das treffliche Buch weiter auf der Höhe der Zeit steht.

Dortmund. H. Kühne.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

133. Haben die Teildreiecke des Dreiecks ABC den Inkreismittelpunkt zur gemeinsamen Spitze, so verhalten sich die Radien der zugehörigen Umkreise wie

$$a \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} : b \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2} : c \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}.$$

Berlin. E. Jahnke.

---

134. Démontrer que toute loxodromique de la surface engendrée par la développée d'une ligne de Ribaucour, tournant autour de la directrice de cette ligne, a le rayon de courbure géodésique proportionnel à l'arc.

Naples. E. Cesàro.

---

2. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abraham, M., Theorie der Elektrizität. 2 Bände. II. Band: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 405 S.

Appell, P., Éléments d'analyse mathématique. Cours de l'École Centrale des Arts et Manufactures. Paris 1905, Gauthier-Villars. 714 S. 2e édition.

Brüsch, W., Leitfaden der Elektrizität im Bergbau. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Cordier, J., Über eine Gruppe von 96 Kollineationen und Korrelationen. Inaug.-Diss. Straßburg 1905. 37 S.

Droz-Farny, A., Sur l'hyperbole d'Apollonius. S. A. aus den „Mitteilungen" der Naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1905. 8 S.

Fricke, R., Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. Als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen. Vierte Auflage. Braunschweig 1905, Vieweg u. Sohn. 217 S.

v. Geitler, J., Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. Heft 6 der Sammlung: Die Wissenschaft. Braunschweig 1905, Vieweg u. Sohn. 154 S.

Habenicht, B., Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter. Berlin 1905, O. Salle. ℳ 1,60.

Heffter, L. und Koehler, C., Lehrbuch der analytischen Geometrie. In zwei Bänden. Erster Band: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 528 S.

Lindemann, F., Über Gestalt und Spektrum der Atome. S. A. aus „Süddeutsche Monatshefte". Stuttgart 1905, A. Bonz u. Co. 10 S.

Marcuse, Adolf, Handbuch der geographischen Ortsbestimmung für Geographen und Forschungsreisende. Braunschweig 1905, Vieweg u. Sohn. 341 S.

Nernst, W. und Schoenflies, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Vierte Auflage München 1904, R. Oldenbourg. 370 S.

Neumann, E. R., Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Rodin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig 1905, B G. Teubner. 194 S.

v. Neumayer, G., Anleitung zu wissenschaftlichen Beobachtungen auf Reisen. In zwei Bänden. Dritte Auflage. Lieferung 1. Hannover 1905, M. Jänecke. 48 S. ℳ 3.

Picard, E., Traité d'analyse. 2 vol. 2e édition. XV et 483, XV et 585 p. Paris 1901, 1905, Gauthier-Villars.

Schmidt, E., Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Inaug.-Diss. Göttingen 1905. 33 S.

Schröder, E., Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). Zweiter Band. Zweite Abteilung. Herausgegeben im Auftrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung von Dr. Eugen Müller, Professor an der Oberrealschule zu Konstanz. Mit einem Bildnis Ernst Schröders. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 605 S.

Schröder, R., Die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen und zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und 27 Figuren im Text. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 131 S.

Stolz, O., und Gmeiner, J. A., Einleitung in die Funktionentheorie. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz. In 2 Abteilungen. II. Abteilung. Mit 11 Figuren im Text. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 356 S.

Strobel, F., Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen des In- und Auslandes und der technischen Hilfskräfte. Leipzig 1905, A. Barth.

Sturm, Ch., Cours de mécanique de l'École Polytechnique. 5e édition. 2 vol. Paris 1905, Gauthier-Villars. XIV et 278, 433 p.

Thomson, J. J., Elektrizitätsdurchgang in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. Erich Marx. In drei Lieferungen. 1. Lieferung. Mit 45 Textfiguren. Leipzig 1905, B. G. Teubner.

Weber, H. und Wellstein, J., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. Band II: Elementare Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. Mit 281 Textfiguren. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 604 S.

Wehner, H., Über die Kenntnis der magnetischen Nordweisung im frühen Mittelalter. S. A. aus „Das Weltall", Heft 11. Berlin 1905, Schwetschke u. Sohn. 20 S

Berichtigungen zum 3. Heft des IX. Bandes.

S. 229, Zeile 16 v. u. fehlt zwischen den Zahlen 55, 64 die Zahl 57.
S. 229, Zeile 16 v. o. ist die Zahl 57 zu tilgen.

tzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

31. Sitzung am 25. Januar 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 30 Herren.

Herr Schirdewahn: Über ein besonderes rechtwinkliges Koordinaten-stem für ebene Dreiecke (s. u.).

Herr Wallenberg: Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß sowie mit n Lineal allein (s. u.).

32. Sitzung am 22. Februar 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 34 Herren.

Herr Lampe: Nachruf auf G. Hauck.

Herr Reißner: Mechanische und elektrische Masse (s. u.).

33. Sitzung am 29. März 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 37 Herren.

Herr Koppe: Lösung der von Herrn Zühlke in der Sitzung vom . 12. 04 behandelten Aufgabe in geschlossener Form ohne ungültige Vor-fern.

Herr Sándor: Beiträge zur Theorie des Fachwerks.

Herr Zacharias: Über die Vierecke, deren Diagonalen auf einander ıkrecht stehen (s. u.).

---

er eine mechanische Auswertung der elliptischen Transzendenten.

Von Rudolf Rothe.

Im vierten Bande des Philosophical Magazine hat Herr T. H. Blakesley[1]) e Methode beschrieben, welche die mechanische Auswertung der hyper-lisch-trigonometrischen Funktionen mit Hilfe eines einfachen planimeter-nlichen Instrumentes gestattet. Es besteht in einem geteilten, um den

---

1) Phil. Mag. (6) 4, 238. 1902. Gelegentlich eines Referates über diese Ar-it in der *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, **24**, 151, 1904 habe ich einen Teil r folgenden Betrachtungen bereits mitgeteilt.

festen Pol O (Fig. 1) drehbaren und durch ihn hindurch verschiebbaren Radiusvektor $OP = \varrho$, dessen Ende mit einem um ihn als Achse drehbaren Meßrädchen versehen ist; die Drehungsebene des letzteren liegt senkrecht zur Ebene der Zeichnung. Der Berührungspunkt P des Rädchens mit der Zeichenebene werde nun längs eines geteilten Maßstabes verschoben, was am einfachsten dadurch geschehen kann, daß ein die Achsenlager des Rädchens tragender, mit dem Radiusvektor fest verbundener Ring an einem Lineal gleitet; dann ist, wenn θ die Ablesung am Meßrädchen, ϱ die am Radiusvektor, s die am Maßstab, gerechnet vom Fußpunkt des Poles, bedeutet,

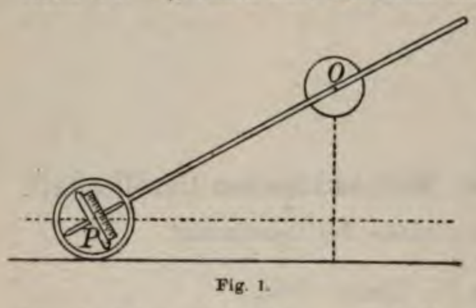


Fig. 1.

$$\varrho = \varrho_0 \cosh \theta, \quad s = \varrho_0 \sinh \theta,$$

unter ϱ_0 den Anfangswert von ϱ verstanden.

Die Einfachheit des Instruments gestattet nun eine weit allgemeinere Verwendung desselben, als ihm Herr Blakesley zuerteilt. Es seien ϱ und φ die Polarkoordinaten eines beliebigen Punktes einer ebenen Kurve; das Bogenelement derselben,

$$ds = \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2},$$

kann dann in die beiden rechtwinkligen Komponenten $d\varrho$ und $d\theta$ zerlegt werden, sodaß

$$d\theta = \varrho d\varphi$$

ist. Gleitet daher der Berührungspunkt P des Meßrädchens auf einer beliebigen Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten bekannt ist, so ist die Ablesung θ am Meßrädchen, von einem geeigneten Nullpunkt aus gezählt, durch die Gleichung

$$\theta = \int_0^{\varphi} \varrho d\varphi$$

gegeben. Ist die Kurve im besondern eine nicht durch O gehende Gerade mit der Gleichung

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos\varphi},$$

so wird das oben angegebene Resultat erhalten, durch welches die hyperbolischen Funktionen ausgewertet werden.

Die vorstehenden Formeln genügen, um mittels des Blakesleyschen Instruments beliebige Funktionen auszuwerten, wofern nur die Gleitkurve des Meßrädchens passend gewählt wird. Soll man z. B. die Funktion $\sqrt{\theta}$ auswerten, so hat man $\theta = \varrho^2$, $d\theta = \varrho d\varphi = 2\varrho d\varrho$, d. h. $\varrho = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$ zu wählen, also eine archimedische Spirale als Führungskurve des Berührungspunktes, ihre Äquidistante als Führungskurve des Instrumentes zu nehm

Die mechanische Ausführung dieser Kurven als Führungslineale wird jedoch im allgemeinen mit Schwierigkeiten verknüpft sein, außer in dem einfach herzustellenden Fall, wo sie Kreise sind. Dieser Fall führt aber auf die Auswertung der einfachsten elliptischen Funktionen.

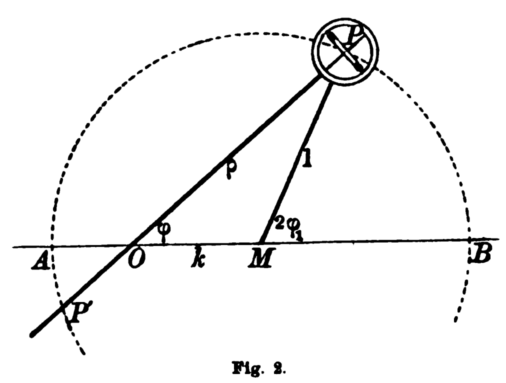


Fig. 2.

Es sei (Fig. 2) ein vom Pole O um die Strecke k entfernter Punkt M das Zentrum eines festen Kreises mit dem Radius 1. Längs der Peripherie dieses Kreises möge der Berührungspunkt P des Meßrädchens entlang geführt werden, was dadurch bewirkt werden kann, daß P und M durch eine um M drehbare Alhidade fest verbunden sind. Zu einer bestimmten Lage von P gehört dann ein Radiusvektor $OP = \varrho$ und eine Amplitude φ, welche von der Richtung OM an gezählt werden möge. Der Einfachheit wegen sei k nicht größer als Eins angenommen. Dann ergibt sich aus dem Dreieck OPM die Beziehung

$$k^2 + \varrho^2 - 2k\varrho \cos\varphi = 1,$$

woraus

$$\varrho = k\cos\varphi \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$$

folgt. Das doppelte Vorzeichen entspricht der Tatsache, daß zu jedem Werte φ der Amplitude zwei Punkte P und P' des Kreises gehören. Setzt man $OP' = \varrho'$ und berücksichtigt das Vorzeichen der Richtungen dieser Strecken, so wird

$$(\varrho) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(\varrho + \varrho') = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \\ \frac{1}{2}(\varrho - \varrho') = k\cos\varphi. \end{cases}$$

Sind θ, θ' die entsprechenden Ablesungen am Meßrädchen, so erhält man

$$(\theta) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(\theta + \theta') = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \\ \frac{1}{2}(\theta - \theta') = k\sin\varphi. \end{cases}$$

Das Integral ist das bekannte elliptische zweiter Gattung, welches die Rektifikation der Ellipse bewirkt und von Legendre mit $E(\varphi, k)$ bezeichnet ist.

Für $k = 1$, d. h., wenn der Pol O auf die Peripherie des Kreises fällt, gehen die rechten Seiten der Formeln (ϱ) übereinstimmend in $\cos\varphi$, der Formeln (θ) in $\sin\varphi$ über.

Würde man daher das Instrument mit einer transporteurartigen Vorrichtung zur Ablesung des Winkels φ versehen, so könnte es zur Auswertung der Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $k\sin\varphi$, $k\cos\varphi$, $\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$, $E(\varphi, k)$ dienen.

Aber auch das elliptische Integral erster Gattung

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

ließe sich mit Hilfe des Instruments durch wiederholte Messungen bestimmen, wenn man sich der Landenschen Transformation bedient, durch welche dieses Integral auf die Funktionen $E(\varphi, k)$ und $\sin \varphi$ zurückgeführt wird. Bezeichnet man nämlich den Winkel PMB mit $2\varphi_1$, so erhält man aus dem Dreieck OPM:

$$\varrho^2 = 1 + k^2 + 2k \cos 2\varphi_1,$$

woraus

$$\frac{\varrho}{1+k} = \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}$$

folgt, unter k_1 der Wert $2\sqrt{k} : (1 + k)$ verstanden. Andrerseits erhält man aber aus demselben Dreieck: $k \sin \varphi = \sin(2\varphi_1 - \varphi)$. Demnach wird

$$d\varphi_1 = \tfrac{1}{2} d\varphi \cdot \frac{\varrho}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

und also

$$\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi_1}\, d\varphi_1 = \frac{d\varphi}{1+k}\left(\varrho - \tfrac{1}{2} \frac{1 - k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\right);$$

daraus folgt durch Integration

$$E(\varphi_1, k_1) = \frac{1}{1+k}\left(k \sin \varphi + E(\varphi, k) - \frac{1 - k^2}{2} F(\varphi, k)\right).$$

Dies ist die bekannte Landenschen Transformation. Man hätte also zur Bestimmung des Funktionswertes $F(\varphi, k)$ so zu verfahren, daß man zuerst die zur Amplitude φ gehörigen Werte θ und φ_1 abliest, sodann bei verändertem Modul k_1 den Wert $E(\varphi_1, k_1)$ und danach

$$F(\varphi, k) = \frac{2}{1 - k^2}(\theta - (1 + k) E(\varphi_1, k_1))$$

berechnet.

Ob das Blakesleysche Instrument oder auch die erweiterte Form desselben für praktische Zwecke Anwendung finden würde, mag hier dahingestellt sein. Allein es schien mir wert zu sein, vom rein mathematischen Standpunkt aus auf die damit verbundene einfache mechanische Entstehungsweise der elliptischen Transzendenten hinzuweisen.

Charlottenburg, September 1904.

Über ein besonderes rechtwinkliges Koordinatensystem für ebene Dreiecke.

Von G. Schirdewahn.

I. In beliebigem Koordinatensystem seien $G_i)$ $a_i x + b_i y = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ die Gleichungen dreier Geraden; die Ecken des entstehenden Dreiecks $P_i(\lambda_i \mu_i)$. Es folgt: $c_i \equiv a_i \lambda_\varkappa + b_i \mu_\varkappa \equiv a_i \lambda_\nu + b_i \mu_\nu$ oder $a_i(\lambda_\varkappa - \lambda_\nu) + b_i(\mu_\varkappa - \mu_\nu) \equiv 0$ $(i, \varkappa, \nu$ zyklisch in $1, 2, 3)$. Multiplikation mit $a_\varkappa a_\nu$ und $b_\varkappa b_\nu$ und Addition gibt $\sum a_i b_\varkappa b_\nu(\lambda_\varkappa - \lambda_\nu) = \sum b_i a_\varkappa a_\nu(\mu_\varkappa - \mu_\nu) = 0$. Beiden Gleichungen wird

genügt durch $\lambda_\varkappa - \lambda_\nu = \sigma b_i D_i$, $\mu_\varkappa - \mu_\nu = -\sigma a_i D_i$, wo $D_i = a_\varkappa b_\nu - a_\nu b_\varkappa$. Daher ist $\lambda_i = \sigma a_i b_\varkappa b_\nu + \lambda$, $\mu_i = \sigma b_i a_\varkappa a_\nu + \mu$. Unter Verschiebung des Dreiecks um (λ, μ) erhält man das System (S) eines Dreiecks mit den Geraden:

$G_i)$ $a_i x + b_i y = \sigma a_i b_i (a_\varkappa b_\nu + a_\nu b_\varkappa)$ und den Ecken $P_i(\sigma a_i b_\varkappa b_\nu, \sigma b_i a_\varkappa a_\nu)$.

Die Koordinaten der Ecken sind also ganz und rational in den (a_i, b_i). σ ist ein noch willkürlicher Faktor, dessen Wahl die Einheitsstrecke des Koordinatensystems bestimmt. Für ein solches System gelten zur Bestimmung der wesentlichen Dreiecks-Punkte und Strecken die Formeln:

1. *Achsenabschnitte der Geraden:* $X_i = \sigma b_i S_i$; $Y_i = \sigma a_i S_i$, wo $S_i = a_\varkappa b_\nu + a_\nu b_\varkappa$.
2. *Seiten:* $\sigma_i = w_i D_i$. $w_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$; das Zeichen von w_i ist bestimmt durch das von D_i, da σ_i wesentlich positiv ist.
3. *Fläche:* $\pm 2F = | a_i^2, a_i b_i, b_i^2 | = | a_i, b_i, a_i b_i S_i | = D_1 D_2 D_3$.
4. *Seitenmitten:* $M_i(\frac{1}{2} X_i, \frac{1}{2} Y_i)$.
5. *Schwerpunkt:* $S(\frac{1}{3}\sum a_i b_\varkappa b_\nu, \frac{1}{3}\sum b_i a_\varkappa a_\nu)$.
6. *Mitteltransversalen:* $T_i)$ $D_\varkappa G_\varkappa = D_\nu G_\nu$. $t_i = \frac{1}{2}\sqrt{2Q^2 - 3 w_i^2 D_i^2}$, wo $Q^2 = \sum w_i^2 D_i^2$.
7. *Höhen:* $H_i)$ $s_\varkappa G_\varkappa = s_\nu G_\nu$, wo $s_i = b_\varkappa b_\nu + a_\varkappa a_\nu$. $h_i = \frac{D_\varkappa D_\nu}{w_i}$, $H(-a_1 a_2 a_3, -b_1 b_2 b_3)$.
8. *Höhenfußpunkte:* $F_i\left\{\frac{a_i b_i}{w_i^2}(a_i S_i - b_i d_i), \frac{a_i b_i}{w_i^2}(a_i d_i + b_i S_i)\right\}$, wo $d_i = b_\varkappa b_\nu - a_\varkappa a_\nu$.
9. *Mittellote:* $ML_i)$ $b_i x - a_i y = \frac{b_i^2 - a_i^2}{2}$ oder $\frac{b_i^2 - a_i^2}{b_i^2 + a_i^2} D_i G_i + D_\varkappa G_\varkappa - D_\nu G_\nu = 0$.
10. *Umkreis:* $r = \frac{w_1 w_2 w_3}{2}$; $M(\frac{1}{2}(3S_x - H_x), \frac{1}{2}(3S_y - H_y))$,
$x^2 + y^2 - x(3S_x - H_x) - y(3S_y - H_y) = H_x \cdot 3S_x + H_y \cdot 3S_y$.
11. *Feuerbachs Kreis:* $r_\Phi = \frac{r}{2}$; $\Phi(\frac{1}{4}(3S_x + H_x), \frac{1}{4}(3S_y + H_y))$.
$x^2 + y^2 - 2x\Phi_x - 2y\Phi_y = 0$.

Der Feuerbachsche Kreis geht also durch den Nullpunkt Ω des Koordinatensystems.

12. *Winkel:* a) Neigung zur X-Achse. $\tan \varphi_i = -\frac{a_i}{b_i}$.

Sei $\varphi_i > \varphi_\varkappa > \varphi_\nu$, so gilt b) für die Dreieckswinkel

$A_\nu = \varphi_i - \varphi_\varkappa$; $A_i = \varphi_\varkappa - \varphi_\nu$; $A_\varkappa = 180 - (\varphi_\nu - \varphi_i)$;

$$\tan(\varphi_\varkappa - \varphi_\nu) = -\frac{D_i}{s_i}.$$

Wird der Winkelraum im Dreieck als positiv gerechnet, so erhält $w_\varkappa$ positives, w_i und w_ν negatives Zeichen, die Seiten $w_i D_i$ und $r = \frac{1}{2} w_1 w_2 w_3$ werden positiv.

13. *Winkelhalbierende:* $W_i)\ \frac{G_\varkappa}{w_\varkappa} - \frac{G_\nu}{w_\nu} = 0;\quad W_i')\ \frac{G_\varkappa}{w_\varkappa} + \frac{G_\nu}{w_\nu} = 0.$

14. *Berührungskreise:* a) Mittelpunkte: $O(M_x + 2r\Sigma_x,\ M_y + 2r\Sigma_y)$,

$$O_i\left\{M_x - 2r\left(\Sigma_x - \frac{a_i}{w_i}\right),\ M_y - 2r\left(\Sigma_y - \frac{b_i}{w_i}\right)\right\},$$

wo $2\Sigma_x = \Sigma\frac{a_i}{w_i}\quad 2\Sigma_y = \Sigma\frac{b_i}{w_i}\cdot$

b) Radien: $-2\varrho = 2r + \Sigma w_i s_i;\ 2\varrho_i = 2r - (w_i s_i + w_\varkappa s_\varkappa + w_\nu s_\nu)$.

c) Kreise: $(x - O_x)^2 + (y - O_y)^2 = \varrho^2;\ (x - O_{ix})^2 + (y - O_{iy})^2 = \varrho_i^2$.

Im Bereich $(a_i b_i w_i)$ sind alle Koordinaten und Strecken (außer den t_i) rational, mit Ausnutzung des σ auch ganz. Sind die a_i, b_i ganze Wurzeln der pythagoreischen Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, so ist w_i ganz, alle Lösungen ganz und rational für ganze a_i, b_i. Sind sie Wurzeln von $x^2 + y^2 = mz^2$, so tritt nur die Irrationale $\sqrt{m}$ auf; sonst nur die 3 Irrationalitäten w_i.

II. Setzt man $a_i = w_i \cos\varphi_i\quad b_i = w_i \sin\varphi_i$, so erhält man eine trigonometrische Form des Koordinatensystems. Die resultierenden Formeln sind ganz und rational in den $\cos\varphi_i$, $\sin\varphi_i$ und der Durchmesser des Umkreises gibt den einfachsten Maßstab. Z. B.

$$G_i)\ x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i = 2r\cdot\sin\varphi_i\cos\varphi_i\sin(\varphi_\varkappa + \varphi_\nu);$$

$$P_i(2r\cos\varphi_i\sin\varphi_\varkappa\sin\varphi_\nu,\ 2r\sin\varphi_i\cos\varphi_\varkappa\cos\varphi_\nu).$$

$$\Phi\left(-\frac{r}{2}\cos\Sigma\varphi_i,\ +\frac{r}{2}\sin\Sigma\varphi_i\right).\quad x^2 + y^2 + rx\cos\Sigma\varphi_i - ry\sin\Sigma\varphi_i = 0.$$

Das Gesamtsystem der Formeln ist die Ergänzung des Systems, das die Strecken des Dreiecks in r und den Eckwinkeln berechnet.

III. Sei nun in beliebigem Koordinatensystem ein Dreieck bestimmt durch $G_i)\ a_i x + b_i y = c_i$. Man transformiere durch:

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha - p,$$
$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha - q,$$

so wird:

$$G_i)\ (a_i\cos\alpha + b_i\sin\alpha)x_1 + (-a_i\sin\alpha + b_i\cos\alpha)y_1 = a_i p + b_i q + c_i$$

$$\text{oder}\quad A_i x_1 + B_i y_1 = a_i p + b_i q + c_i.$$

Soll das ein System (S) werden, so muß

$$a_i p + b_i q + c_i \equiv A_i B_i(A_\varkappa B_\nu + A_\nu B_\varkappa)$$

werden.

Eliminiert man aber p und q, so fällt auch α weg, und man erhält

$$\sum c_i D_i = D_1 D_2 D_3.$$

Dieser Bedingung wird genügt, wenn man die Einheit des ursprünglichen Koordinatensystems im Verhältnis $1:\sigma$ verkleinert. Ist dann $G_i)\ a_i x - b_i y = \sigma c_i$, so gibt die Bedingung $\sigma\sum c_i D_i = D_1 D_2 D_3 = 2F$ den Wert von σ. Die Determinante der $a_i p + b_i q + \sigma c_i = A_i B_i(A_\varkappa B_\nu + A_\nu B_\varkappa)$ wird Null, und man erhält für jede Drehung um α eine einzige Verschiebung $(-p, -q)$ so, daß das System der 3 Geraden G_i ein System (S) wird. Insbesondere bleiben für

$\alpha = 0$ die Größen a_i, b_i unverändert. Für jedes der Systeme (S) liegt der Nullpunkt auf dem Feuerbachschen Kreise (vgl. dessen Gleichungsform oder bestimme den Ort der Punkte $(-p, -q)$). Sei zudem die gleichseitige Hyperbel $xy = A_1 A_2 A_3 \cdot B_1 B_2 B_3$ betrachtet. Sie geht offenbar durch $P_i(A_i B_x B_\nu, B_i A_x A_\nu)$ und $H(-A_1 A_2 A_3, -B_1 B_2 B_3)$. Ihre Asymptoten sind die Achsen des transformierten Systems. Demnach ist dessen Lage bestimmt.

Es gibt zu jedem Dreieck unendlich viele Gleichungssysteme (S). Die zugehörigen Koordinatensysteme haben als Achsen die Asymptoten einer dem Dreieck umgeschriebenen gleichseitigen Hyperbel und als Nullpunkt deren Mittelpunkt, der auf dem Feuerbachschen Kreise liegt.

Transformiert man ein solches System (S) in ein anderes (S') durch Drehung um α und die entsprechende Verschiebung, so ist Winkel $\Omega\Phi\Omega' = 4\alpha$. Ω muß sich also zweimal den Feuerbachschen Kreis entlang bewegen, bis das Achsensystem des (S) inklusive seiner Hyperbel sich mit dem von (S') deckt. Der Feuerbachsche Kreis verhält sich also als Ort der Ω als Kurve 4. Ordnung mit lauter Doppelpunkten. — Ist ein Achsenpaar bekannt, so ist jedes andere hiernach sofort leicht zu konstruieren, wenn Ω' gegeben ist. Die Aufgabe freilich, etwa die x-Achse durch Φ zu legen, verlangt die Winkel-Dreiteilung (cf. II Φ). Unter den (S) heben sich zwei Arten als besondere heraus.

1. Ist G_i Achse, so ist die andere die zugehörige Höhe.

2. Liegt Ω in einer Seitenmitte, so wird das System der G_i:

$$G_1)\ a_1 x + b_1 y = 0 \quad G_2)\ a_2 x + b_2 y = -a_2 b_2 D_3 \quad G_3)\ a_2 x - b_2 y = -a_2 b_2 S_3.$$

G_2 und G_3 haben entgegengesetzt gleiche Neigungen zur x-Achse, die also der Halbierenden des Gegenwinkels parallel liegt.

IV. Anwendungen:

1. Da $r = \frac{w_1 w_2 w_3}{2}$, folgt

$$4r^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)(a_3^2 + b_3^2)$$
$$= \sum(a_i^2 b_x^2 b_\mu^2 + b_i^2 a_x^2 a_\mu^2) + (a_1^2 a_2^2 a_3^2 + b_1^2 b_2^2 b_3^2),$$

also ist:

$$4r^2 = \Omega P_1^2 + \Omega P_2^2 + \Omega P_3^2 + \Omega H^2.$$

Diese Gleichung gibt in einfachster Weise den Satz:

Jeder Punkt des Feuerbachschen Kreises hat inbezug auf die Ecken und den Höhenpunkt konstante Abstands-Quadratsummen (Trägheitsmoment) $4r^2$, also hat deren Schwerpunkt das Moment $3r^2$.

Entsprechend gilt: *Jeder Punkt des Umkreises hat in bezug auf die Mittelpunkte der Berührungskreise das konstante Trägheitsmoment $16r^2$; der Umkreismittelpunkt das Moment $12r^2$.*

2. Sei der Umfang eines Dreiecks gegeben. Für ein System (S), das den Nullpunkt im Mittelpunkt einer Seite hat, seien die Gleichungen in trigonometrischer Form:

$$G_1)\ x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1 = 0,$$
$$G_2)\ x\cos\varphi_2 - y\sin\varphi_2 = +r\sin 2\varphi_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$
$$G_3)\ x\cos\varphi_2 + y\sin\varphi_2 = -r\sin 2\varphi_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Dann ist

$$U = 2r(\sin 2\varphi_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin(\varphi_2 + \varphi_1)) = 2r(\sin 2\varphi_2 + 2\sin\varphi_2\cos\varphi_1).$$

Soll r möglichst klein werden, so ist die Klammer ein Maximum. Das geschieht bei jedem φ_2 für $\cos\varphi_1 = 1$, $\sin\varphi_1 = 0$. G_1 wird zur Y-Achse, der Nullpunkt also zum Höhenfußpunkt, und das Dreieck ist gleichschenklig. Der absolut kleinste Wert von r ist also der, für den dies bei Wahl jeder Seitenmitte als Ω eines Systems (S) gilt. D. h. *Unter allen Dreiecken gleichen Umfangs hat das gleichseitige den kleinsten Umkreisradius.* Vgl. Crelles Journal 128, S. 69 u. S. 71. IV.

3. Auf die Verwertbarkeit des Systems (S) für die Lehre von den Kegelschnittbündeln, die einem Dreieck um- oder eingeschrieben sind, kann hier nur unter Anführung der grundlegenden Formeln hingewiesen werden, deren Beweis und Ausnutzung anderer Gelegenheit vorbehalten seien. Die Gleichung des umgeschriebenen Kegelschnitts ist:

$$K(a, b, c) = 0$$

oder

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 - x(as_1 - ch_1) - y(cs_2 - ah_2) = as_2h_2 + 2bh_1h_2 + cs_1h_1,$$

die Tangentialgleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts:

$$K(\delta, \varepsilon, \varphi) = 0$$

oder $\alpha\xi^2 + 2\beta\xi\eta + \gamma\eta^2 + 2\delta\xi + 2\varepsilon\eta = \varphi$, wo:

$$\alpha = 2\varepsilon h_2 - \varphi s_2 h_2,$$

$$\gamma = 2\delta h_1 - \varphi s_1 h_1,$$

$$2\beta = 2\delta s_2 + 2\varepsilon s_1 - \varphi(s_1 s_2 + h_1 h_2).$$

Hier sind (abc) und $(\delta\varepsilon\varphi)$ willkürliche Parameter, $s_1, s_2 = 3S_x, 3S_y$; $h_1, h_2 = H_x, H_y$.

In beiden Formen sind die Grundkegelschnitte diejenigen, welche Ω und die unendlich fernen Achsenpunkte zu Zentren haben; die Bedeutung der $(\delta\varepsilon\varphi)$ ist besonders einfach, indem $\frac{\delta}{\varphi}, \frac{\varepsilon}{\varphi}$ die Mittelpunkts-Koordinaten werden.

4. Die in I. konstatierte Einfachheit der Koordinaten eines Systems (S) gestattet die Aufstellung rechnerisch bequemer Aufgaben für die Zwecke des Elementarunterrichts in der analytischen Geometrie derart, daß bei Benutzung quadratisch liniierten Papiers stete Zeichnung die Rechnungen exakt kontroliert, was für das Verständnis der Korrespondenz zwischen algebraischen und geometrischen Operationen von größtem Werte ist.

Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß sowie mit dem Lineal allein.

Von Georg Wallenberg.

Der Vortragende behandelt zunächst im Anschluß an die Arbeiten von Adler („Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionsaufgaben zweiten Grades notwendigen Hilfsmittel", Sitzungsber. der Wiener Akademie 1890, S. 846—859; „Zur Theorie der Zeicheninstrumente", Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. I, 1902, S. 26—28), Hilbert („Grundlagen der Geometrie" 2. Auflage 1903) und H. Simon („Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel", Zeitschr. für math. u. naturw. Unterr. XXII 1891, S. 81—90) die Lösung der geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades mit dem Lineal und Eichmaß (einer festen Einheitsstrecke) sowie mit dem auf beiden Seiten benutzbaren Parallellineal allein. — Was das Parallellineal anbetrifft, so ist zu unterscheiden, ob man dasselbe nur mit einer Seite an zwei gegebene Punkte anlegen darf oder mit beiden Seiten, d. h. an jeden der beiden Punkte mit

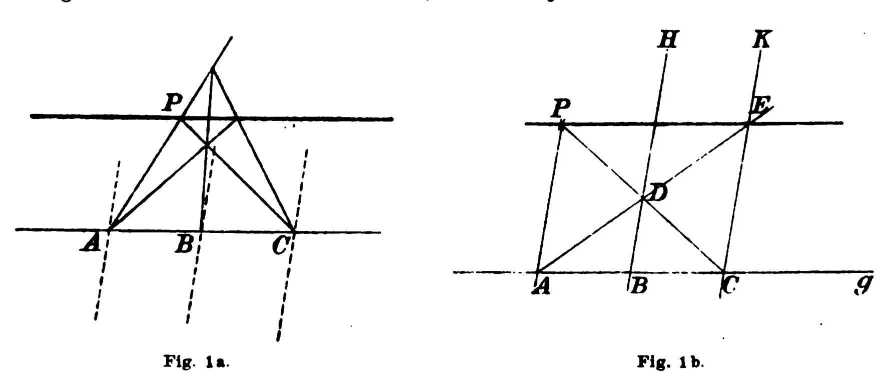


Fig. 1a. Fig. 1b.

je einer Seite, was übrigens auch als geometrisch genau anzusehen ist. Im ersten Falle fällt der Konstruktionsbereich des Parallellineals zusammen mit dem des (nur auf einer Seite benutzbaren) Lineals und Eichmaßes, d. h. es lassen sich alle Aufgaben zweiten Grades lösen mit Ausnahme derjenigen, welche die Konstruktion von $\sqrt{a^2 - b^2}$ erfordern, worin a und b gegebene Strecken sind (vgl. Hilbert l. c.); im zweiten Falle dagegen lassen sich, wie schon Herr Adler (Wiener Ber. l. c.) gezeigt hat, *sämtliche* geometrischen Konstruktionsaufgaben zweiten Grades mit dem Parallellineal *allein* lösen.

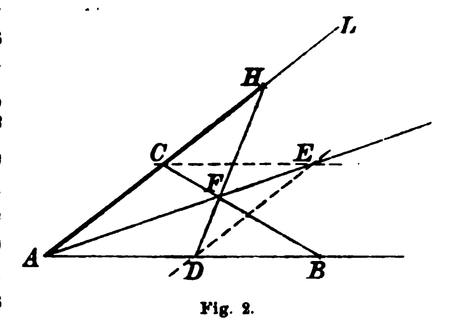


Fig. 2.

Es seien die Lösungen einiger Aufgaben mitgeteilt, die der Vortragende möglichst vereinfacht hat (die punktierten Linien bezeichnen das Parallellineal):

1. Zu einer gegebenen Geraden G durch einen gegebenen Punkt P die Parallele zu ziehen.

Erste Konstruktion: Durch zweimaliges beliebiges Anlegen des Lineals erhält man auf G die Punkte A, B, C derart, daß $AB = BC$. Die weitere Lösung ist die bekannte aus den harmonischen Eigenschaften des Vierseits folgende Konstruktion (Fig. 1a).

Zweite (elementare) Parallelenkonstruktion: Man ziehe durch P eine beliebige Gerade PA und dazu mit dem Parallellineal die Parallelen HB und KC, verbinde P mit C und A mit dem Schnittpunkt D von PC und HB und verlängere AD bis zum Schnitt E mit KC; dann ist PE die Parallele zu g (Fig. 1b).

2. Die Strecke AB auf AL von A aus abzutragen.

Lösung: Durch Anlegen des Lineals an AB und AL erhält man den Rhombus $ACED$. Die Verbindungslinie von D mit F, dem Schnittpunkt von AE und BC, schneidet auf AL schon $AH = AB$ ab (Fig. 2).

Anmerkung: Da $BH \parallel CD$, so ergibt sich aus Fig. 2 eine zweite elementare Parallelenkonstruktion *ohne* Benutzung der harmonischen Eigenschaften des Vierseits — Da ferner $BH \perp AE$, so resultiert aus Fig. 2 eine Konstruktion des von B auf AE zu fällenden Lotes.

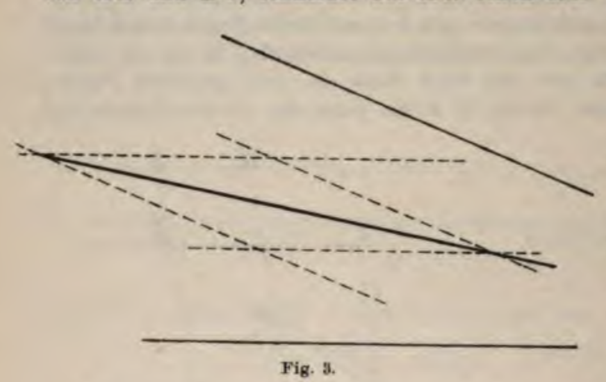


Fig. 3.

3. Einen Winkel zu halbieren, dessen Scheitel nicht gegeben ist.

Lösung: Man ziehe zu jedem Schenkel mit dem Lineal zwei Parallelen; die eine Diagonale des dadurch entstehenden Rhombus ist die gesuchte Halbierungslinie (Fig. 3).

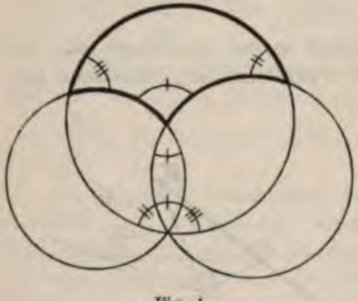


Fig. 4.

Die zweite Mitteilung des Vortragenden bezieht sich auf *die Winkelsumme gewisser Kreisbogendreiecke:* Bildet man ein Dreieck in bezug auf einen Kreis durch reziproke Radien ab, so erhält man als inverse Figur ein aus drei Kreisen gebildetes Dreieck, die sämtlich durch den Mittelpunkt des Beziehungskreises hindurchgehen. Da die Abbildung durch reziproke Radien winkeltreu ist, so beträgt auch in dem Kreisbogendreieck die Winkelsumme zwei Rechte. Es ist nun merkwürdig, daß dieser Satz von der Winkelsumme eines aus drei durch einen festen Punkt gehenden Kreisen gebildeten Dreiecks sich, wie der Vortragende zeigt, *direkt* beweisen läßt, und zwar mit *alleiniger* Benutzung des Axiomes „zwei Halbkreise desselben Kreises sind kongruent“ sowie des Satzes von der Gleichheit der Scheitelwinkel.

Mechanische und elektrische Masse.

Von H. Reißner.

Unter dem Namen mechanische Masse verstehen wir die den Newtonschen Bewegungsgesetzen und dem Newtonschen Gravitationsgesetz folgende Masse, unter dem Namen elektrische Masse diejenige elektrische Ladung, deren Konvektionsenergie in den Kathodenstrahlen in Wärme und andere Energieformen sich umsetzt und welche dem Coulombschen Gesetz der elektrostatischen Anziehung gehorcht. Wir stellen die folgenden **Forderungen** auf:

1. Die ponderomotorischen Kräfte der Gravitation und der Elektrostatik sollen vermittelt werden durch den Spannungszustand eines und desselben Zwischenmediums (des Äthers).

2. Die kinetische Energie der mechanischen und der elektrischen Masse sollen aus der kinetischeu Energie des sich ändernden Feldes folgen.

3. Die in diesem Medium möglichen Störungen sollen den Maxwellschen elektromagnetischen Grundgleichungen gehorchen.

Die **Hilfsmittel** zur Erfüllung dieser Forderungen sind die folgenden:

1. Die Lokalisierung der Energie für Gravitation und Elektrostatik auf die Volumelemente des ganzen Raumes.

2. Die Deutung der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$ als geometrische Bedingungsgleichung zwischen den Parametern benachbarter Volumelemente des Raumes.

3. Die Deutung der Spannungsenergie des Äthers als kinetische Energie nach Hertz' Prinzipien der Mechanik mit Hilfe der dort aufgestellten Begriffe der isozyklischen und adiabatischen Zustandsänderung.

4. Die Aufstellung einer kinematischen Beziehung zwischen Spannungsparametern und Strömungsgeschwindigkeiten im Äther, die dem einen Satz der Maxwell-Lorentzschen Gleichungen entsprechen.

5. Die notwendige Hypothese, daß zwar für die statischen Kräfte zwischen Massen die Zustandsänderung isozyklisch ist, dagegen adiabatisch für die schnellen Feldänderungen des Lichtes.

Die neuen **Ergebnisse** bestehen in der Erfüllung der obigen Forderungen und im einzelnen in der zahlenmäßigen Auswertung der folgenden Größen:

1. Des Verhältnisses von positiver und negativer Ladung, welches die ponderable Materie charakterisiert.

2. Des Wertes der Dielektrizitätskonstante des Vakuums im cm, g, sec.-System und damit die Zurückführung der elektrischen auf die mechanischen Maßeinheiten.

3. Des Verhältnisses von Masse und Durchmesser des Massenatoms, welches gelten muß, wenn die durch die Gravitationskonstante gegebene Proportionalität zwischen gravitierender und träger Masse richtig sein soll.

Die Anregungen zu dieser Arbeit hat Verfasser geschöpft aus Hertz' Prinzipien der Mechanik, aus der von Heaviside, J. J. Thomson, Lorentz, Wiechert, Abraham, Sommerfeld u. a. entwickelten Elektronentheorie und aus

den Arbeiten über Gravitation von Bjerknes[1]), Korn[2]) und Brill.[3]) Zu letzteren Arbeiten steht die vorliegende Auseinandersetzung in einem gewissen Gegensatz, insofern als die drei genannten Verfasser von der reinen Hydrodynamik ausgehen, während hier das Bild des gyrostatischen Äthers von Fitzgerald, Kelvin und Larmor[4]) erweitert und in seinen Folgeschlüssen ausgebaut wird. Die Ergebnisse von Bjerknes und Korn jedoch umfassen keinen genügend großen Kreis von Erscheinungen und die von Brill gegebene Anwendung der Hertzschen Mechanik auf die Gravitation nach einer Andeutung von Riemann führt außerdem zu einem unmöglichen dynamischen Modell.

Der Mechanik von Hertz ist öfter der nicht unberechtigte Vorwurf gemacht worden, daß ihre dynamischen Modelle etwas sehr Künstliches haben, und daß ihre heuristische Kraft von einem gewissen Punkte ab versagt. Z. B. wird es wohl nicht gelingen, die Wärmeleitung nach Hertz' Prinzipien abzuleiten und auch die von ihm selbst in seinem Werk benutzten Bedingungen der adiabatischen und isozyklischen Zustandsänderung sind etwas seiner Mechanik Fremdes. Ferner ist von Carvallo[5]) gezeigt worden, daß die Anwendung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen, d. h. in diesem Fall der Hertzschen Mechanik auf endlich ausgedehnte elektrische Ströme zu falschen Ergebnissen bei bestimmten Leiteranordnungen führt.

Bei genauerer Betrachtung ist Verf. zu den folgenden Schlüssen inbezug auf diese beiden Klassen von Einwänden gekommen.

1. Die zyklischen Eigenschaften eines Systems müssen hervorgehen aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen der statistischen Mechanik. Man darf also die Analogie zwischen physikalischem System und dynamischem Modell nicht zu weit treiben, sondern muß eine vollkommen ungeordnete Bewegung suchen, die die verlangten zyklischen Eigenschaften hat, ebenso wie die zyklischen Eigenschaften des dynamischen Modells eines Gases aus der kinetischen Theorie nach Boltzmanns Andeutungen gewonnen werden können. Durch diese weitere Zurückführung des Zyklismus auf die Statistik wird dann außerdem der Vorteil gewonnen, daß jedesmal ein neues heuristisches Element hinzutritt. In der vorliegenden Arbeit deuten die Verwendung der isozyklischen Zustandsänderung und das damit verknüpfte Abströmen der Energie auf eine im Hintergrund stehende ungeordnete Bewegung, die die zyklische Eigenschaft des Volumenelements des Raumes erzeugt.

2. Soll eine kinetische Deutung in allen Konsequenzen stimmen, so muß sie sich auf Volumenelemente beziehen und nicht auf endliche Raumteile. Die Nichterfüllung dieser Forderung ist der Grund dafür, daß die Lagrangeschen Gleichungen nicht in allen Konsequenzen auf endliche Stromkreise angewendet werden dürfen, ebenso wie die Zustandsgleichung eines Gases genau genommen nur bei unendlich kleinen Raumteilen als Bewegungsgleichung gilt und eine elastische Maschine nicht einer endlichen Anzahl von Koordinaten gehorcht. Die Anwendung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen auf endliche Stromkreise führt die durch einen Querschnitt ge-

---

1) V. Bjerknes, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte.
2) A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik,
3) A. Brill, Über zyklische Bewegung, Math. Ann. Bd. 58, H. 4, S. 469 ff.
4) J. Larmor, Ether and Matter, Cambridge 1904.
5) E. Carvallo, L'électricité etc., Sammlung Scientia.

flossene Elektrizitätsmenge als Koordinate ein, die sich dann bei näherer Betrachtung unangenehmer Weise als nicht holonom erweist.[1])

Eine Forderung der astronomischen Mechanik scheint auf den ersten Blick in der folgenden Abhandlung nicht erfüllt zu sein, daß nämlich die kinetischen Energien mehrerer Massen voneinander unabhängig sein sollen, daß also die kinetische Energie nicht die Produkte der Geschwindigkeiten enthalten darf. — Treten die Produkte verschiedener Geschwindigkeiten auf, so müssen zwischen sich bewegenden Massen ponderomotorische Kräfte ähnlich wie die elektrodynamischen Anziehungen und Induktionen von Stromkreisen entstehen. Verf. hat aber durch Ausrechnung der Koeffizienten der Produkte der Geschwindigkeiten in der lebendigen Kraft festgestellt, daß die so entstehenden Kräfte bei allen irdischen Geschwindigkeiten unmeßbar klein werden gegen die Gravitationskraft. Diese Rechnungen sollen an anderer Stelle gegeben werden.

I. Gleichgewicht.

Zur Aufstellung einer Nahwirkungstheorie sind zwei Voraussetzungen notwendig und hinreichend, nämlich die Lokalisierung der Energie und die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung.

Die bekannte lokalisierte Form der Gravitationsenergie lautet, wenn der Vektor $\mathfrak{E}$ mit den Komponenten X, Y, Z den Vektor der Feldintensität und U_0 eine Konstante bedeutet:

$$T = \int d\tau \frac{\gamma}{2} [U_0 - \mathfrak{E}^2]. \tag{1}$$

Die Laplace-Poissonsche Differentialgleichung schreibt sich:

$$\gamma \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\varrho. \tag{2}$$

Diese Gleichungen sind in der Heaviside-Cohnschen rationalen Form angeschrieben, da von unserem Standpunkte aus der Faktor 4π keinen Sinn hat. γ ist in den obigen Gleichungen eine Konstante und ϱ ist die Dichtigkeit der Massenverteilung.

Die Feldintensitäten.

Für eine mechanische Deutung dieser Gleichungen (1) und (2) muß man nun der Feldintensität $\mathfrak{E}$ einen Charakter beilegen. Eine Geschwindigkeit darf aber $\mathfrak{E}$ offenbar nicht sein, denn dann würde (2) eine nicht homogene lineare Differentialgleichung zwischen den Geschwindigkeiten vorstellen, die nach Hertz aus Stetigkeitsgründen ausgeschlossen ist. (Hertz, Princ. § 124 ff.)

Brill hat sie in formal richtiger Weise aufgefaßt als die Gleichung für die Konstanz eines zyklischen Moments, also für das dauernde Verschwinden der auf die zyklischen Koordinaten wirkenden Kräfte und ist dabei auf physikalisch unzulässige Bilder gekommen. Hier sollen X, Y, Z als langsam veränderliche Koordinaten, Parameter, angenommen werden und demgemäß T zunächst als potentielle Energie.

---

1) H. A. Lorentz, Maxwells elektromagnetische Theorie, Enzyklop. d. Math. Wiss. Bd. V_2 § 33.

Daß die Annahme von Gl. (2) als einer geometrischen Bedingungsgleichung zwischen benachbarten Parametern X, Y, Z widerspruchsfrei ist, zeigen wir zunächst, indem wir die Werte von X, Y, Z aus ihr ableiten. Dazu dient die Vorschrift, daß unter Beachtung der geometrischen Bedingung für das Gleichgewicht die potentielle Energie T den kleinsten möglichen Wert annehmen soll,

$$\delta T = 0 = -\gamma \int d\tau \left\{ [X\delta X + Y\delta Y + Z\delta Z] + \varphi\delta\left[\operatorname{div}\mathfrak{E} + \frac{\varrho}{\gamma}\right]\right\},$$

und da nach einer partiellen Integration

$$\int \varphi\delta\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) d\tau = \int \varphi\delta X\, dy\, dz - \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta X d\tau$$

und außerdem die Variationen von X, Y, Z im Unendlichen verschwinden sollen,

$$0 = \int d\tau \left[\left(X - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta X + \left(Y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\delta Y + \left(Z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\delta Z\right].$$

Es sind nun zwar die Parameter benachbarter Volumelemente durch die Laplace-Poissonsche Gleichung miteinander verknüpft, jedoch die Parameter eines und desselben Volumenelements voneinander unabhängig, so daß wir aus der obigen symbolischen Gleichung die folgenden drei ziehen können:

$$X = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

oder in der Sprache der Vektoranalysis

$$\mathfrak{E} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{3}$$

Man weiß, daß diese Gleichungen (3) zusammen mit Gl. (2) und den Bedingungen im Unendlichen das Problem eindeutig bestimmen und zwar mit Hilfe des Newtonschen Integrals:

$$X = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\varrho\, d\tau}{r},$$
$$Y = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\varrho\, d\tau}{r},$$
$$Z = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\varrho\, d\tau}{r},$$

oder in der Vektorform:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{grad}\operatorname{pot}\varrho. \tag{4}$$

Die ponderomotorischen Kräfte.

Die bekannte Betrachtung der Energieänderung bei einer Lageänderung des Systems zeigt nun auch, daß die ponderomotorischen Kräfte in unserem Ansatz richtig enthalten sind.

$$T = \frac{\gamma}{2}\int d\tau \left[U_0 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

wo jetzt die geometrische Bedingung schon in der Form der Energie T befriedigt ist.

$$\delta T = -\gamma \int d\tau \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\delta\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\delta\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\delta\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right].$$

Eine partielle Integration liefert nun:

$$\delta T = -\gamma \int d\sigma \delta\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma \int \delta\varphi \Delta\varphi d\tau.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Feldintensitäten im Unendlichen mindestens so stark verschwinden als das Quadrat des reziproken Radius, wird:

$$\delta T = \gamma \int \Delta\varphi d\tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\delta z\right),$$

wo sich jetzt also das Integral nur auf die Elemente bezieht, wo $\Delta\varphi$ nicht verschwindet, also ponderable Masse sich befindet.

Führt man nur an einem Punkte eine Verschiebung δx aus, so wird

$$\delta T = \gamma \Delta\varphi d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\delta x = -\varrho d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\delta x$$

Diese Energieänderung kann nun bekanntlich aufgefaßt werden als die Arbeit der Kraft $P_x = -\varrho d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ auf dem Wege δx, sodaß also die ponderablen Kräfte auf ein Volumenelement im Gleichgewichtszustand die Werte annehmen

$$P_x = -\varrho d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$P_y = -\varrho d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$P_z = -\varrho d\tau \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

oder in der Bezeichnungsweise der Vektoranalysis

$$\mathfrak{P} = -dm \operatorname{grad} \varphi, \tag{5}$$

ein Ergebnis, welches das Newtonsche Anziehungsgesetz in sich schließt. Setzt man Gl. (4) in (5) ein, so erkennt man, daß die Gravitationskonstante

$$G = \frac{1}{4\pi\gamma}$$

ist und also für γ sich im *cgs* System der Wert ergibt

$$\gamma = \frac{1}{4\pi G} = \frac{1}{66{,}8 \cdot 10^{-9} 4\pi} = 1{,}19 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{sec}^2}{\mathrm{cm}^3}.$$

Das dynamische Modell.

Wenn man nun die Form (1) der Gravitationsenergie des Volumenelements sich genauer ansieht, so findet man, daß sie einer Auffassung als potentielle Energie erhebliche Schwierigkeiten entgegensetzt. Da nämlich $\frac{\gamma}{2} d\tau \mathfrak{E}^2$ offenbar die äußere Arbeit ist, die von den Parametern des Volumen-

elements aufgenommen wird, haben wir es hier mit einer Energie zu tun, die um den Betrag der äußeren Arbeit nicht zunimmt, sondern im Gegenteil abnimmt. Ein solches elastisches System ist unbekannt und, um dem Satz von der Erhaltung der Energie zu genügen, müssen wir annehmen, daß der doppelte Betrag der zugeführten Energie auf anderem Wege abströmt.

Ein mechanisches System, das dieser Forderung genügt, finden wir nun in Hertz' Prinz. § 579 ff. in dem isozyklischen System wieder.

§ 580 lautet dort:

„Wenn ein isozyklisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.“

Hertz hatte das System mit isozyklischer Zustandsänderung offenbar aufgestellt, um die Energie eines Systems konstanter elektrischer Stromkreise darzustellen. Bei diesem System nimmt bekanntlich die Energie um den Betrag der geleisteten äußeren Arbeit ab, indem sie von den stromerzeugenden Elementen oder Maschinen verzehrt wird.

Es entsteht also jetzt die Aufgabe, die Energie dT eines Volumenelements mit Hilfe verborgener Massen und Geschwindigkeiten als die kinetische Energie eines isozyklischen Systems darzustellen.

Es genügt dazu ein monozyklisches System und daher ist dT in die Form zu bringen

$$dT = \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}}^2.$$

Hierin bedeuten $\mathfrak{m}$ die Gesamtmasse des zyklischen Systems, $\mathfrak{a}$ einen von den Parametern abhängigen Ausdruck, $\dot{\mathfrak{p}} = \frac{d\mathfrak{p}}{dt}$ die zyklische Geschwindigkeit.

Die beiden Formen der Energie gehen nun ineinander über, wenn wir setzen

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = \alpha[U_0 - \mathfrak{E}^2], \\ \frac{1}{2}\mathfrak{m}\,\dot{\mathfrak{p}}^2 = \frac{1}{\alpha}\frac{\gamma\, d\tau}{2}, \end{cases}$$

was wir tun dürfen, da ja die zyklische Geschwindigkeit konstant sein soll.

Elektrostatik.

Als heuristischen Versuch kann man nun die Forderung stellen, daß die Gravitations- und elektrostatischen Wirkungen durch dasselbe Medium übertragen werden sollen, d. h. daß die beiden Energien wesensgleich seien und von denselben Koordinaten abhängen müssen.

Die elektrostatische Anziehung unterscheidet sich von derjenigen der Gravitation nur durch das Vorzeichen der ponderomotorischen Kraft, d. h. dadurch daß gleiche Ladungen sich abstoßen, ungleiche sich anziehen, während bei der Gravitation Massen gleichen Vorzeichens sich anziehen und solche ungleichen Vorzeichens nicht auftreten.

Damit ist auch weiterhin die Form der elektrischen Feldenergie eine andere, die hier im Heaviside-Cohnschen rationalen Maßsystem den Wert hat:

$$dT_e = \frac{\varepsilon\, d\tau}{2}[U_{0_e} + \mathfrak{E}_e^2],$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante des Vakuums, U_{0_e} eine zum Volumenelement gehörige Konstante und $\mathfrak{E}_e$ der Vektor der elektrischen Feldintensität.

Hier ist also die durch die Parameter aufgenommene Arbeit $\varepsilon \mathfrak{E}_e^2 \frac{d\tau}{2}$ gleich der Zunahme der Energie, und deswegen können wir, wiederum nach Hertz l. c., die Energie des elektrostatischen Spannungszustandes als diejenige eines monozyklischen, jetzt adiabatischen Systems deuten durch die folgende Gleichsetzung

$$\frac{\varepsilon d\tau}{2}[U_{0_e} + \mathfrak{E}_e^2] = \frac{1}{2\mathfrak{m}}\mathfrak{b}\mathfrak{q}^2,$$

wo $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}\dot{\mathfrak{p}} = \text{const.}$ das zyklische Moment und $\mathfrak{b} = \frac{1}{\mathfrak{a}}$ ist.

Es soll jetzt $\mathfrak{E}_e$ eine Funktion von $\mathfrak{E}$ und die Anfangsenergie im neutralen Zustand dieselbe sein wie im neutralen Gravitationsfeld. Daraus folgt:

$$\frac{\gamma d\tau}{2} U_0 = \frac{\varepsilon d\tau}{2} U_{0_e},$$

$$U_{0_e} = \frac{\gamma}{\varepsilon} U_0.$$

Ferner, da $\mathfrak{b} = \frac{1}{\mathfrak{a}}$:

$$U_{0_e} + \mathfrak{E}_e^2 = \frac{\beta}{U_0 - \mathfrak{E}^2},$$

wo β eine Konstante.

Führen wir auf der rechten Seite die partielle Division aus, so erhalten wir:

$$U_{0_e} + \mathfrak{E}_e^2 = \beta\left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_0^2}\mathfrak{E}^2 + \frac{1}{U_0^3}\mathfrak{E}^4 + \cdots\right).$$

Setzen wir $\beta = U_0^2 \frac{\gamma}{\varepsilon}$, so ergibt sich, wenn man voraussetzt, daß $\mathfrak{E}^4$ klein sei gegen U_0, daß also die Änderung der Energie klein sei gegen ihren Anfangswert, eine Übereinstimmung durch die einfache Beziehung

$$\mathfrak{E}_e = \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}\,\mathfrak{E}, \quad U_{0_e} = \frac{\gamma}{\varepsilon} U_0. \tag{7}$$

Daß die im Vakuum aufgespeicherte Energie, mit Hilfe deren es Parameteränderungen Widerstand leistet, groß ist gegen die durch jene Parameteränderungen geleistete Arbeit, ist offenbar eine durchaus berechtigte Annahme.

Man sieht also, daß bei dieser Auffassung das Gravitationsfeld vom elektrostatischen sich nur durch die Art der Zustandsänderung unterscheidet. Während im elektrostatischen Feld die zyklischen Geschwindigkeiten der einzelnen Volumenelemente von einander unabhängig sind und keine Arbeit durch die zyklischen Koordinaten aufgenommen wird, findet im Gravitationsfeld ein solcher Ausgleich zwischen den zyklischen Geschwindigkeiten aller Volumenelemente statt, daß jene durch das unendliche Reservoir des Weltraums konstant gehalten werden. Daß die isozyklische Bedingung $\dot{\mathfrak{p}} = \text{const.}$ analog wie die isothermische durch Strömungsausgleich entstehen muß und nicht als geometrische Bedingung aufgefaßt werden darf, sieht man daraus, daß sie als inhomogen unstetige Zusammenhänge voraussetzen würde. (Hertz, Princ. § 124 ff.)

Die Ladung der Materie.

Die oben abgeleiteten Beziehungen zwischen mechanischen und elektrischen Vektoren (Gl. 7) sagen aus, daß die Dimension der Ladung oder wahren

Elektrizitätsmenge mit der Dimension der Masse übereinstimmt, und gestatten infolgedessen die elektrische Ladung der gravitierenden Masse mit Hilfe der Gravitationskonstante zu bestimmen. Wenn wir außerdem die Angaben über Ladungen und Massen der Kathodenstrahlenteilchen zu Hilfe ziehen, können wir auch eine Aussage machen über die Beträge an positiver und negativer Ladung, die in gravitierender Masse enthalten sind und sich zwar elektrisch zum größten Teil aufheben, aber in bezug auf ihre lebendige Kraft addieren.

Die wahre Ladung einer Kugel vom Inhalt τ mit der räumlichen Dichte $-\varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E}_e$ ist:

$$l_e = -\varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E}_e \tau.$$

Es war nun nach (7):

$$\mathfrak{E}_e = \sqrt{\frac{\gamma}{\varepsilon}}\, \mathfrak{E},$$

$$l_e = -\sqrt{\gamma\varepsilon} \operatorname{div} \mathfrak{E} \cdot \tau = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\, m. \tag{8}$$

Letzteres nach Gl. (2).

Dieses sind die Beziehungen zwischen Ladung und Masse im Heaviside-Cohnschen rationalen Maßsystem, das hier gewählt ist, weil es sich am besten der mechanischen Grundlage anpaßt. Um Gl. (8) mit den an Kathodenstrahlen gewonnenen Ergebnissen vergleichen zu können, müssen wir dieselbe im elektromagnetischen Maßsystem hinschreiben. Zur Transformation benutzt man am besten die invariante Energie. Es muß sein:

$$\frac{\varepsilon}{2}\, \mathfrak{E}_e^2 = \frac{1}{8\pi w^2}\, \mathfrak{E}_m^2,$$

wo $w = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1} die Lichtgeschwindigkeit und der Index m das elektromagnetische Maßsystem bedeutet. Daraus zieht man:

$$\text{(8a)} \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_e = \mathfrak{E}_m \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon} \cdot w}, \\ l_e = -\varepsilon \operatorname{div} \mathfrak{E}_e \tau = -\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{4\pi w^2}} \operatorname{div} \mathfrak{E}_m \tau = l_m w \sqrt{4\pi\varepsilon}, \\ l_m = -\dfrac{1}{4\pi w^2} \operatorname{div} \mathfrak{E}_m \tau. \end{cases}$$

Schließlich

$$l_m = \frac{1}{w\sqrt{4\pi\gamma}}\, m = \frac{\sqrt{66{,}8 \cdot 10^{-9}}}{3 \cdot 10^{10}}\, m,$$

$$l_m = 0{,}861 \cdot 10^{-14} \cdot m. \tag{9}$$

Gl. (9) gibt an, daß jede Masse eine elektromagnetische gemessene Ladung l_m von obigem Betrage besitzt, die aber nur bei technisch unmöglichen Geschwindigkeiten bemerkbar wäre.

Wir müssen nun annehmen, daß die gravitierende Masse sich aus positiven und negativen Ladungen zusammensetzt. Zur Berechnung der trägen Masse m sind diese Ladungen zu addieren, zur Berechnung der Gesamtladung zu subtrahieren, sodaß wir schreiben dürfen:

$$l_p - l_n = 0{,}861 \cdot 10^{-14} (l_p + l_n) \alpha.$$

Nun sind aus den Messungen an Kathodenstrahlen die Verhältnisse zwischen Ladung und Masse bekannt und zwar ist

$$\alpha = \frac{m}{l_n} = \frac{1}{1{,}865 \cdot 10^7},^{1)}$$

$$l_p - l_n = \frac{0{,}861 \cdot 10^{-14}}{1{,}865 \cdot 10^7}(l_p + l_n) = 4{,}62 \cdot 10^{-22}(l_p + l_n),$$

$$l_p(1 - 4{,}62 \cdot 10^{-22}) = l_n(1 + 4{,}62 \cdot 10^{-22}),$$

$$\frac{l_p}{l_n} = \frac{1 + 4{,}62 \cdot 10^{-22}}{1 - 4{,}62 \cdot 10^{-22}}. \tag{10}$$

Hierbei ist wie üblich vorausgesetzt, daß die Kathodenstrahlen nur negative Ladungen mit sich führen.

Wir können jetzt als Ergebnis der Untersuchung die folgende Behauptung aussprechen:

Die ponderable Materie setzt sich aus positiven und negativen Ladungen zusammen. Die Gravitation entsteht dadurch, daß Ladungen des eines Vorzeichens diejenigen des anderen Vorzeichens um einen winzigen Bruchteil überwiegen und ferner dadurch, daß im elektrisch neutralen Feld die Zustandsänderung eine isozyklische ist.

Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums.

Unter derselben Voraussetzung, daß die Elektronen der Kathodenstrahlen aus rein negativen Ladungen bestehen, kann auch die Größe der Dielektrizitätskonstante des Vakuums im *cgs* System ermittelt werden. Die Gravitationskonstante nämlich gibt die Anziehung zwischen Differenzen positiver und negativer Ladung, die Dielektrizitätskonstante zwischen rein positiven oder rein negativen Ladungen.

Bestände die Materie aus rein negativen Ladungen, so würde die Dielektrizitätskonstante gleich der entsprechenden Konstanten der Gravitation sein $\varepsilon = \gamma = \frac{1}{4\pi G}$ und Ladung im rationalen System würde gleich Masse im *cgs* System sein

$$l_e = m.$$

Nun ist andererseits nach (8a)

$$l_e = l_m w \sqrt{4\pi\varepsilon}$$

und aus Messungen

$$l_m = m \cdot 1{,}865 \cdot 10^7,^{1)}$$

also

$$m = w\sqrt{4\pi\varepsilon} \cdot 1{,}865 \cdot 10^7 \cdot m,$$

daraus

$$\varepsilon_1 = 4\pi\varepsilon = \frac{1}{w^2 \cdot 1{,}865^2 \cdot 10^{14}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{12{,}57 \cdot 9 \cdot 10^{20} \cdot 1{,}865^2 \cdot 10^{14}} = 2{,}542 \cdot 10^{-37}\,\mathrm{g\,sec^2\,cm^{-3}}$$

$\varepsilon_1 = 4\pi\varepsilon$ ist hier die Dielektrizitätskonstante im irrationalen elektrischen Maßsystem.

Daß die Dielektrizitätskonstante des Vakuums einen so kleinen Wert annimmt, bedeutet, daß die elektrische Anziehung außerordentlich groß gegen die

1) Siehe z. B. H. Starke, Experimentelle Elektrizitätslehre, S. 393.

Gravitation ist und ferner nach (8 a), daß die elektrostatisch gemessene Ladung der ponderabelen Materie wegen ihrer Kleinheit sich der Messung entzieht.

Durch die Angabe des Wertes der Dielektrizitätskonstante im *cgs* System sind alle elektrischen Maßeinheiten auf die mechanischen zurückgeführt.

II. Langsame Bewegung.

Die statische Seite genügt jedoch zu einer befriedigenden Lösung noch nicht. Es muß vielmehr vor allem noch gezeigt werden, daß die Proportionalität der trägen und der gravitierenden Masse eine Folge unseres Bildes ist.

Die kinematische Bedeutung der Parameter $\mathfrak{E}(X, Y, Z)$.

Zu diesem Zweck müssen wir über den Vektor $\mathfrak{E}$ eine bestimmte kinematische Vorstellung schaffen. Dieser Vektor muß im leeren Raum der Bedingung $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ genügen, und da der Vektor der Rotation des Volumenelements eines kontinuierlichen Mediums diese Bedingung erfüllt, erscheint es als das nächstliegende, $\mathfrak{E}$ als die Verdrehung des Volumenelements und seine zeitliche Änderung als die Wirbelgeschwindigkeit des von ponderabler Materie freien Äthers zu deuten.

Dort jedoch, wo ponderable Materie sich befindet, muß diese kinematische Beziehung noch ergänzt werden, entsprechend der Laplace-Poissonschen Gleichung:

$$\gamma \operatorname{div} \mathfrak{E} = -\varrho$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma \operatorname{div} \mathfrak{E}) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Im freien Äther ist $\varrho = 0$ und deswegen $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$, dort wo ponderable Masse sich befindet, muß sein

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0 = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \varrho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \varrho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

wo V_x, V_y, V_z die Geschwindigkeiten der Materie.

Diesen Bedingungen entsprechen wir am einfachsten, wenn wir setzen:

$$\gamma \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \gamma \dot{\mathfrak{E}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{v} + \varrho \mathfrak{V}, \tag{11}$$

wo $\mathfrak{v}$ der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit des Äthers, $\mathfrak{V}$ derjenige der Materie.

Denn bilden wir mit dieser Gl. $\gamma \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$, so erhalten wir:

$$\gamma \operatorname{div} \dot{\mathfrak{E}} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} = V_x \frac{\partial \varrho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \varrho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \varrho}{\partial z},$$

d. h. also $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, wenn die $\mathfrak{V} = 0$ angenommen wird, was ja auch richtig ist, wenn in keinem Volumenelement eine Dilatation der ponderablen Materie stattfinden soll.

Man bemerke, daß nicht $\mathfrak{V} = \mathfrak{v}$ gesetzt ist, d. h. daß nicht vorausgesetzt wird, daß Äther und Materie dort, wo sie zusammenfallen, dieselbe Geschwindigkeit besitzen.

In der Tat wird sich ergeben, daß der Äther an der Translation ponderabler Materie nicht teilnimmt, ebensowenig wie das Wasser des Meeres, wenn Wellen auf ihm forteilen oder nach einem Bilde von Larmor eine Schnur, auf der ein Knoten sich verschiebt.

Allerdings schließt die aufgestellt ekinematische Beziehung (11) eine gewisse Willkürlichkeit in sich, da noch ein beliebiger Wirbelvektor hinzugefügt werden dürfte, ohne das Gesetz von der Erhaltung der Masse hinfällig zu machen, was jedoch nur dann getan werden soll, wenn Widersprüche dazu zwingen.

Die Ätherströmung.

Bei der Darstellung der lebendigen Kraft der Materie als kinetische Energie des Gravitationsfeldes soll zunächst als Vereinfachung angenommen werden, daß die Geschwindigkeit der Materie klein ist gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Störungen im Äther, daß wir also die aufeinanderfolgenden Zustände des Feldes als Gleichgewichtszustände ansetzen dürfen. Damit schließen wir uns der von Hertz aufgestellten Forderung für die zyklischen Systeme an. Betrachten wir als Geschwindigkeit von Störungen im Äther die Lichtgeschwindigkeit, so ist dies Verhältnis bei der Bewegung der Erde $\sim 10^{-4}$.

Es möge nun die lebendige Kraft der Ätherströmung im unendlichen Raum bei einer geradlinigen Translation eines Massenteilchens bestimmt werden.

Es sind zunächst auszuwerten die Strömungsgeschwindigkeiten im Vakuum, wenn der Vektor der Feldintensität $\mathfrak{E}$ und die Geschwindigkeit des betrachteten Massenteilchens bekannt sind.

Aus dem Vektor $\mathfrak{E}$ können wir die Wirbelgeschwindigkeiten der Ätherströmung sofort ableiten durch die Gleichung (11)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \frac{\gamma}{c} \mathfrak{E} - \frac{\varrho}{c} \mathfrak{B}.$$

Aus den später aufzustellenden Bewegungsgleichungen wollen wir hier das Ergebnis vorwegnehmen, daß das Gravitationsmedium inkompressibel ist, daß also

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0.$$

Fügen wir dann noch die Bedingung hinzu, daß die Geschwindigkeiten im Unendlichen nicht schwächer als das Quadrat des reziproken Radius verschwinden sollen, so dürfen wir den Vektor $\mathfrak{v}$ aus dem Vektor $\operatorname{rot} \mathfrak{v}$ in folgender Weise ableiten.

Wir führen einen neuen Vektor $\mathfrak{A}$ ein durch die Beziehungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{v}.$$

Durch nochmalige Anwendung der Operation rot erhalten wir aus der zweiten Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

und unter Berücksichtigung der ersten obigen Gleichung ($\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$)

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = - \Delta \mathfrak{A}.$$

Es kann also $\mathfrak{A}$ als das Potential der Massenverteilung rot $\mathfrak{v}$ bestimmt werden nach dem Newtonschen Integral zu

$$(12)\qquad \mathfrak{A} = \text{pot rot } \mathfrak{v} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{d\tau \text{ rot } \mathfrak{v}}{r},$$

$$\mathfrak{v} = \text{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\int \frac{d\tau \text{ rot } \mathfrak{v}}{r}\right).$$

Wir nehmen jetzt ein Teilchen von der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ bewegt. In Gl. (8a) ist festgestellt worden, daß sich die ponderable Materie aus positiven und negativen Ladungen so zusammensetzt, daß im Heaviside-Cohnschen rationalen Maßsystem die Beziehung besteht:

$$(8)\qquad l_e = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\, m.$$

Bezeichnen wir wiederum mit ϱ_e die Dichte der elektrischen Ladung und setzen wir als geometrische Bedingung fest, daß sich Ladung eines Vorzeichens in einer inneren Kugel mit Radius r_i, Ladung des anderen Vorzeichens in der äußeren Kugelschale mit den Radien r_i und r_a befinden und zwar beide mit der konstanten Dichte ϱ_e bezw. $-\varrho_e$, so müssen wir die folgenden Bedingungen vorschreiben:

$$(13)\qquad \begin{cases} m = \frac{4}{3}\pi r_a^3 \varrho_e, \\ l_e = \varrho_e\{\frac{4}{3}\pi(r_a^3 - r_i^3) - \frac{4}{3}\pi r_i^3\} = \frac{4}{3}\pi(r_a^3 - 2r_i^3)\varrho_e, \\ \frac{l_e}{m} = \frac{r_a^3 - 2r_i^3}{r_a^3} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}, \\ r_i = r_a \sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}}{2}}. \end{cases}$$

Da $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}$ sehr klein ist, kann man sagen, daß die innere Kugel gegen die äußere Schale sich um einen winzigen Bruchteil des Volumens unterscheidet.

Die Ausführung der zur Bestimmung von $\mathfrak{v}$ notwendigen Operationen vereinfacht sich dadurch beträchtlich, daß die Operation rotation, angewandt auf die Potentialabgeleitete $\dot{\mathfrak{E}} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{grad } \varphi)$, den Beitrag 0 liefert. Es geben einen Beitrag zu dem obigen Integral also nur die Geschwindigkeiten der Materie. Setzen wir, ohne die Allgemeinheit zu vermindern, $\mathfrak{V}_y$ und $\mathfrak{V}_z = 0$, lassen wir also das Massenteilchen nur in der Richtung der x-Achse fortschreiten, so wird zunächst der maßgebende Teil der Rotationskomponente

$$(11\text{a})\qquad \begin{cases} \text{rot } \mathfrak{v}_x = -\frac{\varrho}{c}\mathfrak{V}_x, \\ \text{rot } \mathfrak{v}_y = \text{rot } \mathfrak{v}_z = 0. \end{cases}$$

Innerhalb der inneren Kugel hat man nach (12)

$$\mathfrak{A}_x = -2\pi\varrho\left(r_a^2 - 2r_i^2 - \frac{r^2}{3}\right)\frac{\mathfrak{V}_x}{4\pi c}.$$

Innerhalb der Kugelschale

$$\mathfrak{A}_x = -2\pi\varrho\left(r_a^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{4}{3}\frac{r_i^3}{r}\right)\frac{\mathfrak{B}_x}{4\pi c}.$$

Im Außenraum

$$\mathfrak{A}_x = -\frac{4\pi\varrho}{3r}(r_a^3 - 2r_i^3)\frac{\mathfrak{B}_x}{4\pi c}.$$

Durch die Anwendung der Operation rot gewinnen wir die Geschwindigkeiten des Äthers zu:

Im Innenraum

$$\mathfrak{v}_x = 0,$$
$$\mathfrak{v}_y = -\frac{z}{r_a^3}\frac{m\mathfrak{B}_x}{4\pi c},$$
$$\mathfrak{v}_z = +\frac{y}{r_a^3}\frac{m\mathfrak{B}_x}{4\pi c}.$$

In der Kugelschale

$$\mathfrak{v}_x = 0,$$
$$\mathfrak{v}_y = +\frac{z}{r_a^3}\frac{m\mathfrak{B}_x}{4\pi c},$$
$$\mathfrak{v}_z = -\frac{y}{r_a^3}\frac{m\mathfrak{B}_x}{4\pi c}.$$

Im Außenraum unter Beachtung der Gl. (13):

$$\mathfrak{v}_x = 0,$$
$$\mathfrak{v}_y = +\frac{z}{r^3}\frac{m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,\mathfrak{B}_x}{4\pi c},$$
$$\mathfrak{v}_z = -\frac{y}{r^3}\frac{m\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\,\mathfrak{B}_x}{4\pi c}.$$

Aus diesen Werten der Strömungsgeschwindigkeiten sieht man, daß der Äther in der Richtung der materiellen Bewegung ruht und daß seine mit der Translation ponderabler Massen verbundene Bewegung nur in einer Rotation um die Bewegungsrichtung als Achse besteht, die innerhalb der Materie mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, aber je nach dem Vorzeichen der Ladung in verschiedenem Drehsinne erfolgt, außerhalb der Materie mit einer Winkelgeschwindigkeit, die mit der dritten Potenz des Abstandes vom Massenteilchen abnimmt. Da $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}$ eine sehr kleine Zahl (siehe S. 35) und c wahrscheinlich eine sehr große Zahl ist, wird die Rotation schon in kurzer Entfernung unmerkbar sein.

Mit dem Ergebnis, daß der Äther an der Translation der Materie nicht teilnimmt, wird der Tatsache der Aberration des Fixsternlichtes genügt unter der nachher betrachteten Voraussetzung natürlich, daß das Medium der Newtonschen und elektrostatischen Anziehung auch die Lichtschwingungen vermittelt.

Die Werte der Strömungsgeschwindigkeiten des Äthers zeigen außerdem, daß die Materie nicht an den Ätherelementen haftet, sondern sich in jedem Augenblick aus anderen primären Massen zusammensetzt und das Bleibende an ihr die geometrische Bedingung und die Bewegungsform ist.

Die kinetische Energie.

Aus den obigen Werten der Geschwindigkeiten können wir die kinetische Energie auf folgende Weise ausdrücken durch die Geschwindigkeit der ponderabeln Materie:

$$L = \frac{\sigma}{2}\int_0^\infty d\tau\, \mathfrak{v}^2,$$

wo σ die Dichtigkeit des Äthers bedeuten möge.

Mit den Werten der Gl. (10) wird dieses Integral

$$L = \frac{\sigma}{2}\frac{m^2 \mathfrak{B}_x^2}{16\pi^2 c^2}\left[\frac{\varepsilon}{\gamma}\int_{r_a}^{\infty}\frac{y^2+z^2}{r^6}\,d\tau + \int_0^{r_a}\frac{y^2+z^2}{r_a^6}\right],$$

wo die Strömungsgeschwindigkeiten im negativen Innenraum und der positiven Kugelschale zusammengefaßt werden dürfen, da es sich um ihre Quadrate handelt.

Das erste Integral der Klammer hat den Wert $\frac{8}{3}\frac{\pi}{r_a}$, das zweite Integral $\frac{8}{15}\frac{\pi}{r_a}$. Die kinetische Energie einer Masse m, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{B}_x$ bewegt, wird also

$$m\frac{\mathfrak{B}_x^2}{2} = \frac{\sigma}{c^2}\frac{m^2}{16\pi^2}\left[\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{8}{3}\frac{\pi}{r_a} + \frac{8}{15}\frac{\pi}{r_a}\right]\frac{\mathfrak{B}_x^2}{2} = \frac{\sigma}{c^2}\frac{m^2}{r_a}\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}+\frac{1}{5}\right)}{6\pi}\frac{\mathfrak{B}_x^2}{2}.$$

Nach S. 35 ist nun $\frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{2{,}542 \cdot 10^{-37}}{1{,}19 \cdot 10^6}$, eine gegen $\frac{1}{5}$ außerordentlich kleine Zahl, d. h. die kinetische Energie des Außenraumes verschwindet gegen diejenige innerhalb der ponderablen Materie, obgleich sich die erstere auf den unendlichen Raum, die zweite auf ein Atom erstreckt, und wir können die letzte Gleichung vereinfachen zu

$$m = \frac{\sigma}{c^2}\frac{m^2}{r_a}\frac{1}{30\pi}. \tag{14}$$

Daraus folgt zwischen Masse und Durchmesser eines Elementarteils die Beziehung:

$$m = \frac{c^2}{\sigma}30\pi r_a.$$

Weiterhin wird die Konstante $\frac{c^2}{\sigma}$ noch ausgewertet werden.

Bestände die Masse aus Ladungen eines Vorzeichens, so hätte sich mit $\frac{\varepsilon}{\gamma} = 1$ ergeben

$$m = \frac{\sigma}{c^2}\frac{\mathfrak{l}_e^2}{r_a}\frac{1}{5\pi},$$

und diese Beziehung ist identisch mit dem Resultat der Elektronentheorie für langsame Geschwindigkeiten.

Unsere Annahme bezüglich der Verteilung der Ladungen verschiedenen

Vorzeichens bringt eine gewisse Willkür mit sich, sodaß Gl. (14) wohl nur eine Größenordnung angibt. Immerhin ist die Voraussetzung zweier Ladungen konstanter Dichte innerhalb des Atoms die einfachste und die neueren Betrachtungen von J. J. Thomson über die Gleichgewichtsstellungen der zu einem Atom gehörigen Ladungen würde zu schwierigen Fragen führen.

III. Die Fortpflanzung von Störungen.

Bisher sind nur Bewegungen betrachtet worden, die langsam im Verhältnis zu der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Störungen im betrachteten Medium sein sollten. Wollen wir nun die Forderung erfüllen, daß das Gravitationsmedium auch Träger der elektromagnetischen und der Lichtschwingungen sei und wollen wir den Wert der in den letzten Ergebnissen vorkommenden Konstanten $\frac{c^2}{\sigma}$ finden, so müssen wir die Voraussetzung der aus lauter Gleichgewichtszuständen bestehenden Veränderung des Feldes fallen lassen und die strengen Bewegungsgleichungen des Feldes aufstellen.

Es handele sich jetzt darum, aus der vollständigen Form der Energie:

$$(1\text{a}) \qquad T = \int \frac{\sigma}{2}\, d\tau\, \mathfrak{v}^2 + \int \frac{\gamma}{2}\, d\tau (U_0 - \mathfrak{E}^2)$$

und der kinematischen Beziehung zwischen $\dot{\mathfrak{E}}$ und $\mathfrak{v}$ im freien Äther

$$(8) \qquad -\gamma \dot{\mathfrak{E}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

die Bewegungsgleichungen und damit die Art der Fortpflanzung von Störungen kennen zu lernen.

Eine solche Ableitung ist für die Elektrizitätslehre zuerst von Fitz-Gerald gegeben worden und in einem Teil von Boltzmanns Vorlesungen über die Maxwellschen Gleichungen zum Ausgangspunkt genommen worden. Geht man hier analog vor, so ergeben sich Bewegungsgleichungen, die den Maxwellschen Gleichungen durchaus entsprechen, aber wegen des Minuszeichens in der Gravitationsenergie, dem zweiten Gliede in Gl. (1a) würden in den so aufgestellten Gleichungen die Vorzeichen andere sein. Eliminiert man z. B. dann die Feldintensität aus den Bewegungsgleichungen mit Hilfe der kinematischen Beziehung, so würde eine Wellengleichung von der Form entstehen:

$$-C \Delta \mathfrak{v} = \frac{d^2 v}{d t^2}.$$

Dieser Wellengleichung entsprechen nun aber wegen der ungleichen Vorzeichen auf beiden Seiten keine reell periodischen Funktionen, sondern man müßte zur Integration Exponentialfunktionen negativen Arguments verwenden. Eine eingeleitete Störung würde sich also mit Dämpfung ausbreiten.

In Wirklichkeit jedoch sehen wir, daß die Störungen in dem Medium, das die Gravitation vermittelt, sich als Licht bemerkbar machen, und daß die Lichtschwingungen ohne Dämpfung im freien Äther rein periodisch vor sich gehen. Es scheint also, als ob das hier gewählte mechanische Modell versagte. Erinnern wir uns jedoch, daß es sich beim Licht um außerordentlich schnelle Zustandsänderungen handelt und bedenken wir, daß der isozyklische Ausgleich bei dieser Schnelligkeit vielleicht nicht möglich ist, ebenso wie bei den viel langsameren Schallschwingungen ein isothermischer

Ausgleich nicht stattfindet, so werden wir dazu geführt, bei den billionenmal in der Sekunde erfolgenden Lichtschwingungen adiabatische Zustandsänderung vorauszusetzen und die auf S. 6 umgewandelte adiabatische Form der Energie hier zu verwenden. Die Energie nimmt dann nach dem dort Auseinandergesetzten die Form an:

$$T = \int \frac{\sigma}{2} d\tau \mathfrak{v}^2 + \int \frac{\gamma}{2} d\tau (U_0 + \mathfrak{E}^2).$$

Leitet man hieraus und aus der kinematischen Gleichung (8) die Bewegungsgleichungen ab, so gelangt man zu Gleichungen, die den Maxwellschen in jeder Beziehung entsprechen, und da die elektromagnetische Lichttheorie wohl heute unbestritten herrscht, damit zu dem Ergebnis, daß dasselbe Medium, welches die Gravitation vermittelt, auch die Eigenschaft besitzt rein transversale Wellen fortzupflanzen und zwar in der von der Optik geforderten Weise. Erinnern wir uns nun noch, daß der Äther, wie auf S. 39 gezeigt, an der Translation der Materie nicht teilnimmt, so gewinnen wir eine weitere Bestätigung durch die Tatsache der Aberration des Fixsternlichtes.

Es sollen nun zwecks Berechnung der oben gebrauchten Konstante $\frac{c^2}{\sigma}$ die Bewegungsgleichungen wirklich aufgestellt werden.

Durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ergeben sich, wie man bei Boltzmann nachlesen kann, die drei Gleichungen

$$-\frac{\sigma}{c}\dot{\mathfrak{v}} = \operatorname{rot} \mathfrak{E},$$

welche zusammen mit den kinematischen Gleichungen

$$\dot{\mathfrak{E}} = c \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

die Maxwellschen Gleichungen im freien Äther und damit alle ihre Folgen wiedergeben.

Differenziert man einen der Gleichungssätze nach t und setzt ihn in den anderen Gleichungssatz ein, so gewinnt man die bekannten Wellengleichungen

$$-\frac{\gamma\sigma}{c^2}\ddot{\mathfrak{v}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{v} = -\Delta \mathfrak{v},$$

$$\frac{\sigma\gamma}{c^2}\ddot{\mathfrak{E}} = \Delta \mathfrak{E}.$$

Aus dieser Form der Wellengleichungen sieht man, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen im Äther ist:

$$w = \frac{c}{\sqrt{\gamma\sigma}}.$$

Setzen wir diese gleich der Lichtgeschwindigkeit, so haben wir

$$\frac{c^2}{\gamma \cdot \sigma} = (3 \cdot 10^{10})^2 (\mathrm{cm}^2 \sec^{-2})$$

und die oben benutzte Konstante

$$\frac{c^2}{\sigma} = \gamma w^2 = 9 \cdot 10^{20} \cdot 1{,}19 \cdot 10^6 = 1{,}072 \cdot 10^{27}.$$

Setzen wir diesen Wert in das Ergebnis der Gl. (14) ein, so erhalten wir in Grammen und Zentimetern:

$$m = r_a \cdot 30\,\pi\gamma w^2 = r_a \cdot 1{,}011 \cdot 10^{29}. \tag{14a}$$

Die Masse befindet sich also in den Atomen im Zustande enormer Dichtigkeit.

Trotzdem die vorhergehende Untersuchung als leitendes Prinzip allein die Mechanik benutzt hat, befindet sie sich doch in engem Anschluß an die neueren Versuche einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik von W. Wien, H. A. Lorentz, J. J. Thomson u. a. Wie allerdings das nicht unwichtige Schlußglied über die Art der Zustandsänderung des Äthers und damit der Übergang von Gravitation zu Elektrostatik in eine rein elektromagnetische Begründung eintreten müßte, kann Verfasser nicht übersehen. Beiden Methoden gemeinsam ist jedenfalls die Anschauung, daß für die ponderable Materie die Newtonschen Bewegungsgesetze nur näherungsweise, allerdings mit außerordentlich großer Annäherung erfüllt sind.

Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen.

Von M. Zacharias.

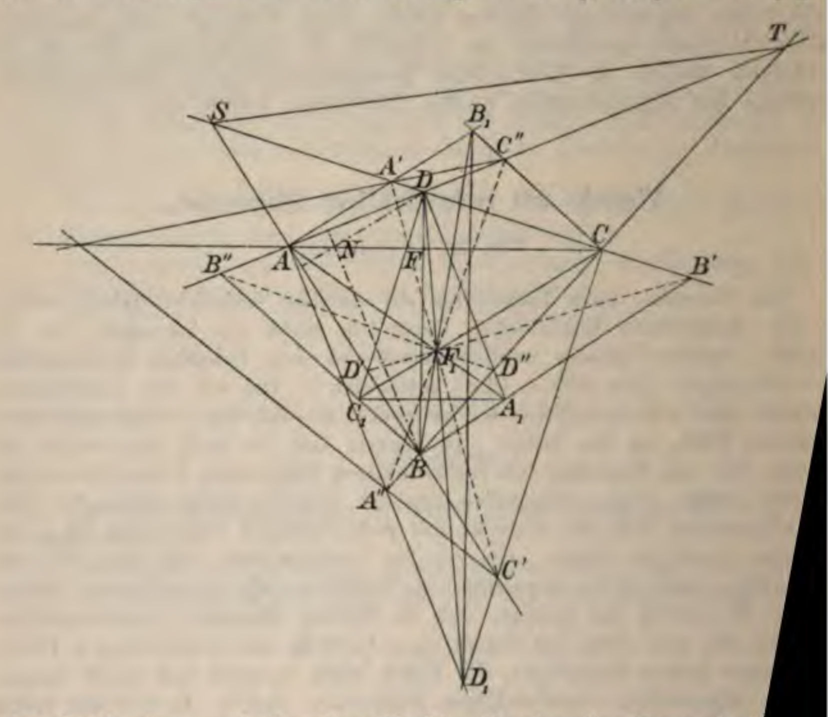
Die Vierecke, deren Diagonalen auf einander senkrecht stehen, werden in der elementaren Euklidischen Geometrie nicht als besondere Art behandelt. Solche Vierecke wurden zuerst von dem indischen Mathematiker Brahmagupta (geb. 598 n. Chr.) betrachtet.[1]) Die von ihm untersuchten Vierecke sind jedoch zugleich Kreisvierecke, so daß wir es hier mit einem speziellen Falle zu tun haben. In neuerer Zeit ist noch eine andere besondere Art von Vierecken mit rechtwinkligen Diagonalen behandelt worden, nämlich solche, deren Diagonalen zugleich dieselbe Länge haben.[2]) Über den allgemeinen Fall der Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen ist in der Literatur wenig zu finden. Sporer hat nachgewiesen, daß diese Vierecke die einzigen sind, deren umgeschriebene Rechtecke alle untereinander ähnlich sind.[3]) Neuberg hat gezeigt, daß die Spitzen ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke, die man über den Seiten eines Vierecks mit rechtwinkligen Diagonalen nach außen konstruiert, die Ecken eines Vierecks mit gleich langen, aber im allgemeinen schiefwinkligen Diagonalen sind.[4]) Er erwähnt ferner die leicht ersichtliche Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Gegenseiten ist. Ich möchte heute Ihre Aufmerksamkeit auf einige andere Eigenschaften dieser Vierecke lenken.

$ABCD$ sei ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in dem Punkte F rechtwinklig schneiden (Fig.). Eine merkwürdige Eigenschaft dieses Vierecks findet man, wenn man in den Ecken auf den Seiten Lote errichtet. Den Schnittpunkt der auf BA in B und auf DA in D errichteten Lote nenne man A_1. Durch zyklische Vertauschung der Buch-

1) Cantor, Geschichte der Mathematik I, 610.
2) Collignon, C. R. de l'Assoc. Franç. 1891. S. a. diese Sitzungsber. III, 74.
3) Arch. d. Math. u. Phys. (2) IV, 323—324.
4) Mathesis (2) IV (1894), 268—271.

staben A, B, C, D ergeben sich entsprechende Definitionen der Punkte B_1, C_1 und D_1. Da ABA_1 und ADA_1 rechte Winkel sind, so ist AA_1 Durchmesser des Umkreises des Dreiecks ABD. Entsprechendes gilt von den Strecken BB_1, CC_1 und DD_1. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABD heiße M_A, derjenige des Dreiecks CBD heiße M_C. BD ist die gemeinsame Sehne der beiden Kreise. Mithin ist $M_AM_C \perp BD$ oder $M_AM_C \parallel AC$. Aus der Proportion $AM_A : M_AA_1 = CM_C : M_CC_1$ folgt daher $A_1C_1 \parallel AC$. Ebenso ergibt sich $B_1D_1 \parallel BD$. Das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ hat also auch rechtwinklige Diagonalen.

Aus dem eben Bewiesenen folgt ferner, daß in den Dreiecken BDA_1 und B_1D_1A je zwei entsprechende Seiten parallel sind. Die beiden Dreiecke sind also ähnlich und ähnlich liegend. BB_1, DD_1 und AA_1 gehen



also durch einen und denselben Punkt. Da dasselbe für je drei der Linien AA_1, BB_1, CC_1 und DD_1 bewiesen werden kann, *so schneiden sich alle vier in einem Punkte.* Dieser merkwürdige Punkt des Vierecks heiße F_1. Wenn man in einem Dreieck von einer Ecke aus die Höhe und den Umkreisdurchmesser zieht, so liegen diese bekanntlich symmetrisch in bezug auf die entsprechende Winkelhalbierende. Da nun AF Höhe des Dreiecks ABD und AA_1 der Durchmesser des Umkreises ist, so liegt AA_1 oder AF_1 symmetrisch zu der Diagonale AC in bezug auf die Halbierungslinie des Winkels BAD. Wir wollen deshalb AF_1 die *Winkelgegengerade* von AF nennen. Dann können wir den Satz aussprechen:

I. *Stehen die beiden Diagonalen eines Vierecks auf einander senkrecht, so schneiden sich ihre vier Winkelgegengeraden in einem Punkte.*

Durch den Punkt F_1 gehen noch andere bemerkenswerte

bezeichne den Schnittpunkt der Gegenseiten AB und CD mit S, denjenigen von BC und DA mit T. Dann sind SF, BF und CF drei durch einen Punkt gehende Ecktransversalen des Dreiecks SBC. Nach einem bekannten Satze der Dreiecksgeometrie[1]) gehen die drei Winkelgegengeraden dieser Transversalen wieder durch einen Punkt, den *Winkelgegenpunkt* von F. Die Winkelgegengeraden von BF und CF sind aber BF_1 und CF_1. *Die in S und T konstruierten Winkelgegengeraden von SF und TF gehen also auch durch den Punkt F_1.*

Dieser Umstand führt zu einer einfachen Deutung des Punktes F_1. F und F_1 sind Winkelgegenpunkte der Dreiecke SBC und TAB. Dann sind aber F und F_1 nach einem bekannten Satze[2]) die beiden Brennpunkte zweier Kegelschnitte, von denen der eine dem Dreieck SBC, der andere dem Dreieck TAB eingeschrieben ist. Diese beiden Kegelschnitte haben außer den gemeinsamen Brennpunkten F und F_1 noch zwei gemeinsame Tangenten, nämlich AB und BC. Ein Kegelschnitt ist aber schon durch die beiden Brennpunkte und eine Tangente eindeutig bestimmt. Also sind die beiden Kegelschnitte identisch. Demnach ist F_1 der zweite Brennpunkt eines dem Viereck $ABCD$ eingeschriebenen Kegelschnitts, der den Diagonalenschnittpunkt zum Brennpunkte hat. Der Inhalt des Satzes I läßt sich also auch in folgender Form aussprechen:

II. *Stehen die beiden Diagonalen eines Vierecks auf einander senkrecht, so läßt sich in das Viereck ein Kegelschnitt beschreiben, der den Schnittpunkt der Diagonalen zum Brennpunkte hat.*

Die einem Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte bilden eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, die als Kegelschnittschar bezeichnet wird. In der Lehre von den Kegelschnittscharen wird bewiesen, daß das aus den Geraden AC, BD und ST gebildete Dreiseit für jeden Kegelschnitt der Schar ein Poldreiseit ist, und daß die Mittelpunkte aller Kegelschnitte der Schar auf der geraden Linie liegen, welche die Mitten der Diagonalen des Vierecks verbindet.[3]) Aus der ersten Eigenschaft folgt, daß für den Kegelschnitt mit dem Brennpunkte F die Gerade ST die Polare des Brennpunktes, d. h. die Leitlinie, mithin das von F auf ST gefällte Lot die Achse ist. Ferner ist nach der zweiten Eigenschaft der Mittelpunkt M dieses Kegelschnittes der Schnittpunkt des eben genannnten Lotes mit der Verbindungslinie der Diagonalenmitten. Der Punkt F_1 ergibt sich sodann sehr einfach, indem man FM über M hinaus um sich selbst verlängert.

Es fragt sich, ob die im wesentlichen gleichbedeutenden Sätze I und II umkehrbar sind. Zunächst ist aus dem Vorhergehenden ersichtlich, daß, wenn die vier Gegengeraden der Diagonalen eines Vierecks durch einen Punkt gehen, ein dem Viereck eingeschriebener Kegelschnitt mit dem Brennpunkt F existiert. Da die Geraden AC, BD und ST ein Poldreiseit dieses Kegelschnitts bilden, so sind AC und BD konjugierte Strahlen des zu F gehörigen Strahlsystems. Nun ist aber bekanntlich das zu einem Brennpunkte gehörige Strahlsystem stets zirkular, d. h. je zwei konjugierte Strahlen stehen auf einander senkrecht.[4]) Mithin ist notwendig $AC \perp BD$. Also gilt die Umkehrung:

---

1) Steiner, Gesammelte Werke I, 193.
2) Steiner, a. a. O. I, 194.
3) Schröter, Die Theorie der Kegelschnitte 147, 276.
4) Schröter, a. a. O. 190.

IIa. *Schneiden sich die vier Winkelgegengeraden eines Vierecks in einem Punkte oder, was dasselbe ist, läßt sich in ein Viereck ein Kegelschnitt beschreiben, der den Schnittpunkt der Diagonalen zu einem Brennpunkte hat, so stehen die Diagonalen des Vierecks auf einander senkrecht.*

Bekanntlich liegt bei jedem Kegelschnitt der Fußpunkt des von einem Brennpunkte auf eine Tangente gefällten Lotes auf dem Scheitelkreise. Daraus folgt:

III. *Stehen in einem Viereck die Diagonalen auf einander senkrecht, so liegen die Fußpunkte der von dem Diagonalenschnittpunkte auf die Seiten gefällten Lote auf einem Kreise.*

IIIa. *Liegen die Fußpunkte der von dem Diagonalenschnittpunkte eines Vierecks auf die Seiten gefällten Lote auf einem Kreise, so stehen die Diagonalen des Vierecks auf einander senkrecht.*

Zum Schluß will ich noch vier bemerkenswerte gerade Linien angeben, die durch den Punkt F_1 gehen. Wenn man in einem beliebigen Viereck $ABCD$ in A und B auf AB und in C und D auf CD Lote errichtet, so bilden die Punkte A' und B', in denen die beiden ersten Lote die Gerade CD schneiden, und die Punkte C' und D', in denen die beiden letzten Lote die Gerade AB schneiden, ein Viereck $A'B'C'D'$, das dem gegebenen Viereck ähnlich ist. Den Beweis für diese Behauptung will ich seiner Einfachheit wegen übergehen. Errichtet man auf BC in B und C und auf DA in D und A Lote, so bilden die Schnittpunkte der beiden ersten Lote mit DA und der beiden letzten Lote mit BC, die Punkte B'', C'', D'' und A'', auch ein dem gegebenen Viereck ähnliches Viereck $A''B''C''D''$. Ist nun $ABCD$ ein Viereck mit rechtwinkligen Diagonalen, so haben die beiden ähnlichen Vierecke dieselbe Eigenschaft.

Da AF eine Höhe des Dreiecks ABD ist, so schneiden sich die beiden Lote von B auf AD und von D auf AB in einem Punkte N der Diagonale AC. Da nun $AA' \parallel ND$ und $AA'' \parallel NB$ ist, und da sich ferner $A'D$, AN und $A''B$ in einem Punkte schneiden, so ist $\triangle AA'A'' \sim \triangle NDB$, folglich $A'A'' \parallel DB$; ebenso beweist man, daß $C'C'' \parallel DB$ ist. Die beiden Dreiecke $A'C''D$ und $A''C'B$ liegen demnach perspektivisch in bezug auf den unendlich fernen Punkt von DB. Die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Seiten müssen daher in einer geraden Linie liegen, d. h. der Schnittpunkt von $A'C''$ und $A''C'$ liegt auf AC. Die beiden Dreiecke $A'C''B_1$ und $C'A''B$ sind demnach ebenfalls perspektivisch in bezug auf die Gerade AC. Die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Ecken müssen also durch einen Punkt gehen, d. h. $A'C'$, $A''C''$ und BB_1 treffen sich in einem Punkte. Dasselbe läßt sich von $A'C'$, $A''C''$ und DD_1 beweisen. $A'C'$ und $A''C''$ gehen also durch den Schnittpunkt von BB_1 und DD_1, d. h. durch F_1. Ebenso ergibt sich, daß $B'D'$ und $B''D''$ durch F_1 gehen. *Der Punkt F_1 ist also der gemeinsame Diagonalenschnittpunkt der beiden ähnlichen Vierecke $A'B'C'D'$ und $A''B''C''D''$.*

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

34. Sitzung am 26. April 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 30 Herren.

Herr Holtze: Vorzeigen eines Integraphen, System Abdank-Abakanowicz, Modell Coradi 1904.

Herr Skutsch: Anwendungen der Massenreduktionen nach Reye und nach Poinsot (s. u.).

Über die günstigste Form des Gitterträgers, ein Beitrag zur Theorie des Fachwerks.

Von E. Sándor.

1. *Einleitung.* — Die Praxis hat schon längst nachgewiesen, daß der Materialaufwand der Tragwerke von der Form des Fachwerkes sehr abhängt. Es ist uns jedoch noch nicht gelungen, durch theoretische Untersuchungen auf die günstigste Form zu kommen. Die diesbezüglichen Schwierigkeiten sind sehr groß, zumal nicht nur die Zahl der theoretischen, sondern auch die der praktischen Variabeln sehr groß ist. Außerdem sind einzelne Fragen, wie z. B. Wahl der Querschnitte, beschränkte Anzahl der Profile, also Ausnutzung des Materials, und damit die Spannungsverhältnisse teilweise willkürlich, vom Konstrukteur abhängig; lauter Fragen, die in die Rechnung nicht mit hineingezogen werden können.

Alle Untersuchungen dieser Art können demnach nur mehr oder weniger angenäherte sein.

Mit der folgenden Arbeit lege ich eine allgemeine Theorie vor; erlaube mir aber noch zu bemerken, daß ich bis jetzt die Frage nur teilweise, nämlich für einen einzigen Belastungszustand gelöst habe, also z. B. für ständige Belastung. Dagegen ist die Methode ganz allgemein, also auch für statisch unbestimmte Systeme geeignet.

Die Aufgabe, die ich mir gestellt habe, lautet:

Es ist die Spannweite eines gegliederten Tragwerkes gegeben. Man soll für einen gegebenen Belastungszustand die Form des Fachwerkes so bestimmen, daß der Materialaufwand womöglich ein Minimum werde.

2. *Die Methode der Lösung.* — Das Prinzip der Lösung beruht auf der Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, welches besagt,

daß die Arbeit der äußeren Kräfte $\Sigma P\delta$ gleich der der inneren Kräfte $\Sigma S_i \Delta s_i$ sein muß. Da

$$\triangle s_i = \frac{S_i s_i}{E_i F_i},$$

wo s_i = Stablänge, F_i = Querschnitt, E_i = Elastizitätsmodul des Stabes i und die Beanspruchung $\sigma_i = \frac{S_i}{F_i}$, so ist

$$(1) \qquad \Sigma P\delta = \sum \frac{S_i^2 s_i}{E_i F_i} = \sum \frac{\sigma_i^2}{E_i} F_i s_i.$$

$F_i s_i$ ist der Kubikinhalt des Stabes i (K_i) und E_i bleibt, im Falle daß das Fachwerk aus homogenem Material besteht, konstant $= E$; dann ist

$$\Sigma P\delta = \frac{1}{E} \Sigma \sigma_i^2 K_i.$$

σ_i ist, wie schon erwähnt, von vielen Umständen, und zwar, abgesehen vom Konstrukteur, hauptsächlich von den vorhandenen Profilen abhängig. Wir können immer einen Mittelwert σ finden, so daß

$$(2) \qquad \Sigma \sigma_i^2 K_i = \sigma^2 \Sigma K_i, \quad \text{und}$$

$$(3) \qquad \sigma^2 = \frac{\Sigma \sigma_i^2 K_i}{\Sigma K_i}.$$

Die Bedeutung von σ^2 ist sehr einfach. Wenn wir die K_i als parallele Kräfte ansehen, welche von einem willkürlich gewählten Punkte O die Entfernungen σ_i^2 besitzen, dann ist σ^2 die Entfernung der Mittelkraft ΣK_i vom Punkte O. Da nun σ_i innerhalb gewisser Grenzen als willkürliche Zahl angesehen werden kann, so kann auch σ, wenn sich K_i um $\triangle K_i$ ändert, innerhalb dieser Grenzen, den praktischen Anforderungen genügend konstant angenommen werden, und da $\Sigma K_i = K$, der Kubikinhalt des Tragwerkes, so ist

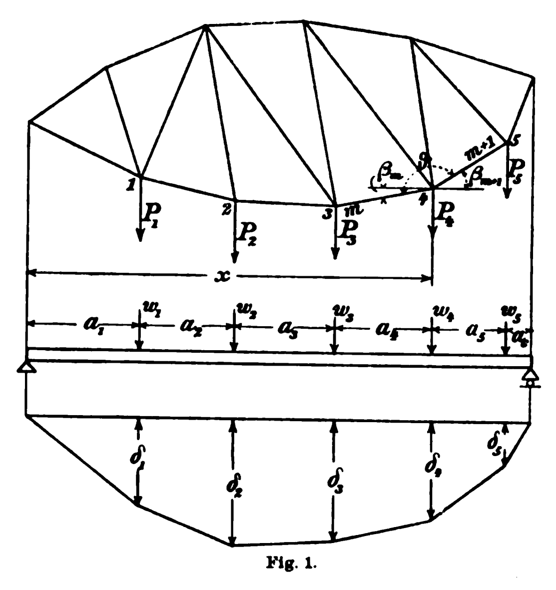


Fig. 1.

$$(4) \qquad \Sigma P\delta = \frac{\sigma^2}{E} K,$$

wobei, mit Rücksicht auf das Vorhergesagte, nur P, δ und K als Variable angesehen werden können.

Soll K ein Minimum werden, so *muß $\Sigma P\delta$ ein Minimumwerden*. Es herrscht aber zwischen $\Sigma P\delta$ und der Form des Gitterträgers ein sehr enger Zusammenhang.

α) Handelt es sich um *gleichförmig* verteilte Belastung, dann ist P

direkt proportional dem horizontalen Abstand der Knotenpunkte des belasteten Gurtes.

β) Die Durchbiegung der einzelnen Knotenpunkte (δ) des untersuchten Gurtes ist auch hauptsächlich von der Form des Trägers abhängig.

Führen wir die von Müller-Breslau eingeführten elastischen Gewichte (w) ein (die in den einzelnen Knotenpunkten angreifen), so sind bekanntlich die Werte δ die von den w-Lasten erzeugten Momente des einfachen Balkens an den einzelnen Knotenpunkten. (Fig. 1.)

Es seien die horizontalen Abstände der Knotenpunkte des belasteten Gurtes (z. B. Untergurtes) $a_1, a_2, a_3, \ldots$ usw., g sei die Belastung pro m, dann ist nach α)

$$(5)\quad P_1 = (a_1 + a_2)\frac{g}{2}; \qquad P_2 = (a_2 + a_3)\frac{g}{2}; \qquad P_3 = (a_3 + a_4)\frac{g}{2} \text{ usw.};$$

so daß

$$(6)\quad \Sigma P\delta = P_1\delta_1 + P_2\delta_2 + P_3\delta_3 + \cdots = g\left[\frac{a_1 + a_2}{2}\delta_1 + \frac{a_2 + a_3}{2}\delta_2 + \frac{a_3 + a_4}{2}\delta_3 + \cdots\right] =$$

$$= g\left[\frac{a_1\,\delta_1}{2} + a_2\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + a_3\frac{\delta_2 + \delta_3}{2} + \cdots\right] =$$

$$= gF,$$

wo F der Flächeninhalt der in Fig. 1 gezeichneten Momentenfläche ist.

Um daher die günstigste Form des Trägers zu erhalten, brauchen wir nur F auf ein Minimum zu bringen (bei konst. g).

Um der Aufgabe näher treten zu können, betrachten wir zunächst die w-Werte. (Es ist selbstverständlich, daß wir, praktischer Rücksichten wegen, den Abstand der Knotenpunkte des belasteten Gurtes konstant machen.)

Betrachten wir einen Gitterträger. Es mögen die Lasten an den Knotenpunkten des Untergurtes angreifen. Handelt es sich dann um die Durchbiegung des Untergurtes, so ist nach Müller-Breslau für den m-ten Knotenpunkt, welcher die Entfernung x vom linken Auflager besitzt (siehe Fig. 1),

$$(7)\qquad w_m = \sigma_m \operatorname{tg}\beta_m - \sigma_{m+1}\operatorname{tg}\beta_{m+1} - \triangle\,\vartheta,$$

wobei $\left.\begin{matrix}\beta_m\\ \beta_{m+1}\end{matrix}\right\}$ die Neigungswinkel des $\left.\begin{matrix}m\text{-ten}\\ m+1\text{-ten}\end{matrix}\right\}$ Untergurtstabes gegen die Horizontale, $\left.\begin{matrix}\sigma_m\\ \sigma_{m+1}\end{matrix}\right\}$ die Beanspruchungen des $\left.\begin{matrix}m\text{-ten}\\ m+1\text{-ten}\end{matrix}\right\}$ Untergurtstabes sind, und $\triangle\,\vartheta$ die Änderung des von dem m-ten und $m+1$-ten Untergurtstabe gebildeten Winkels ϑ ist.

Die für die Praxis besonders wichtigen Fälle sind diejenigen, bei welchen der belastete Gurt

α) horizontal ist (z. B. bei Brücken),

β) geradlinig ist (bei Dächern).

Für α) ist dann

$$(8)\qquad w_m = -\triangle\,\vartheta,$$

und für β), wenn $\sigma_m = \sigma_{m+1}$, auch

$$(9)\qquad w_m = -\triangle\,\vartheta.$$

$\triangle\vartheta$ ist bekanntlich eine lineare Funktion der Kotangenten der dem m-ten Knotenpunkt benachbarten Dreieckswinkel und der σ-Werte der diese Dreiecke einschließenden Stäbe. Ganz allgemein kann man w_m bei einer gesetzmäßigen Gliederung des Tragwerkes als eine Funktion der die Form des Tragwerkes charakterisierenden Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und des Abstandes des m-ten Knotenpunktes vom linken Auflager x ausdrücken, so daß

$$w_m = f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots; x). \tag{10}$$

Zur leichteren Darstellung der Momentenfläche dieser Einzellasten werden wir eine derartige kontinuierliche Belastung über die ganze Öffnung des

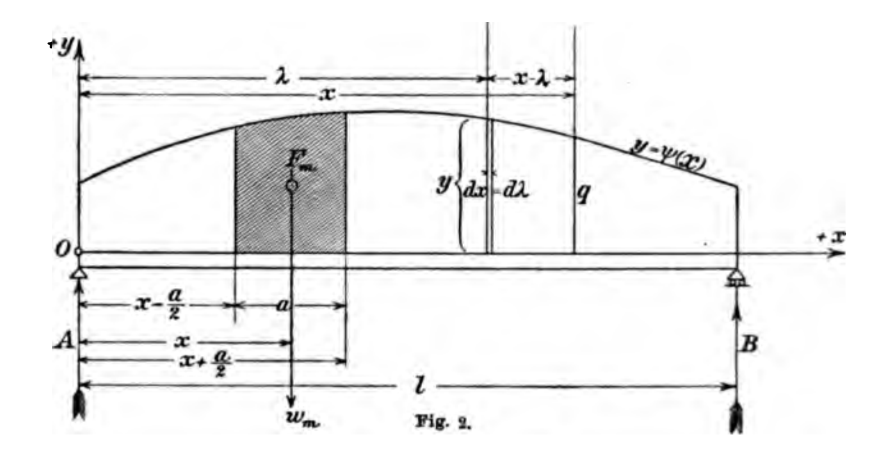


Fig. 2.

Trägers legen, welche dieselbe Momentenfläche hervorruft wie die w-Lasten. Diese Belastungsfläche muß so beschaffen sein, daß der in Fig. 2 gezeichnete Flächenteil F_m von $x - \frac{a}{2}$ bis $x + \frac{a}{2}$ gleich dem w_m-Werte sei.

$y = \psi(x)$ sei das Gesetz, welches die Belastungskurve befolgt. Es ist dann nach dem Satz von **Rolle**:

$$\frac{\psi\left(x+\frac{a}{2}\right) - \psi\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\left(x+\frac{a}{2}\right) - \left(x-\frac{a}{2}\right)} = \left(\frac{d\,\psi(x)}{dx}\right)_{x=\xi}, \tag{11}$$

wo

$$x - \frac{a}{2} < \xi < x + \frac{a}{2},$$

$$\psi\left(x+\frac{a}{2}\right) - \psi\left(x-\frac{a}{2}\right) = a\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=\xi}. \tag{12}$$

Es ist aber ferner

$$\int\limits_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} \psi(x)\,dx = w_m, \tag{13}$$

oder

(14) $$\psi\left(x+\frac{a}{2}\right)-\psi\left(x-\frac{a}{2}\right)=a\frac{d w_m}{d x}.$$

Betrachten wir Gleichung (12), so folgt $\frac{d w_m}{d x} = a\left(\frac{d\psi(x)}{dx}\right)_{x=\xi}$ und daraus, wenn man ξ angenähert x gleichsetzt,

(15) $$w_m + C = a\psi(x).$$

Wenn aber $w_m = 0$, so ist auch $\psi(x) = 0$, und daraus folgt, daß $w_m = a\psi(x)$, oder

(16) $$y=\psi(x)=\frac{w_m}{a},$$

die Gleichung der Belastungskurve.

Diese Belastung wirke auf einen einfachen statisch bestimmten Balken, der die Stützweite l besitze (Fig. 2).

a) Die Querkraft für einen beliebigen Querschnitt q, der den Abstand x von der linken Auflager-Reaktion A besitzt, ist

(17) $$Q(x)=A-\int_0^x y\,dx.$$

b) Das statische Moment für denselben Querschnitt

(18) $$M(x)=A\cdot x-\int_0^x y(x-\lambda)\,d\lambda.$$

c) Der von den Momentenordinaten gebildete Flächeninhalt

(19) $$F_1=\int_0^l M(x)\,dx=\int_0^l\left[A\cdot x-\int_0^x y(x-\lambda)\,d\lambda\right]dx.$$

Es ist aber bei symmetrischer Belastung $A=\int_0^l\frac{y\,dx}{2}$ und $y=\frac{w_m}{a}$, demzufolge

(20) $$F_1=\frac{l^2}{4}\int_0^l\frac{w_m}{a}\,dx-\int_0^l dx\int_0^x w_m(x-\lambda)\,d\lambda,$$

wobei $x=\lambda$ in w_m zu setzen ist.

Nun erhalten wir aus denjenigen Werten der Variabeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, welche F_1 zu einem Minimum machen, die günstigste Form des gesuchten Trägers.

Bemerkung: Wenn wir gleichzeitig noch die Bedingungsgleichungen

(21) $$\varphi_1(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=0,\quad \varphi_2(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=0,\ \ldots\ \varphi_n(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=0$$

erfüllen, so bilden wir bekanntlich, um F_1 zu einem Minimum zu machen, die Funktion

(22) $$\Omega=F_1+\nu_1\varphi_1+\nu_2\varphi_2+\cdots+\nu_n\varphi_n,$$

$$\ldots_1 = \operatorname{cotg} \alpha_2 = \frac{h}{a},$$

$$\ldots = \frac{a}{h},$$

$$\ldots - \sigma_5)\frac{h}{a} + (\sigma_6 - \sigma_9)\frac{a}{h}.$$

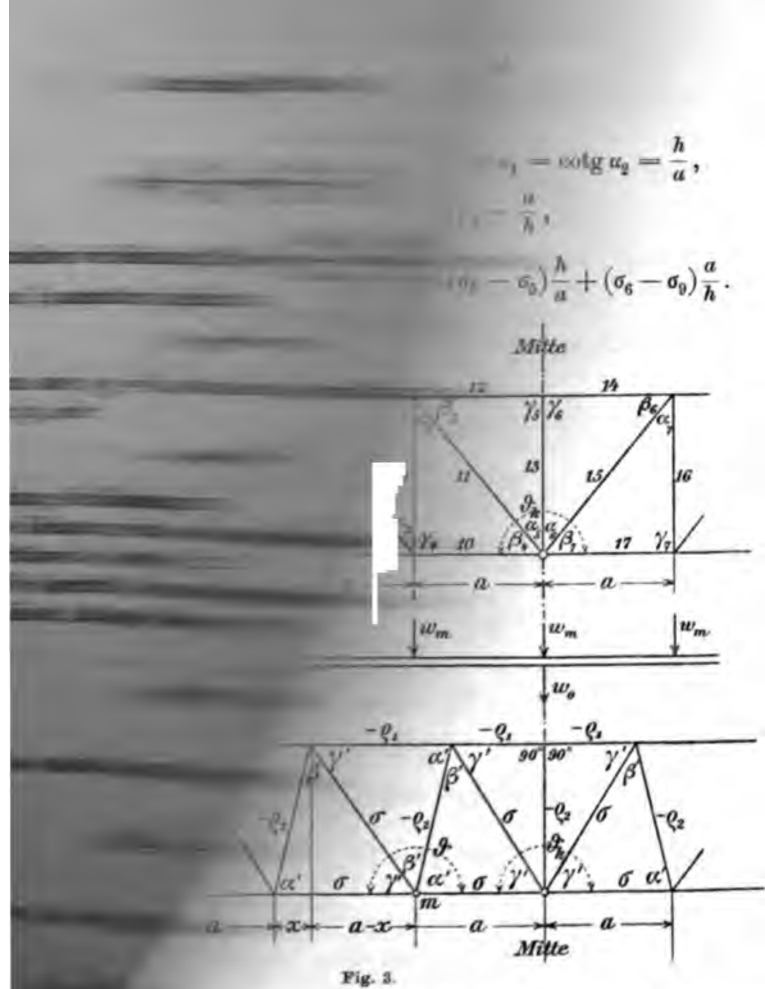


Fig. 3.

...ß alle gezogenen Stäbe (2, 3, 6, 9) dieselbe Spannung σ, ...ergurtstäbe (4, 7) dieselbe Spannung $-\varrho_1$ und die ge... (1, 5) dieselbe Spannung $-\varrho_2$ besitzen. Dann ist:

$$\ldots_6 = \sigma_9 = \sigma, \qquad \sigma_1 = \sigma_5 = -\varrho_2, \qquad \sigma_4 = \sigma_7 = -\varrho_1,$$

$$E \triangle \vartheta = -(\sigma + \varrho_1)\frac{a}{h}$$

$$w_m = -\triangle \vartheta = \frac{\varrho_1 + \sigma}{E}\frac{a}{h}.$$

...konstant; dann ist w_m auch konstant. Eine Ausnahme bildet w ...te, wo

$$\begin{aligned} E \triangle \vartheta_k = & (\sigma_8 - \sigma_{11}) \operatorname{cotg} \alpha_4 + (\sigma_8 - \sigma_{10}) \operatorname{cotg} \gamma_4 \\ & + (\sigma_{12} - \sigma_{11}) \operatorname{cotg} \beta_5 + (\sigma_{12} - \sigma_{13}) \operatorname{cotg} \gamma_5 \\ & + (\sigma_{14} - \sigma_{13}) \operatorname{cotg} \gamma_6 + (\sigma_{14} - \sigma_{15}) \operatorname{cotg} \beta_6 \\ & + (\sigma_{16} - \sigma_{15}) \operatorname{cotg} \alpha_7 + (\sigma_{16} - \sigma_{17}) \operatorname{cotg} \gamma_7 . \end{aligned}$$

deren erste partielle Ableitungen

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} = \cdots = 0 \tag{23}$$

gesetzt, uns mit den gegebenen Bedingungsgleichungen diejenigen Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ geben, die F_1 zu einem Minimum machen, falls auch die Bedingung erfüllt ist, daß

$$d^2\Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha^2} d\alpha^2 + \cdots + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \alpha \partial \beta} d\alpha d\beta + \cdots \tag{24}$$

beständig positiv ist.

Wenn in die Mitte des Tragwerkes ein Knotenpunkt des belasteten Gurtes fällt, also infolge der symmetrischen Anordnung des Tragwerkes, so tritt in der Mitte ein w_k ein, welches nicht das Gesetz aller anderen w_m befolgt. In diesem Falle ist

$$w_k = w_0 + w_k(x) \tag{25}$$

zu setzen, wobei $w_k(x)$ dem Gesetze aller anderen w-Werte folgt, so daß die Kurve $y = \psi(x)$ bestimmt werden kann. Es wird dann eine Einzellast w_0 in der Mitte auftreten, deren Moment in bezug auf die Mitte

$$M_0 = \frac{w_0}{2} \frac{l}{2} \tag{26}$$

und deren Momentenfläche

$$F_2 = \frac{l}{2} \frac{l}{2} \cdot \frac{w_0}{2} = \frac{w_0 l^2}{8}. \tag{27}$$

Die endgültige Momentenfläche ist dann

$$F = F_1 + F_2, \tag{28}$$

welche wir zu einem Minimum machen.

(Absolutes Minimum, das in Wirklichkeit niemals auftreten kann, wäre es, wenn

$$\alpha)\ F_1 = F_2 = 0, \qquad \beta)\ F_1 = -F_2.) \tag{29}$$

3. *Anwendungen. — Beispiel 1. Es soll die günstigste Höhe h und der günstigste Knotenpunktabstand a des in Fig. 3 gezeichneten Parallelträgers ermittelt werden.*

Gegeben: die gleichmäßig verteilte Last pro m.: g; Spannweite: l. Untergurt sei belastet.

Da der Untergurt horizontal ist, folgt

$$w_m = -\triangle \vartheta. \tag{30}$$

Treten nun in den Stäben 1, 2, 3, ... die Spannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ auf, so ist (wenn E der Elastizitätsmodul des Materials ist) nach Müller-Breslau

$$\begin{cases} E \triangle \vartheta = (\sigma_1 - \sigma_2) \operatorname{cotg} \alpha + (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{cotg} \gamma + \\ \qquad + (\sigma_4 - \sigma_2) \operatorname{cotg} \beta_1 + (\sigma_4 - \sigma_5) \operatorname{cotg} \gamma_1 + \\ \qquad + (\sigma_6 - \sigma_5) \operatorname{cotg} \alpha_2 + (\sigma_6 - \sigma_9) \operatorname{cotg} \beta_2. \end{cases} \tag{31}$$

Da nun aber

$$\operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\gamma_1 = 0, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha_1 = \operatorname{cotg}\alpha_2 = \frac{h}{a},$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg}\beta_1 = \operatorname{cotg}\beta_2 - \frac{a}{h},$$

so folgt:

$$(32)\quad E\,\triangle\,\vartheta = (\sigma_1 - \sigma_2)\frac{h}{a} + (\sigma_4 - \sigma_2)\frac{a}{h} + (\sigma_6 - \sigma_5)\frac{h}{a} + (\sigma_6 - \sigma_9)\frac{a}{h}.$$

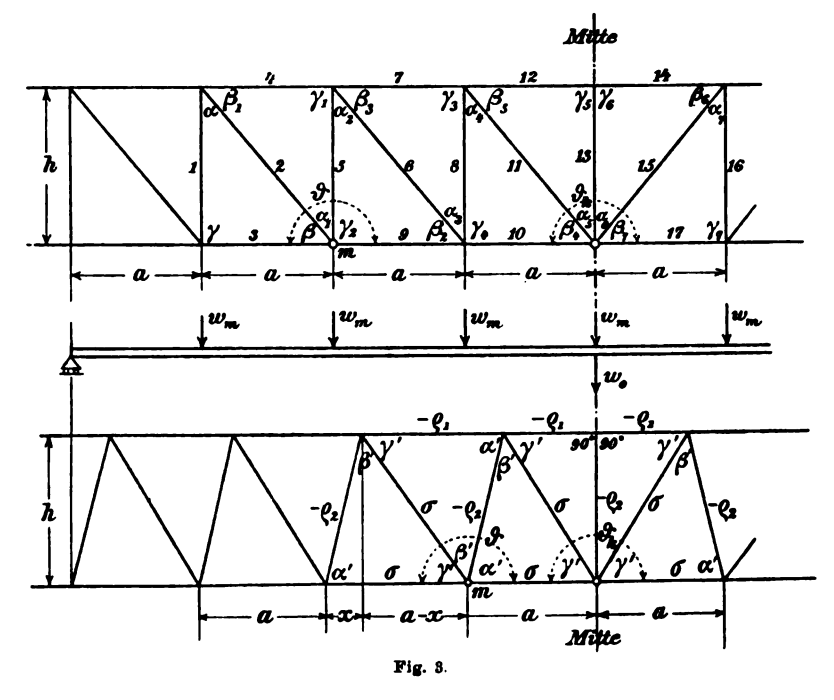


Fig. 8.

Nehmen wir an, daß alle gezogenen Stäbe (2, 3, 6, 9) dieselbe Spannung σ, die gedrückten Obergurtstäbe (4, 7) dieselbe Spannung $-\varrho_1$ und die gedrückten Vertikalen (1, 5) dieselbe Spannung $-\varrho_2$ besitzen. Dann ist:

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_6 = \sigma_9 = \sigma, \qquad \sigma_1 = \sigma_5 = -\varrho_2, \qquad \sigma_4 = \sigma_7 = -\varrho_1,$$

und

$$(33)\qquad E\,\triangle\,\vartheta = -(\sigma + \varrho_1)\frac{a}{h}$$

und

$$(34)\qquad w_m = -\triangle\,\vartheta = \frac{\varrho_1 + \sigma}{E}\,\frac{a}{h}.$$

Es sei ϱ_1 konstant; dann ist w_m auch konstant. Eine Ausnahme bildet w in der Mitte, wo

$$(35)\qquad \begin{cases} E\,\triangle\,\vartheta_k = (\sigma_8 - \sigma_{11})\operatorname{cotg}\alpha_4 + (\sigma_8 - \sigma_{10})\operatorname{cotg}\gamma_4 \\ \qquad + (\sigma_{12} - \sigma_{11})\operatorname{cotg}\beta_5 + (\sigma_{12} - \sigma_{13})\operatorname{cotg}\gamma_5 \\ \qquad + (\sigma_{14} - \sigma_{13})\operatorname{cotg}\gamma_6 + (\sigma_{14} - \sigma_{15})\operatorname{cotg}\beta_6 \\ \qquad + (\sigma_{16} - \sigma_{15})\operatorname{cotg}\alpha_7 + (\sigma_{16} - \sigma_{17})\operatorname{cotg}\gamma_7. \end{cases}$$

Da nun

$$(36)\quad \begin{cases} \operatorname{cotg}\alpha_4 = \operatorname{cotg}\alpha_7 = \dfrac{h}{a}, \qquad \operatorname{cotg}\beta_5 = \operatorname{cotg}\beta_6 = \dfrac{a}{h}, \\ \operatorname{cotg}\gamma_4 = \operatorname{cotg}\gamma_6 = \operatorname{cotg}\gamma_5 = \operatorname{cotg}\gamma_7 = 0; \\ \sigma_{10} = \sigma_{17} = \sigma_{11} = \sigma_{15} = \sigma, \quad \sigma_8 = \sigma_{13} = \sigma_{16} = -\varrho_2, \quad \sigma_{12} = \sigma_{14} = -\varrho_1, \end{cases}$$

so folgt

$$(37)\quad \begin{cases} E \triangle \vartheta_k = -2(\varrho_2 + \sigma)\dfrac{h}{a} - 2(\varrho_1 + \sigma)\dfrac{a}{h}, \\ w_k = -\triangle \vartheta_k = \dfrac{2}{E}\left[(\varrho_2 + \sigma)\dfrac{h}{a} + (\varrho_1 + \sigma)\dfrac{a}{h}\right] \\ \quad = \dfrac{\varrho_1 + \sigma}{E}\dfrac{a}{h} + \dfrac{(\varrho_1 + \sigma)\dfrac{a}{h} + 2(\varrho_2 + \sigma)\dfrac{h}{a}}{E}. \end{cases}$$

Es ist also $w_k = w_m + w_0$, wobei

$$(38)\quad w_0 = \frac{1}{E}\left[(\varrho_1 + \sigma)\frac{a}{h} + 2(\varrho_2 + \sigma)\frac{h}{a}\right].$$

Demnach ist unser statisch bestimmter Balken durch die Einzellasten w_m gleichmäßig belastet (siehe Fig. 3) und zwar mit der konstanten Belastung $p = \frac{w_m}{a}$ pro m. Die Momentenfläche (Durchbiegungsfläche) derselben ist eine Parabel mit der Pfeilhöhe $\frac{1}{8}pl^2 = \frac{1}{8}\frac{w_m}{a}l^2$ und dem Flächeninhalte

$$(39)\quad F_1 = \tfrac{1}{8}pl^2 \cdot \tfrac{2}{3}l = \tfrac{2}{3}l \cdot \tfrac{1}{8}\frac{w_m}{a}l^2 = \frac{l^3}{12}\frac{w_m}{a}.$$

Außerdem ist unser Balken in der Mitte durch die Einzellast w_0 belastet, deren Maximalmoment $= \frac{w_0}{2}\frac{l}{2}$, und deren Momentenfläche

$$(40)\quad F_2 = \frac{w_0}{2}\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}w_0.$$

Es wird daher die ganze Biegungsfläche

$$(41)\quad \begin{cases} F = F_1 + F_2 = \tfrac{1}{4}l^2\left[\tfrac{1}{3}\dfrac{l}{a}w_m + \dfrac{w_0}{2}\right] \\ \quad = \tfrac{1}{4}l^2\left[\tfrac{1}{3}\dfrac{l}{a}\cdot\dfrac{\varrho_1 + \sigma}{E}\dfrac{a}{h} + \tfrac{1}{2}\dfrac{1}{E}\left\{(\varrho_1 + \sigma)\dfrac{a}{h} + 2(\varrho_2 + \sigma)\dfrac{h}{a}\right\}\right]. \end{cases}$$

Ist die Felderzahl $= n$, so ist $a = \frac{l}{n}$ und

$$(42)\quad F = \tfrac{1}{4}l^2\frac{1}{E}\left[\tfrac{1}{3}\frac{l}{h}(\varrho_1 + \sigma) + \frac{l}{2hn}(\varrho_1 + \sigma) + \frac{(\varrho_2 + \sigma)}{l}hn\right].$$

Es tritt für die Variabeln h und n ein Minimum ein, wenn

$$(43)\quad \frac{\partial F}{\partial h} = \tfrac{1}{4}l^2\frac{1}{E}\left[-\frac{\tfrac{1}{3}l(\varrho_1 + \sigma) + \dfrac{\varrho_1 + \sigma}{2n}l}{h^2} + (\varrho_2 + \sigma)\frac{n}{l}\right] = 0$$

und

$$(44)\qquad \frac{\partial F}{\partial n} = \tfrac{1}{4} l^2 \frac{1}{E}\left[-\frac{\frac{(\varrho_1+\sigma)\,l}{2h}}{n^2} + \frac{(\varrho_2+\sigma)\,h}{l}\right] = 0.$$

Aus Gleichung (44) folgt

$$(45)\qquad n = \frac{l}{h}\sqrt{\frac{\varrho_1+\sigma}{2(\varrho_2+\sigma)}};$$

ist $\varrho_1 = \varrho_2$, dann ist

$$(46)\qquad n = \frac{l}{h}\sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad n = 0{,}7\,\frac{l}{h} = 0{,}7\,\frac{1}{\left(\frac{h}{l}\right)}.$$

Aus Gleichung (43) folgt:

$$(47)\qquad \frac{h}{l} = \sqrt{\frac{(\varrho_1+\sigma)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{n}}{\varrho_2+\sigma}}.$$

Ist $\varrho_1 = \varrho_2$, dann ist

$$(48)\qquad \frac{h}{l} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\tfrac{1}{3}+\frac{1}{2n}\right)}.$$

Aus Gleichung (45) erhält man $\sqrt{\frac{\varrho_1+\sigma}{\varrho_2+\sigma}} = n\frac{h}{l}\sqrt{2}$. Dies in Gleichung (47) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{h}{l} = \sqrt{n^2\cdot 2\left(\frac{h}{l}\right)^2\frac{1}{n}\left(\tfrac{1}{3}+\frac{1}{2n}\right)} \text{ und daraus } 1 = 2n\left(\tfrac{1}{3}+\frac{1}{2n}\right) \text{ und } n = 0.$$

Dieses Resultat müssen wir für die Praxis umwandeln. *Wir sagen einfach: es ist zweckmäßig n so klein wie möglich anzunehmen. Es gilt dann für h die Gleichung (47) oder (48).*

Bemerkung: Daß für die Variabeln h und n die Funktion F an der Stelle $\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial n} = 0$ wirklich ein Minimum wird, das zeigen α) die zweiten partiellen Ableitungen von F nach h und n; β) die daraus gebildete Hessesche Determinante. Nämlich, da $|\varrho_1| < |\sigma|$ und $|\varrho_2| < |\sigma|$, so ist für jeden positiven Wert von h und n

$$(49)\qquad \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial h^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial h\,\partial n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial h\,\partial n} & \frac{\partial^2 F}{\partial n^2} \end{vmatrix} > 0. \right.$$

Ist 2 der kleinste Wert von n, so ist nach Gleichung (48) $\frac{h}{l} = 0{,}54$ der größte Wert von $\frac{h}{l}$. Für $n = 10$ ist $\frac{h}{l} = 0{,}195$.

Es seien z. B.

$l = 10\,m$, so ist $h = 1{,}95\,m$,
$l = 36$ „ „ „ $h = 7{,}05$ „
$l = 100$ „ „ „ $h = 19{,}5$ „.

Beispiel 2: Es soll die günstigste Neigung der Füllungsstäbe eines Parallelträgers von der Höhe h und der Feldlänge a untersucht werden.

Voraussetzungen: Der Untergurt sei belastet. x sei die horizontale Verschiebung der Knotenpunkte des Obergurtes gegen die des Untergurtes. Dann ist für den Knotenpunkt m (siehe Fig. 3), wenn wieder die gezogenen Stäbe die Spannung σ, die gedrückten Obergurtstäbe die Spannung $-\varrho_1$ und die gedrückten Vertikalen die Spannung $-\varrho_2$ besitzen:

$$(50)\quad \begin{aligned} E\triangle\vartheta &= -(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha' - (\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta' - (\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\gamma' \\ &\quad -(\varrho_1-\varrho_2)\operatorname{cotg}\alpha' + (\sigma+\varrho_2)\operatorname{cotg}\beta' + (\sigma-\sigma)\operatorname{cotg}\gamma' \\ &= -\operatorname{cotg}\alpha'(\varrho_1+\sigma) - (\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\gamma' = -(\varrho_1+\sigma)\left(\frac{x}{h}+\frac{a-x}{h}\right) \\ &= -(\varrho_1+\sigma)\left(\frac{a}{h}\right). \end{aligned}$$

Und da $w_m = -\triangle\vartheta$, so ist w_m *unabhängig von x, also von der Neigung der Füllungsstäbe.*

Für die Mitte gilt nun

$$\begin{aligned} E\triangle\vartheta_k &= -(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta' - (\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha' \\ &\quad -(\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\gamma' - (\varrho_1-\varrho_2)\operatorname{cotg}90^0 \\ &\quad -(\varrho_1-\varrho_2)\operatorname{cotg}90^0 - (\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\gamma' \\ &\quad -(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta' - (\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha' \\ &= -2(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta' - 2(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha' \\ &\quad -2(\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\gamma' \\ &= -2(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta' - 2(\varrho_2+\sigma)\frac{x}{h} - 2(\varrho_1+\sigma)\frac{a-x}{h} \end{aligned}$$

oder

$$(51)\quad E\triangle\vartheta_k = -2(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta' - \frac{2}{h}[x(\varrho_2-\varrho_1)+a(\varrho_1+\sigma)].$$

Setzen wir $\varrho_1 = \varrho_2$, so ist

$$(52)\quad E\triangle\vartheta_k = -2(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta' - \frac{2a}{h}(\varrho_1+\sigma).$$

Wie wir gesehen haben, sind alle anderen w_m-Werte von β' und x unabhängig; da $w_k = -\triangle\vartheta_k$ ist, so wird die Durchbiegungsfläche für denjenigen Wert der Variabeln β' ein Minimum, für welchen $\triangle\vartheta_k$ ein Minimum wird, oder wenn $\operatorname{cotg}\beta'$ ein Minimum oder β' *ein Maximum wird. Für diesen Fall haben aber die Füllungsstäbe gleiche Neigung.*

c) *Beispiel 3: Es soll bei horizontalem Untergurt die günstigste Form des Obergurtes ermittelt werden.*

Voraussetzungen: α) Die Felderbreite a sei konstant; β) die Füllungsstäbe seien teils vertikal, teils diagonal; γ) die Kräfte greifen am Untergurt an. In diesem Falle ist wieder $w_m = -\triangle\vartheta$, und (siehe Fig. 4)

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} E\triangle\vartheta &= -(\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha - (\varrho_2+\sigma)\operatorname{cotg}\beta \\ &\quad -(\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha_1 + (\varrho_2-\varrho_1)\operatorname{cotg}\beta_1 \\ &\quad +(\sigma+\varrho_2)\operatorname{cotg}\alpha_2 + (\sigma-\sigma)\operatorname{cotg}\beta_2 \\ &= (\varrho_2+\sigma)(\operatorname{cotg}\alpha_2-\operatorname{cotg}\beta) - (\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha_1 + (\varrho_2+\varrho_1)\operatorname{cotg}\beta_1 \\ &= (\varrho_2+\sigma)\left(\frac{h_1}{a}-\frac{h_2}{a}\right) - (\varrho_1+\sigma)\operatorname{cotg}\alpha_1 + (\varrho_2-\varrho_1)\operatorname{cotg}\beta_1. \end{aligned}\right.$$

Da aber $\frac{h_1 - h_2}{a} = \operatorname{cotg} \beta_1$ (siehe Fig. 4), so ist, wenn $\varrho_2 = \varrho_1$

$$(54) \qquad E \triangle \vartheta = (\varrho_1 + \sigma)(\operatorname{cotg} \beta_1 - \operatorname{cotg} \alpha_1).$$

Die allergünstigste Form des Obergurtes ist aber diejenige, bei welcher $\triangle \vartheta = 0$ oder

$$(55) \qquad \alpha_1 = \beta_1.$$

Also müssen die Dreiecke $A_1 A_2 B_2$, $A_2 A_3 B_3$, ... gleichschenklig sein. Setzen wir $\overline{A_1 B_1} = y_0$, $\overline{B_1 B_2} = \overline{B_2 B_3} = \cdots = a$, so folgt $\overline{A_1 B_1}^2 + \overline{B_1 B_2}^2 = \overline{A_1 B_2}^2 = \overline{A_2 B_2}^2 = y_1^2$, oder $y_0^2 + a^2 = y_1^2$; ebenso $y_1^2 + a^2 = y_2^2 = y_0^2 + 2a^2$, und im allgemeinen $y_n^2 = y_0^2 + n a^2$. Da $na = x$ die Abszisse ist, so folgt:

$$(56) \qquad y_n^2 = y_0^2 + x a.$$

Die Endpunkte der y-Werte liegen daher auf einer Parabel.

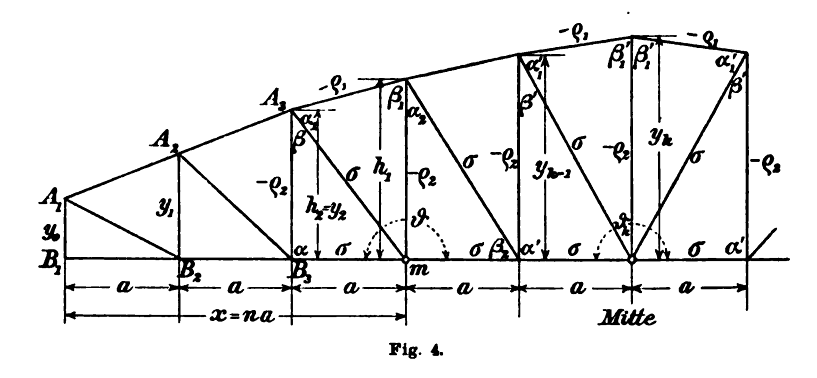


Fig. 4.

Wenn die Endvertikale $y_0 = 0$, so ist die Gleichung der Parabel

$$(57) \qquad y_n^2 = n a^2 = x a.$$

Hieraus ersieht man, daß mit dem Wachsen von a auch die Pfeilhöhe der Parabel wächst. Für die Mitte des Trägers aber trifft dies wieder nicht zu. Für diese Stelle ist nämlich (siehe Fig. 4)

$$(58) \quad \begin{cases} E \triangle \vartheta_k = 2[-(\varrho_2 + \sigma)\operatorname{cotg}\beta' - (\varrho_2 + \sigma)\operatorname{cotg}\alpha' - (\varrho_1 + \sigma)\operatorname{cotg}\alpha_1' \\ \qquad - (\varrho_1 - \varrho_2)\operatorname{cotg}\beta_1']. \end{cases}$$

Nehmen wir wieder angenähert $\varrho_1 = \varrho_2$ an, so folgt:

$$E \triangle \vartheta_k = -2(\varrho_1 + \sigma)(\operatorname{cotg}\beta' + \operatorname{cotg}\alpha_1').$$

Da β' durch y_{k-1} schon festliegt, wird $\triangle \vartheta_k$ und damit auch w_k um *so kleiner, je größer α_1' wird.*

Anwendungen der Massenreduktionen nach Reye und nach Poinsot.

Von R. Skutsch.

Zwei Massensysteme heißen nach Reye[1]) äquivalent hinsichtlich ihrer Trägheitsmomente, wenn die letzteren für jede Ebene des Raumes den gleichen Wert haben. Die Massensysteme haben dann auch gleiche Schwerpunktslage und gleiche Masse. Unter dem Einfluß gleicher oder statisch äquivalenter[2]) Kräftesysteme — also nach vorstehendem auch ihres Gewichts — und gleichen Bedingungen unterworfen, führen sie die gleichen Bewegungen aus und für die Bestimmung etwaiger Reaktionen haben die nämlichen Gleichungen Geltung.

Jeder starre Körper läßt sich nach Reye durch mindestens 4 Massenpunkte äquivalent ersetzen, und zwar liegen dieselben in den Ecken eines beliebigen Antipolartetraeders zum Culmannschen Zentralellipsoid. Wird der Körper zur ebenen Scheibe, so wird eine Achse dieses Ellipsoids Null, und es genügen zum Ersatz schon 3 Massenpunkte in den Ecken eines beliebigen Antipolardreiecks zur Culmannschen Zentralellipse.

Daß Reyesche Äquivalenzen, wie Routh[3]) bemerkt, oft mit Vorteil angewendet würden, den gegebenen Körper mit einem anderen zu vertauschen, dessen Bewegung sich leichter finden läßt, scheint die Literatur nicht zu bestätigen. Routh selbst gibt — in auffallendem Gegensatz zu dem Reichtum an Beispielen äquivalenter Systeme im Kapitel „Trägheitsmomente" — nur 2 ziemlich dürftige dynamische Anwendungen des Scheibenersatzes und diese merkwürdigerweise in dem Kapitel von der ebenen Bewegung, trotzdem „eigentlich" kein Fall ebener Bewegung vorliegt und bei solcher, wie wir sehen werden, die Reyesche Äquivalenz überhaupt ihre Bedeutung völlig verliert. Von räumlichen Anwendungen wüßte ich in der Tat nur den Ersatz des symmetrischen Kreisels durch 4 Massenpunkte nach Poggendorff und Koppe anzuführen. Da Herr Koppe[4]) eine rotierende Scheibe — von gleichen Hauptträgheitsmomenten — betrachtet, so nimmt er die 4 Punkte selbstverständlich in der Scheibenebene an und zwar gleichmäßig verteilt auf dem Umfang eines Kreises, der den polaren Trägheitshalbmesser j der Scheibe zum Halbmesser hat, und jeder Massenpunkt erhält den vierten Teil der gesammten Scheibenmasse m. Es bedeutet aber kaum eine Komplikation der Betrachtung, wenn man der Schwungmasse auch noch ein endliches Trägheitsmoment mi^2 inbezug auf die zur Kreiselachse senkrechte Schwerebene zuschreibt. Man braucht dann nur noch einen fünften Massenpunkt im festen Punkte A der Kreiselachse, der den Schwerpunktabstand a habe, anzunehmen, die vier übrigen aber nunmehr in der Antipolarebene zu A, d. h. in der Entfernung $\frac{i^2}{a}$ von der Schwerebene. Von der Masse m entfällt

1) Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 1865. Bd. X S. 433.

2) Zwei Kräftesysteme heißen äquivalent oder besser statisch äquivalent, wenn jedem von ihnen ein und dasselbe Kräftesystem Gleichgewicht hält, s. z. B. Somoff, Statik II S. 323.

3) Dynamik der Systeme starrer Körper I, 1898, S. 136.

4) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. IV. Jahrgang, 1890/91, S. 75.

der Bruchteil $\frac{i^2}{a^2+i^2} \cdot m$ auf den festen Punkt, der Rest auf die übrigen 4 Massenpunkte, die infolgedessen nunmehr auf einem Kreis vom Halbmesser $\frac{\sqrt{a^2+i^2}}{a} \cdot j$ anzunehmen sind.

Bei der Bewegung einer trägen Scheibe in ihrer Ebene[1]) kommen nur die Trägheitsmomente um Achsen senkrecht zur Scheibe, d. h. die polaren Trägheitsmomente, in Betracht. Infolgedessen genügt hier nach einer gelegentlichen Bemerkung von Poinsot[2]), die nie beachtet worden zu sein scheint, eine viel einfachere Äquivalenz, die ich im Gegensatz zu der Reyeschen die Poinsotsche nennen will. Die polaren Trägheitsmomente zweier Scheiben stimmen nämlich offenbar überein, sobald es die Masse m und die polaren Trägheitsmomente mi^2 um den Schwerpunkt tun und die Schwerpunkte zusammenfallen. Man kann also z. B., da vier Bedingungen zu erfüllen sind, eine träge Scheibe durch 4 Massenpunkte ersetzen, deren Lage man willkürlich angenommen hat. Diesen Weg schlägt neuerdings Herr Wittenbauer[3]) ein, um z. B. die Massenwirkung der Pleuelstange beim Kurbeltrieb graphischer Behandlung zugänglich zu machen. Es kommt in solchem Fall, wo mehrere Scheiben gelenkig aneinander hängen, nicht auf weitgehende Beschränkung der Ersatzpunkte an der einzelnen Scheibe an, da die Verlegung von Massenpunkten nach den Gelenken den Vorteil mit sich bringt, daß die Punkte schließlich doch paarweise zusammenfallen. Nach Poinsot kann man freilich jede beliebige Scheibe schon durch zwei Massenpunkte m_1 und m_2 ersetzen und dabei sogar noch die Lage des einen von ihnen willkürlich annehmen. Der zweite muß dann selbstverständlich auf der durch den ersten bestimmten Schwerachse liegen und zwar auf der andern Seite des Schwerpunktes S. Bezeichnet man ihre Schwerpunktsabstände mit a und b, so muß zunächst sein

$$m_1(a+b) = mb; \quad m_1 = m\frac{b}{a+b};$$

$$m_2(a+b) = ma; \quad m_2 = m\frac{a}{a+b}.$$

Das Trägheitsmoment der beiden Massenpunkte inbezug auf den Schwerpunkt ist

$$m_1 a^2 + m_2 b^2 = m\frac{a^2 b}{a+b} + m\frac{ab^2}{a+b} = mab.$$

Da dies gleich mi^2 sein soll, so hat man

$$ab = i^2.$$

Die beiden Punkte liegen also invers inbezug auf einen Kreis mit dem Halbmesser i und dem Mittelpunkt S. Die so einfache Erkenntnis von der gegenseitigen Lage dieser beiden Reduktionspunkte und der Verteilung

1) Auf welche Körpersysteme die folgenden Betrachtungen anwendbar sind, bleibe hier unerörtert. Jedenfalls gehören dazu alle solchen, welche eine Symmetrieebene parallel zur Ebene der Bewegung haben, d. h. die überwältigende Mehrzahl der technischen Konstruktionen.

2) Liouvilles Journal 1857, Sur la percussion des corps S. 294.

3) Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 1904. Bd. 50, S. 57. Auch Herrn Wittenbauer scheint die Poinsotsche Bemerkung unbekannt geblieben zu sein.

der Masse auf sie führt zu außerordentlich anschaulichen Lösungen der einschlägigen Aufgaben.

Schon Poinsot leitet die reduzierte Pendellänge des physischen Pendels daraus ab. Legt man nämlich den einen Reduktionspunkt in den Aufhängungspunkt, dessen Entfernung vom Schwerpunkt a sei, so liegt der andere in der Entfernung $\frac{i^2}{a}$ unter dem Schwerpunkt. Da der erstere als ruhend auf die Bewegung keinen Einfluß hat, so wird das physische Pendel zum mathematischen mit der Pendellänge $a + \frac{i^2}{a}$.

Die Reaktionen an der Aufhängungsachse des physischen Pendels sind in der technischen Mechanik für die Berechnung der Glockenstühle wichtig. Die Formeln von Köpcke und Keck für diese Kräfte wurden von Herrn Schupmann[1]) durch ein schönes Diagramm der Auflagerdrucke ergänzt. Die bisher gegebenen, nicht gerade übersichtlichen Ableitungen können vermittels Poinsotscher Massenreduktion ganz erheblich vereinfacht werden. Unter Beibehaltung der obigen Bezeichnungen haben wir in den Aufhängungspunkt den Bruchteil $\frac{i^2}{a^2 + i^2} m$ der Glockenmasse m zu legen, im Schwingungsmittelpunkt aber, d. h. im Abstand $\frac{a^2 + i^2}{a}$ von der Aufhängung die Masse $\frac{a^2}{a^2 + i^2} m$ anzunehmen.

Den Auflagerdruck kann man aus zwei Komponenten zusammensetzen, deren eine, von m_1 herrührend, unveränderlich gleich $m_1 g$ und senkrecht abwärts gerichtet ist, während die zweite, der Auflagerdruck des mathematischen Pendels mit der Masse m_2, noch zu bestimmen ist.

Ein mathematisches Pendel von der Masse m_2 und der Länge l schwinge bis zu einem Winkel γ über der Horizontalen aus. Im Augenblick, wo es sich um den Winkel φ unter der Horizontalen befindet, ist seine lebendige Kraft bzw. die von der Schwerkraft geleistete Arbeit

$$\frac{m_2 v^2}{2} = m_2 g l (\sin \varphi + \sin \gamma).$$

Die Auflagerkraft, die beim *mathematischen* Pendel selbstverständlich in die Richtung des Pendels fällt, setzt sich zusammen aus der Zentrifugalkraft $\frac{m_2 v^2}{l}$ und der in die Pendelrichtung fallenden Komponente $m_2 g \sin \varphi$ der Schwerkraft, sie ist also

$$2 m_2 g (\sin \varphi + \sin \gamma) + m_2 g \sin \varphi = m_2 g (3 \sin \varphi + 2 \sin \gamma).$$

Trägt man ihre Werte von einem Pol O aus auf den einzelnen Pendelrichtungen ab, so erhält man ein Diagramm der Auflagerkräfte des mathematischen Pendels und zwar der Gleichung zufolge in Gestalt einer Pascalschen Schneckenlinie. Die Auftragung gestaltet sich sehr einfach, da die Endpunkte der von O aus zunächst abzutragenden Strecken $3 m_2 g \sin \varphi$ auf einem durch O gehenden Kreis liegen und der zweite positive oder negative Summand $2 m_2 g \sin \gamma$ unveränderlich ist.

1) Deutsche Bauzeitung 1875, S. 426. Eine sehr saubere Zeichnung des Schupmannschen Diagramms hat Herr Kohfahl in der Ztsch. d. Ver. Deutsch. Ing. 1904 geliefert.

Dieses Diagramm gilt aber nach obigem auch für das physische Pendel, nur daß hier noch die vertikale Komponente $m_1 g$ hinzuzufügen oder mit andern Worten der Auflagerdruck nicht vom Pol O aus, sondern von einem in der Entfernung $m_1 g$ senkrecht darüber liegenden Punkt zu messen ist.

Nach der vorstehenden Darstellung erscheint es nicht gerade glücklich, wenn z. B. Autenrieth[1]) vorschlägt, sich die ganze Masse des Pendels im Schwingungsmittelpunkt vereinigt zu denken. Will man überhaupt den Schwingungsmittelpunkt als Reduktionspunkt auffassen, so ist es nur einer von zweien, der zweite liegt im Aufhängungspunkt, und die Gesammtmasse ist nach bestimmtem Verhältnis auf beide verteilt zu denken.

Ein im Schwingungsmittelpunkt eines physischen Pendels befindliches Massenelement μ bewegt sich so, als ob es von den übrigen Massenelementen unabhängig und nur an seine Bahn gebunden wäre. Infolgedessen muß seine in die Bahntangente fallende Schwerkraftkomponente *dauernd* mit der Massenkraft $-\mu \frac{dv}{dt}$ im Gleichgewicht sein. Für alle andern Massenelemente dagegen trifft dies, wie leicht zu bestätigen, nur in dem Augenblick zu, in welchem sie einen durch den Schwingungsmittelpunkt und durch den Aufhängungspunkt gehenden Kreis passieren, dessen Mittelpunkt mit letzterem in einer Höhe liegt.

An der im Jahre 1875 im Kölner Dom aufgehängten Kaiserglocke zeigte sich die eigentümliche Erscheinung, daß der Klöppel relativ zur Glocke sich gar nicht bewegte, sondern stets in der Mittellinie derselben verharrte. Herrn Veltmann[2]) gelang es alsbald, das seither allgemein bekannt gewordene „Problem von Glocke und Klöppel" zu lösen; er stellte die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen zweiter Art in den Koordinaten φ und φ_1, den Elongationen der Glocke und des Klöppels, auf und fand das Kriterium für das Versagen der Glocke, indem er $\varphi = \varphi_1$ setzte. Über die Diskussion des Sonderfalles $\varphi = \varphi_1$ haben aber auch die aufgestellten Differentialgleichungen, soweit endliche Schwingungen in Betracht kommen, nicht hinausgeführt, und in das Wesen dieses Sonderfalls gewähren die vorstehenden Betrachtungen einfacheren, aber zugleich auch noch tieferen Einblick.

Wir nennen zur Abkürzung den Klöppel P_{I}, die Glocke P_{II}, A_{I} den Aufhängungspunkt von P_{I} und das System, welches entsteht, wenn P_{I} in A_{I} statt gelenkiger Aufhängung steif mit P_{II} verbunden wäre $P_{\mathrm{I,II}}$. Der kritische Fall der Massenverteilung kann offenbar dadurch definiert werden, daß beim Schwingen des Systems $P_{\mathrm{I,II}}$ in der Befestigungsstelle A_{I} des Klöppels kein biegendes Moment auftritt. Einen allgemeinen Ausdruck für dieses Moment gestattet die Poinsotsche Reduktion der Klöppelmasse sofort hinzuschreiben. Da m_1 mit A_{I} zusammenfällt, so kann das Moment nur von der im Schwingungsmittelpunkt von P_{I} vereinigt zu denkenden Masse m_2 herrühren. Ist l ihre Entfernung von A_{I}, v ihre augenblickliche Geschwindigkeit und α der augenblickliche Ausschlag von $P_{\mathrm{I,II}}$, so ist das fragliche Moment

$$M = m_2 l \left(g \sin \alpha - \frac{dv}{dt}\right).$$

---

1) Technische Mechanik S. 435.

2) Dinglers Polytechn. Journal 1876 S. 481.

Nach den obigen Ausführungen kann aber dieser Ausdruck *dauernd* nur dann gleich Null sein, wenn sich m_2 im Schwingungsmittelpunkt von $P_{I,II}$ befindet, d. h. es muß hierzu der Schwingungsmittelpunkt von P_I mit dem von $P_{I,II}$ zusammenfallen.

Herr Veltmann hatte, wie das seine Methode naturgemäß mit sich brachte, nur die Abmessungen der Massensysteme P_I und P_{II} in die Rechnung eingeführt. Zwischen diesen Abmessungen besteht aber im kritischen Fall durchaus keine übersichtliche Beziehung, und nur der Umstand, daß die Masse des Klöppels sehr klein gegen die Masse der Glocke ist, ermöglichte ihm schließlich eine einfache Formulierung, und zwar die, daß der Schwingungsmittelpunkt von P_I *nahezu* mit dem von P_{II} zusammenfallen müsse. Die hier vorgeführte Betrachtung liefert dagegen das völlig neue Ergebnis, daß der Schwingungsmittelpunkt von P_I *genau* mit dem von $P_{I,II}$ zusammenfällt, also natürlich bei verhältnismäßig leichtem Klöppel auch annähernd mit dem von P_{II}. Selbstverständlich liegt zwischen Herrn Veltmanns Endformel und der hier mitgeteilten Beziehung nur eine elementare Umrechnung, aber die Möglichkeit, Herrn Veltmanns Endformel so sehr viel eleganter zu gestalten, ist eben bisher nicht erkannt worden. Es mag auch betont werden, daß die neue Betrachtungsweise sich im Gegensatz zu der Veltmannschen ohne Komplikation auch auf mehrfache Pendel anwenden läßt. Hängt P_I an P_{II}, P_{II} an P_{III} und so fort, und verwandelt man alle Aufhängungen in starre Befestigungen, so müssen für den kritischen Fall die biegenden Momente in allen diesen Befestigungsstellen verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn der Reihe nach der Schwingungsmittelpunkt von P_I zusammenfällt mit dem von $P_{I,II}$, dieser mit dem von $P_{I,II,III}$ und so fort.

Über die einer ebenen Scheibe durch Momentankräfte erteilte Bewegung liefert die Poinsotsche Reduktion ebenfalls Aufschluß in anschaulichster Form. Es handelt sich hier zunächst um die Zuordnung von Impuls und Momentanpol, ferner um die Feststellung der durch einen gegebenen Impuls hervorgerufenen Winkelgeschwindigkeit der Scheibe. Man fälle vom Schwerpunkt S der Scheibe das Lot auf den Impuls, dessen Fußpunkt A als erster Reduktionspunkt diene. Dann liegt der zweite mit $AS = a$ auf dem nämlichen Lot in der Entfernung $\frac{i^2}{a}$ jenseits des Schwerpunktes. Nun können die Geschwindigkeiten von A und B jedenfalls nur die Richtung des Impulses haben, weil sich sonst bei rechtwinkliger Zerlegung die Summe der Bewegungsgrößen senkrecht zum Impuls von Null verschieden ergeben müßte; der Punkt B kann aber andrerseits auch keine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu AB haben, weil sonst die Momentensumme der Bewegungsgrößen inbezug auf A nicht verschwände. B ist also Momentanpol, während die in A befindliche Masse $\frac{m i^2}{i^2 + a^2}$ die gesamte Bewegungsgröße des Impulses enthält, ein Umstand, der natürlich sofort die Geschwindigkeit von A und damit die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe hinzuschreiben gestattet.

Diese Beziehungen sind zu einfach, als daß ihre Ableitung Gelegenheit bieten könnte, die durch Poinsots Reduktion erreichbaren Vorteile ins Licht zu rücken; das nachstehend behandelte Beispiel dürfte dazu geeigneter sein.

Bereits Poinsot hatte die Reduktion benützt, um die Bewegung einer ebenen Scheibe zu ermitteln, mit der plötzlich ein Massenpunkt gekoppelt wird. Diese Aufgabe kann als ein Sonderfall der folgenden angesehen werden:

Zwei komplanar bewegte ebene Scheiben werden plötzlich mit einander fest verbunden. Die Bewegung nach der Koppelung ist zu ermitteln.

Es gelingt leicht, die beiden Scheiben auf zwei zusammenfallende Punktepaare zu reduzieren. Errichtet man nämlich in den Schwerpunkten der beiden Scheiben S und T auf ihrer Verbindungslinie Lote i und j von der Länge der Trägheitshalbmesser, so findet sich leicht auf ST der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die Endpunkte von i und j hindurchgeht. Die beiden Schnittpunkte A und B dieses Kreises mit ST haben offenbar die Eigenschaft, daß

$$AS \cdot SB = i^2, \qquad AT \cdot TB = j^2,$$

sie können also gleichzeitig zur Reduktion der ersten, wie der zweiten, also natürlich auch der durch die Koppelung entstehenden neuen Scheibe verwendet werden, und es mögen dabei auf die Punkte A und B von der Masse der ersten Scheibe die Teile m_1 und m_2, von der der zweiten die Teile n_1 und n_2, von der durch die Koppelung entstehenden Scheibe also die Teile $m_1 + n_1$ und $m_2 + n_2$ entfallen.

Zerlegen wir jetzt den Impuls der ersten Scheibe vor der Koppelung in zwei Komponenten $m_1 v_1$ und $m_2 v_2$ senkrecht zu AB und eine dritte $(m_1 + m_2) v$ in Richtung von AB, ebenso den der zweiten Scheibe in die drei Komponenten $n_1 w_1$, $n_2 w_2$, $(n_1 + n_2) w$, so ergeben sich die entsprechenden Impulskomponenten für die durch die Koppelung entstehende Scheibe durch Addition beziehentlich zu $m_1 v_1 + n_1 w_1$, $m_2 v_2 + n_2 w_2$, $(m_1 + m_2) v + (n_1 + n_2) w$ und die betreffenden Geschwindigkeitskomponenten sind

$$c_1 = \frac{m_1 v_1 + n_1 w_1}{m_1 + n_1}, \qquad c_2 = \frac{m_2 v_2 + n_2 w_2}{m_2 + n_2};$$

$$c = \frac{(m_1 + m_2) v + (n_1 + n_2) w}{m_1 + m_2 + n_1 + n_2}.$$

Mögen noch die Worte hier Platz finden, mit welchen Poinsot selber für seine Massenreduktion und ähnliche Betrachtungen eintritt:

L'esprit humain ne s'avance guère qu'à l'aide de ces idées plus simples, ou de ces instruments plus commodes, qu'il imagine et qu'il manie, pour ainsi dire, avec plus de facilité.

Bemerkung zu dem Vortrage „Über eine quadratische Kongruenz“.

Von P. Zühlke.

Einer gütigen Mitteilung des Herrn Lampe verdanke ich die Kenntnis der Tatsache, daß die in meinem Vortrage vom 14. Dezember 1904 behandelte Kongruenz bereits 1814—1815 untersucht worden ist. In Gergonnes Annalen t. V, p. 220 findet sich unter den gestellten Aufgaben auch die Frage nach den Zahlen, in deren sämtlichen Potenzen die n letzten Ziffern der Reihe nach dieselben sind wie die n letzten Ziffern der ursprünglichen Zahl. Die Aufgabe wird in den drei a. a. O. S. 309—327 abgedruckten Lösungen (Tédenat, Français, Gergonne) reduziert auf die Frage nach

allen n-ziffrigen Zahlen, in deren Quadraten die n letzten Ziffern wieder die ursprüngliche Zahl bilden; diese Frage wird ausführlich beantwortet. Da sich die von mir vorgetragene elementare Lösungsart von der in Tédenats Antwort benutzten Methode nur wenig unterscheidet, so soll die oben (S. 10 dies. Jahrg.) angekündigte Publikation als zwecklos unterbleiben.

Auf die Stelle in Gergonnes Annalen ausdrücklich aufmerksam zu machen, erscheint mir im Interesse einer endgültigen, historischen und sachlichen Erledigung der Aufgabe um so notwendiger, als die genannte Stelle trotz ihres beträchtlichen Umfanges bisher gänzlich unbeachtet geblieben zu sein scheint; sie wird weder in den oben S. 10 angeführten, noch in den von Herrn Meißner im Arch. d. Math. u. Phys. (3) 8, 1905, S. 332 mitgeteilten Arbeiten, die sämtlich erheblich später erschienen sind, erwähnt.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

35. Sitzung am 31. Mai 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 25 Herren.

Der Antrag des Vorstandes, daß die nach dem 1. April eintretenden Mitglieder, soweit sie in Berlin und den Vororten wohnen, für das laufende Gesellschaftsjahr nur die Hälfte des Jahresbeitrags zu entrichten haben, wird angenommen.

Herr Salkowski: Zur Bestimmung solcher Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht (s. u.).

Herr Hessenberg: Neue Begründung der Sphärik (s. u.).

Fortsetzung der Diskussion über den von Herrn Skutsch in der letzten Sitzung gehaltenen Vortrag.

36. Sitzung vom 28. Juni 1905.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Anwesend: 26 Herren.

Herr Fleck: Über Darstellung ganzer Zahlen als Summen von positiven Kuben und von Biquadraten ganzer Zahlen.

Herr Rothe: Über das Problem der Bekleidung einer Fläche mit einem biegsamen, unausdehnbaren Netz.

Mechanische und elektrische Masse.

Von H. Reißner.

Zu dem auf S. 23—39 dieses Jahrg. der Sitzungsberichte d. Berl. Math. Ges. unter dem obigen Titel veröffentlichten Vortrag ist in bezug auf den letzten Abschnitt, der von der „Fortpflanzung von Störungen" im Äther handelt, eine Berichtigung nachzutragen, die Verf. um so lieber anbringt, als sie den Ergebnissen der Arbeit eine größere Abrundung und Ungezwungenheit verleihen dürfte.

Auf S. 23 der Einleitung findet sich die Behauptung, daß eines der Hilfsmittel zur Erfüllung der Forderungen der Abhandlung die notwendige Hypothese sei, daß zwar für die statischen Kräfte zwischen Massen die Zustandsänderung des Zwischenmediums isozyklisch, dagegen für die schnellen Feldänderungen des Lichtes adiabatisch sei. Diese Hypothese ist jedoch nicht notwendig, und es läßt sich zeigen, daß *die Fortpflanzung von Störungen*

im Äther nach denselben Gesetzen (den Maxwellschen elektromagnetischen Grundgleichungen) erfolgt, sowohl wenn die Zustandsänderung des Äthers adiabatisch, als auch wenn dieselbe isozyklisch vor sich geht.

Der Irrtum des Verf., daß jene Hypothese notwendig sei, rührt von einem falschen Ansatz des Hamiltonschen Prinzips her. Das Hamiltonsche Prinzip lautet bekanntlich:

Die Variation des Zeitintegrals der Summe von kinetischer Energie und Kräftefunktion zwischen festen Endlagen soll verschwinden, wenn entsprechende Lagen der variierten und der unvariierten Bahn zu denselben Zeiten durchlaufen werden.

Nun stimmt aber nicht nur die kinetische Energie der Parameter in beiden Fällen der verschiedenen Zustandsänderungen überein, sondern auch die Kräftefunktionen haben in den Parametern und Konstanten ausgedrückt völlig übereinstimmende Werte und zwar aus folgenden Gründen:

Auf S. 29 u. 37 meines Vortrags ist darauf hingewiesen, daß die Energien der zyklischen Bewegung in den Fällen adiabatischer und isozyklischer Zustandsänderung sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, da man sie unter Vernachlässigung kleiner Größen in der Form schreiben darf:

$$dT_{\text{ad.}} = \frac{\gamma\, d\tau}{2}(U_0 + \mathfrak{E}^2),$$

$$dT_{\text{is.}} = \frac{\gamma\, d\tau}{2}(U_0 - \mathfrak{E}^2).$$

Hertz[1]) zeigt nun, daß die Kräftefunktion der adiabatischen Bewegung gleich der Abnahme der Energie der zyklischen Bewegung, diejenige der isozyklischen Bewegung gleich der Zunahme der Energie zu setzen ist. Aus dieser und der vorhergehenden Bemerkung folgt sofort, daß die beiden Kräftefunktionen miteinander übereinstimmen.

Da also sowohl kinetische Energie der Parameter als auch Kräftefunktion in beiden Fällen identisch sind, muß das Hamiltonsche Prinzip für beide Arten der Zustandsänderung auch dieselben Bewegungsgleichungen liefern, und diese sind, wie wohl zuerst Fitz-Gerald[2]) abgeleitet hat, die Maxwellschen elektromagnetischen Grundgleichungen.

Die Übereinstimmung des Hamiltonschen Prinzips mit seinem System der Mechanik hat Hertz allerdings nur für adiabatische Systeme bewiesen, indem er die von Hamilton verlangte Variation bei festgehaltenen Endwerten aller, auch der zyklischen Koordinaten, in eine solche mit festgehaltenen zyklischen Momenten verwandelte.[3]) An das Auftreten konservativer Systeme mit isozyklischer Bewegung hat Hertz offenbar nicht gedacht, sonst hätte er wohl darauf hingewiesen, daß das Hamiltonsche Integral bei isozyklischer Bewegung mit dem Zeitintegral der gesamten kinetisch vorgestellten Energie und also mit dem Inhalt seines Grundgesetzes identisch ist.[4]) Denn einesteils ist die Summe von kinetischer Energie der

1) Hertz, Princ. § 566, S. 241.
2) Fitz-Gerald, Scientific writings 1902, S. 45 ff. L. Boltzmann, Vorlesungen über die Maxwellsche Theorie Bd. II.
3) Hertz, Princ. § 628, S. 263.
4) Hertz, Princ. § 358, S. 177.

Parameter und Kräftefunktion bei isozyklischer Bewegung bis auf eine Konstante mit der Gesamtenergie übereinstimmend, andererseits ist die Unverrückbarkeit der Grenzen durch die Vorschrift konstanter zyklischer Geschwindigkeit von selbst erfüllt.

Allerdings scheint es zunächst, als ob das isozyklische System kein freies sei, für das allein ja das Hertzsche verallgemeinerte Trägheitsgesetz gilt, weil auf die Grenzen des Systems äußere Kräfte wirken müssen, um die zyklischen Geschwindigkeiten konstant zu halten. Man braucht jedoch auf die zyklischen Koordinaten im Unendlichen keine Kräfte wirken lassen und wird dennoch die Bedingung des Isozyklismus mit unendlich großer Annäherung erfüllen, wenn die Feldintensitäten im Unendlichen in der von der Potentialtheorie verlangten Weise verschwinden. Unter dieser Bedingung darf also das isozyklische System wie ein freies behandelt und das Hertzsche verallgemeinerte Trägheitsgesetz auf dasselbe angewendet werden.

Eine weitere Zusatzbemerkung betrifft Nr. 3 der Ergebnisse auf S. 23. Es war dort, sowie auf S. 36 Gl. (14) ein bestimmtes Verhältnis von Masse und Durchmesser des Massenatoms gefordert worden, damit die Proportionalität zwischen träger und gravitierender Masse gewahrt bleibe. Eine solche Beziehung für das Massenatom ist nicht notwendig, wenn schon bei den einzelnen Ladungen, aus denen sich die ponderable Materie zusammensetzt, das von der Elektronentheorie verlangte Verhältnis zwischen Ladung und Durchmesser besteht, sodaß Gl. (14a) S. 39 keine notwendige Beziehung darstellt, sondern nur die auch von der Elektronentheorie geforderte Beziehung S. 36 unten

$$m = \frac{\sigma}{c^2} \frac{l_e^2}{r_a} \frac{1}{5\pi}$$

für die reine Elementarladung gelten muß, die sich auch in der Form schreiben läßt:

$$m = 5\pi\gamma w^2 \cdot r_a = 1{,}68 \cdot 10^{28} r_a.$$

Zum Schluß möchte Verf. noch erwähnen, daß ihn außer den auf S. 23 u. 39 angeführten Schriftstellern zu der Abfassung des vorliegenden Aufsatzes ganz besonders das Referat von Drude[1]) über Fernwirkungen, die Heavisideschen Analogien[2]) zwischen Gravitation und Elektromagnetismus und das Referat von Zenneck[3]) über Gravitation angeregt haben.

Außerdem stehen öftere Gespräche des Verf. mit Herrn A. Wohl in Beziehung zu seiner Arbeit, Z. B. stammt von Herrn A. Wohl die durch chemische Gesichtspunkte gestützte Bemerkung, daß die Gleichgewichtsstellung der Molekule ermöglicht werde durch die Hinderung des Abströmens der Energie des Binnenäthers, oder anders ausgesprochen, daß die Ungültigkeit des Newtonschen Gesetzes für molekulare Entfernungen herrühre von einer veränderten Bedingung der Zustandsänderung des Äthers.

---

1) P. Drude, Über Fernwirkungen. Ref. f. d. 69. Vers. d. Nat. u. Ärzte 1897 Wied. Ann.

2) O. Heaviside, Electromagnetic Theory. Vol. I, p. 455.

3) Zenneck, Gravitation, Encyklop. d. math. Wissensch.

Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht.

Von E. Salkowski.

1. Eine Gleichung

$$f(\varkappa, \tau, s) = 0$$

zwischen der Krümmung $\varkappa$, der Torsion τ und der Bogenlänge s definiert eine Klasse von unendlich vielen Raumkurven. Lie[1]) hat die endlichen Gleichungen dieser Kurven durch Quadraturen gefunden, indem er sich imaginärer Bestimmungsstücke bediente. Es ist möglich, in einer großen Reihe von Fällen die Aufgabe durch reelle Bestimmungsstücke zu lösen, wenn man dabei eine gewisse geometrische Zuordnung zweier Raumkurven zueinander zu Hilfe nimmt.

2. Es seien x, y, z die Koordinaten eines Punktes einer Raumkurve, $\varkappa$ ihre erste, τ ihre zweite Krümmung, ds ihr Linienelement, dw der Winkel zweier Tangenten, dw' der Winkel zweier Binormalen in benachbarten Punkten. Dann ist

$$\frac{dw}{ds} = \varkappa, \quad \frac{dw'}{ds} = \tau. \tag{1}$$

Der Kurve (x, y, z) sei eine zweite (X, Y, Z) so zugeordnet, daß in entsprechenden Punkten die Tangenten einander parallel sind; dS, K, T sei Linienelement, Krümmung und Torsion der zweiten Kurve. Zwischen den beiden Kurven bestehen die Gleichungen

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dX}{dS}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dY}{dS}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dZ}{dS}. \tag{2}$$

Da die entsprechenden Tangenten parallel sind, so sind es auch die Schmiegungsebenen; die Hauptnormalen und mit ihnen auch die Binormalen in entsprechenden Punkten sind daher ebenfalls parallel und gleich oder entgegengesetzt gerichtet. Da die Rechnung für den zweiten Fall sich im wesentlichen nur durch das Vorzeichen von dem ersten unterscheidet, so sei in der Folge immer angenommen, daß die Binormalen und Hauptnormalen in entsprechenden Punkten *gleich* gerichtet sind. Für die zweite Kurve haben dann dw und dw' dieselbe Bedeutung wie für die erste; es ist daher:

$$\frac{dw}{dS} = K, \quad \frac{dw'}{dS} = T. \tag{3}$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) folgt unmittelbar

$$\varkappa ds = K dS, \quad \tau ds = T dS \tag{4}$$

und hieraus:

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{K}{T}, \tag{5}$$

1) S. Lie, Bestimmung aller Raumkurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind. Christiania 1882. Videnskabs-Selskabets Forhandlinger Nr. 10. 6 S.

d. h.: *Sind zwei Raumkurven so aufeinander bezogen, daß in entsprechenden Punkten ihre Tangenten parallel sind, so ist das Verhältnis von Krümmung und Torsion bei beiden Kurven dasselbe.*

Diese Beziehung ist schon von Herrn N. J. Hatzidakis[1]) aus den Frenetschen Formeln durch Rechnung hergeleitet worden.

Aus (2) und (4) ergeben sich die Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \varkappa dx = K dX, & \tau dx = T dX, \\ \varkappa dy = K dY, & \tau dy = T dY, \\ \varkappa dz = K dZ, & \tau dz = T dZ. \end{cases}$$

3. Alle Kurven, welche in entsprechenden Punkten mit einer gegebenen Kurve (x, y, z) parallele Tangenten besitzen, können durch Quadraturen gefunden werden. Setzt man nämlich

$$K = \varphi(s),$$

wo $\varphi(s)$ eine beliebige Funktion von s bedeutet, in das erste System der Gleichungen (6) ein, so ergeben sich X, Y, Z.

Dies Problem ist übrigens identisch mit der schon seit langem erledigten Aufgabe, alle Kurven zu bestimmen, die eine gegebene sphärische Indikatrix der Tangenten besitzen.[2]) Dabei versteht man unter der sphärischen Indikatrix die Kurve, die dadurch entsteht, daß man durch den Anfangspunkt der Koordinaten zu den Tangenten der Kurve die Parallelen zieht und diese Linien mit der Einheitskugel zum Schnitt bringt. Offenbar haben alle gesuchten Kurven die durch die gegebene Kurve bestimmte Indikatrix.

4. Den Kurven einer Kurvenklasse, die durch ihre natürliche Gleichung

$$(7)\qquad f(\varkappa, \tau, s) = 0$$

definiert ist, kann man jede Kurve des Raumes durch parallele Tangenten zuordnen. Eine Ausnahme bilden, wie aus Gleichung (5) leicht ersichtlich ist, die allgemeinen Schraubenlinien

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \text{const.},$$

die sich nur einander zuordnen lassen. Diese mögen hier außer Betracht bleiben. Es seien (X, Y, Z), die Koordinaten eines Punktes einer beliebigen Raumkurve, als Funktionen eines Parameters u gegeben. Bildet man dann K, T, S als Funktionen von u, so kann man aus (7) in Verbindung mit (5) $\varkappa$ und τ als Funktionen von s und u bestimmen:

$$(8)\qquad \varkappa = \varphi(s, u), \qquad \tau = \psi(s, u).$$

Diese Gleichungen, zusammen mit (7) und (4), bestimmen dann in der vorgelegten Klasse diejenige Kurve (x, y, z), deren Tangenten in entsprechenden Punkten zu denen der Kurve (X, Y, Z) parallel sind. Die Bestimmung

1) N. J. Hatzidakis, Om nogle Konsekvenser af Frenet's og Brunel's Formler. Nyt Tidsskrift f. Math. Bd. 13, Nr. 3.

2) Vgl. z. B. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven. S. 240. Leipzig 1901.

dieser Kurve erfordert im allgemeinen die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\varphi(s, u)\, ds = K \frac{dS}{du}\, du. \tag{9}$$

Ist die Lösung dieser Gleichung bekannt:

$$s = \chi(u), \tag{10}$$

so findet man die zweite natürliche Gleichung der Kurve durch Elimination von u aus (8) und (10), während durch das System (2) ihre endlichen Gleichungen, d. h. die Ausdrücke von x, y, z sich mit Hilfe von Quadraturen ergeben:

$$x = \int \frac{X'}{S'} s'\, du, \quad y = \int \frac{Y'}{S'} s'\, du, \quad z = \int \frac{Z'}{S'} s'\, du. \tag{11}$$

Der Strich bei der Funktionsbezeichnung bedeutet wie üblich die Ableitung nach u. Da zu jeder Kurve (x, y, z) im Raume unendlich viele mit parallelen Tangenten zugeordnet werden können, so erhält man durch die Gleichungen (11) alle Kurven der vorgelegten Klasse.

In einer großen Anzahl von Fällen vereinfacht sich die Gleichung (8) so, daß das Problem durch Quadraturen allein gelöst wird.

Dies sind die Fälle, auf die zu Anfang hingedeutet wurde, in denen man die Kurven einer Klasse durch reelle Bestimmungsstücke ausdrücken kann. Einige Beispiele dafür mögen hier angeführt werden.

5. 1) Kurven konstanter Krümmung, bezw. konstanter Torsion.

Ist

$$\varkappa = \text{const.}, \quad \text{bezw.} \quad \tau = \text{const.},$$

so erhält man aus (6) die Formeln

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\varkappa} \int K X'\, du, & \text{bezw.} \quad x &= \frac{1}{\tau} \int T X'\, du, \\ y &= \frac{1}{\varkappa} \int K Y'\, du, & y &= \frac{1}{\tau} \int T Y'\, du, \\ z &= \frac{1}{\varkappa} \int K Z'\, du, & z &= \frac{1}{\tau} \int T Z'\, du. \end{aligned}$$

Sie sind zuerst von Herrn J. N. Hatzidakis[1]) mitgeteilt worden.

2) Die Kurven zu bestimmen, für welche zwischen erster und zweiter Krümmung eine gegebene Gleichung

$$f(\varkappa, \tau) = 0 \tag{12}$$

besteht.

Aus (12) und (5) erhält man $\varkappa$ und τ als Funktionen von u, so daß die gesuchten Kurven durch die Gleichungen

$$x = \int \frac{K}{\varkappa} X'\, du, \quad y = \int \frac{K}{\varkappa} Y'\, du, \quad z = \int \frac{K}{\varkappa} Z'\, du$$

1) J. N. Hatzidakis, Über invariante Differentialausdrücke. Journ. f. Math. Bd. 104, S. 101—115.

oder durch die gleichbedeutenden

$$x = \int \frac{T}{\tau} X' du, \quad y = \int \frac{T}{\tau} Y' du, \quad z = \int \frac{T}{\tau} Z' du$$

dargestellt werden.

Speziell ergeben sich die Koordinaten eines Punktes der Bertrandschen Kurven

$$A\varkappa + B\tau = 1$$

in der Form

$$x = \int (AK + BT) dX = A \int K dX + B \int T dX$$

$$y = \int (AK + BT) dY = A \int K dY + B \int T dY$$

$$z = \int (AK + BT) dZ = A \int K dZ + B \int T dZ.$$

Die auf der rechten Seite an erster Stelle stehenden Integrale stellen die Koordinaten für einen Punkt einer Kurve konstanter Krümmung, die an zweiter Stelle stehenden ebenso von einer Kurve konstanter Torsion dar, die mit der ersten in entsprechenden Punkten parallele Tangenten besitzt. Aus der Form der Gleichungen ergibt sich der Satz:

Wenn man die entsprechenden Punkte zweier Raumkurven, von denen die eine konstante Krümmung, die andere konstante Torsion besitzt, und die überall parallele Tangenten haben, miteinander verbindet und die Verbindungsstrecken nach einem beliebigen, aber festgewählten Verhältnis teilt, so liegen alle Teilpunkte auf einer Bertrandschen Kurve.

An Stelle der Kurven konstanter Krümmung und konstanter Torsion kann man in obigem Satze auch allgemeiner zwei beliebige Bertrandsche Kurven setzen, die sich durch parallele Tangenten aufeinander beziehen lassen.

3) Die Kurven zu bestimmen, für die das Verhältnis der 1. und 2. Krümmung eine bestimmte Funktion des Bogens ist.

Die gegebene Gleichung laute

$$\frac{\varkappa}{\tau} = f(s).$$

Hieraus und aus (5) erhält man s als Funktion von u und damit x, y, z nach Ausführung von je einer Quadratur.

Eine spezielle Klasse dieser Kurven bilden die geodätischen Linien auf Kegelflächen, die durch die natürliche Gleichung

$$\frac{\tau}{\varkappa} = ms + n$$

charakterisiert sind, und deren endliche Gleichungen sich demnach in der Form

$$x = \frac{1}{m} \int \frac{X'}{S'} \frac{d}{du} \left(\frac{T}{K}\right) du, \quad y = \frac{1}{m} \int \frac{Y'}{S'} \frac{d}{du} \left(\frac{T}{K}\right) du, \quad z = \frac{1}{m} \int \frac{Z'}{S'} \frac{d}{du} \left(\frac{T}{K}\right) du$$

ergeben.

4) Die Kurven zu bestimmen, für die

$$H(\varkappa, \tau) = f(s)$$

ist. Dabei bedeutet H eine homogene Funktion von der Ordnung λ. Dann ist

$$\varkappa^\lambda = \frac{f(s)}{F\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)},$$

wobei F eine aus H in bestimmter Weise hervorgehende Funktion bedeutet. Nach (5) ist:

$$F\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right) = \varphi(u),$$

und daraus ergibt sich

$$\varkappa = \frac{f(s)^{1/\lambda}}{\varphi(u)^{1/\lambda}},$$

so daß auf Grund von (4) s durch eine Quadratur als Funktion von u bestimmt werden kann. Die Gleichungen (2) ergeben dann x, y, z durch weitere Quadraturen.

Spezielle Fälle unserer Annahme sind die Gleichungen $\varkappa = f(s)$, bzw. $\tau = f(s)$.

Daß das Verfahren auch dann vielfach zum Ziele führt, wenn die Kurvenklasse durch eine Differentialgleichung definiert ist, möge das folgende Beispiel zeigen.

5) Die *sphärischen Kurven* sind durch die Differentialgleichung bestimmt

$$\frac{\tau}{\varkappa} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\frac{1}{\varkappa}}{ds}\right) = 0.$$

Eine beliebige Raumkurve (X, Y, Z) bestimmt eine sphärische Kurve mit parallelen Tangenten (x, y, z) durch die Gleichungen (4) und (6). Setzt man

$$TdS = d\sigma,$$

so ist $d\sigma$ das Bogenelement einer Kurve konstanter Torsion 1, die mit $\varkappa$ durch die Beziehung

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{d^2\frac{1}{\varkappa}}{d\sigma^2} = 0$$

verbunden ist. Hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{\varkappa} = A\sin\sigma + B\cos\sigma,$$

oder wenn man

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha, \qquad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\alpha$$

einführt,

$$\frac{1}{\varkappa} = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\sigma+\alpha).$$

Aus der Bedeutung von σ folgt, daß α ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt werden darf, so daß

$$\frac{1}{\varkappa} = \sqrt{A^2+B^2}\sin\sigma$$

wird. Der Radius R der Kugel ergibt sich aus der Gleichung

$$R^2 = \frac{1}{\varkappa^2} + \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{d\frac{1}{\varkappa}}{ds}\right)^2,$$

es ist also

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Damit wird

$$\frac{1}{\varkappa} : R = \sin\sigma,$$

in Worten:

Das Verhältnis des Krümmungsradius einer sphärischen Kurve zum Radius der Kugel ist gleich dem Sinus der Bogenlänge einer Kurve von der konstanten Torsion 1, welche mit der sphärischen Kurve in entsprechenden Punkten parallele Tangenten hat.

Der Bogen σ ist demnach gleich dem Winkel, den der Kugelradius nach einem Kurvenpunkte mit der Krümmungsachse dieses Punktes bildet.

Die endlichen Gleichungen der sphärischen Kurve ergeben sich in der Form:

$$x = R\int K\sin\sigma\, dX, \quad y = R\int K\sin\sigma\, dY, \quad z = R\int K\sin\sigma\, dZ.$$

6. An Stelle der benutzten Zuordnung von Raumkurven zueinander durch parallele Tangenten kann man zur Bestimmung der endlichen Gleichungen von Kurvenklassen mit wesentlich gleichem Erfolge andere Verwandtschaften setzen, wenn diese einfache Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken der Kurven von der Art der Gleichungen (4), (5) und (6) ergeben. Beispielsweise könnte man diejenigen Kurven suchen, deren Tangenten in jedem Punkte den Binormalen einer gegebenen Kurve parallel sind. An Stelle der Gleichung (5) tritt dann die folgende

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \frac{T}{K}.$$

Die zu integrierenden Funktionen nehmen dann andere Formen an, die im einzelnen Falle vielleicht den von uns erhaltenen vorzuziehen sind.

Neue Begründung der Sphärik.

Von Gerhard Hessenberg.

Die Aufgabe, die nichteuklidischen ebenen Geometrien mit ausschließlicher Benutzung ebener Axiome, also ohne räumliche Betrachtungen, elementar zu begründen, ist unlängst von Herrn Hilbert für den Fall negativen Krümmungsmaßes gelöst worden, und zwar zugleich mit Vermeidung des archimedischen Axioms.[1]) Der Vortragende hat den Fall positiver Krümmung in einer demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinenden Arbeit

1) Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie. Math. Ann. 57. Abgedruckt in „Grundlagen der Geometrie", 2. Auflage.

erledigt und gibt im folgenden einen zweiten Weg an, der von seiner zuerst gefundenen Methode nicht unwesentlich abweicht. Auch hier bleibt das archimedische Axiom unbenutzt. Will man überhaupt Stetigkeitsbetrachtungen zulassen, so gibt es bereits in der Differentialgeometrie einen bekannten Weg, um aus rein ebenen Betrachtungen zu den Formeln der nichteuklidischen Geometrie zu gelangen.

Es ist seit langem bekannt, daß die Schwierigkeit einer „zweidimensionalen" Begründung der Sphärik *sich auf den Beweis des projektiven Fundamentalsatzes* konzentriert. Von ihm aus gelangt man nach Staudt und Lüroth zur Definition des Wurfes und zum Rechnen mit Würfen. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich dann als Würfe definieren. Eine Darstellung dieses Weges ist mir in der Literatur nicht begegnet; es soll daher im zweiten Teil des Vortrages eine solche gegeben werden. Daß aber die Tatsache an sich bekannt ist, geht z. B. daraus hervor, daß auch Herr Dehn sie kürzlich ohne Literaturangabe angeführt hat.[1])

Um den projektiven Fundamentalsatz zu beweisen, genügt es, im Besitze des Pascalschen Schließungssatzes zu sein, da sich die Figur des Desarguesschen Satzes aus drei Pascalschen Konfigurationen zusammensetzen läßt. Ein Beweis dieser Behauptung erscheint demnächst in den Mathematischen Annalen. (Das umgekehrte ist, wie Herr Hilbert gezeigt hat, nicht der Fall. Die allgemeine Pascalsche Konfiguration läßt sich nicht aus Desarguesschen Konfigurationen zusammensetzen).

Mein in den Annalen erscheinender Beweis des Pascalschen Satzes ist auf die Geometrie von positiver Krümmung zugeschnitten, und zwar auf die eigentliche „Sphärik", in der zwei Gerade sich zweimal schneiden. Der hier gegebene Beweis ist dagegen für die euklidische und die *beiden* Formen der elliptischen Geometrie zugleich gültig; nach Einführung unendlichferner Punkte läßt er sich auch in der Lobatschefskyschen Geometrie durchführen, doch dürfte da der von Herrn Hilbert eingeschlagene Weg den Vorzug größerer Einfachheit besitzen. Ich will noch erwähnen, daß meine beiden Beweise durch eine einfache Transformation auseinander hervorgehen.

I.

Beweis des Pascalschen Satzes.

1. Als Winkel (p, q) zweier *Geraden* p, q definieren wir den Winkel zweier *Halbgeraden* von p und q, die im Sinne des Uhrzeigers aufeinander folgen und dabei nicht durch die andern Halbgeraden getrennt sind. Der so definierte Winkel ist also positiv und spitz oder stumpf. Ist P ein Punkt auf p, Q ein Punkt auf q und A der Schnittpunkt von p, q, so ist $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(AP, AQ)$ gleich $\sphericalangle(PAQ)$, wenn dieser im Sinne des Uhrzeigers gemessen wird; dagegen ist $\sphericalangle(AP, AQ)$ gleich dem Supplement von $\sphericalangle(PAQ)$, wenn der Sinn dieses Winkels dem des Uhrzeigers entgegengesetzt gerichtet ist.[2])

2. Sind b, c, p, q vier Gerade durch einen Punkt A und $\sphericalangle(p, b) = (c, q)$, so nennt man b, c Gegengerade in bezug auf p, q. Es sind dann auch

---

1) Über den Inhalt sphärischer Dreiecke, Math. Ann. 60.

2) Speziell sind $\sphericalangle(p, q)$ und $\sphericalangle(q, p)$ Supplemente!

p, q Gegengerade in bezug auf b, c. Man kann die Gegengerade von p in bezug auf b, c durch folgende, vom Parallelenaxiom unabhängige Konstruktion finden: Ein Punkt P auf p werde an b und c nach P_b und P_c gespiegelt. Dann halbiert q den Winkel $P_b A P_c$, wie sich durch Vergleichung der Winkel an A leicht ergibt. Da aber $AP_b = AP = AP_c$, folgt sofort weiter, daß q die *Mittelsenkrechte* von P_b und P_c ist.

Fig. 1.

3. Spiegeln wir nun einen Punkt P an den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks ABC, nach P_a, P_b, P_c, so laufen die drei Mittelsenkrechten von P_a, P_b, P_c durch einen Punkt Q und sind die Gegengeraden von PA, PB, PC in den drei Ecken des Dreiecks. Wir nennen Q den *Gegenpunkt* von P in bezug auf ABC. Da P zugleich der Gegenpunkt von Q ist, sagen wir auch: P und Q sind ein Paar von Gegenpunkten in bezug auf ABC.

4. P, P_a und P_c sind die Spiegelbilder von P_b in bezug auf AC, CQ und QA, also ist B der Gegenpunkt von P_b in bezug auf AQC ($BP = BP_a = BP_c$). Daher ist $\sphericalangle(BQ, CQ) = \sphericalangle(AQ, P_bQ)$.

Ist umgekehrt $\sphericalangle(BQ, CQ) = \sphericalangle(AQ, P_bQ)$, P_b das Spiegelbild von P an b, und PA die Gegengerade von QA in bezug auf b, c, so folgt daß P_bA und BA Gegengerade in bezug auf AQ, AC, ferner P_bQ und BQ in bezug auf QA, QC, mithin P_b und B Gegenpunkte in ACQ sind, woraus wir rückwärts schließen, daß P und Q Gegenpunkte in ABC sind.

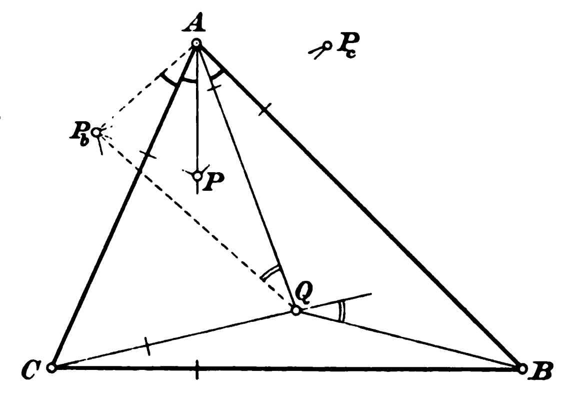


Fig. 2.

5. Wir beweisen nun folgenden Hilfssatz:

I) *Sind zwei unter den drei Geradenpaaren von einem Punkt Q nach den drei Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierseits Gegengeraden zueinander, so sind sie auch Gegengeraden in bezug auf das dritte Paar.*

Drei Seiten des Vierseits seien mit a, b, c, ihre Schnittpunkte mit A, B, C bezeichnet. Die vierte Seite m schneide a, b, c in U, V, W, sodaß AU, BV, CW die

Gegeneckenpaare sind. Nach Voraussetzung sind QB, QV Gegengerade zu QC, QW, also

$$\sphericalangle(QB,\ QC) = \sphericalangle(QW,\ QV).$$

Ist in A, B, C der Gegenpunkt P von Q konstruiert, und an b nach P_b gespiegelt, so ist $\sphericalangle(BQ, CQ) = \sphericalangle(AQ, P_bQ)$, also $\sphericalangle(AQ, P_bQ) = \sphericalangle(QW, QV)$, woraus wir nach 4. folgern, daß P auch in bezug auf AVW der Gegenpunkt von Q ist.

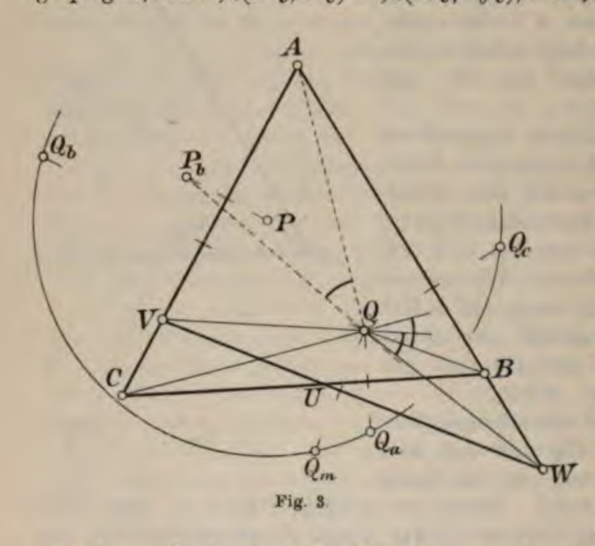


Fig. 3

Ist umgekehrt der Gegenpunkt von Q in ABC und AWV der gleiche, so ist

$$\sphericalangle(QB, QC) = \sphericalangle(AQ, P_bQ) = \sphericalangle(QW,\ QV),$$

also sind QB, QV Gegengerade zu QC, QW.

Den Gegenpunkt P kann man nun auch als Mittelpunkt des Kreises Q_a, Q_b, Q_c konstruieren, wenn Q_a, Q_b, Q_c durch Spiegelung von Q an a, b, c entstehen. Sind also QB, QV Gegengerade zu QC, QW, so ist P auch Mittelpunkt des Kreises Q_b, Q_c, Q_m, d. h. *die vier Spiegelbilder von Q liegen auf einem Kreise.* Aus der Symmetrie dieser Beziehung in bezug auf die vier Seiten des Vierseits folgt, daß P, Q in allen 4 Dreiecken ABC, AVW, CVU, BWU Gegenpunkte sind, und daß somit auch QA, und QU Gegengerade zu QB, QV oder QC, QW sind. Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

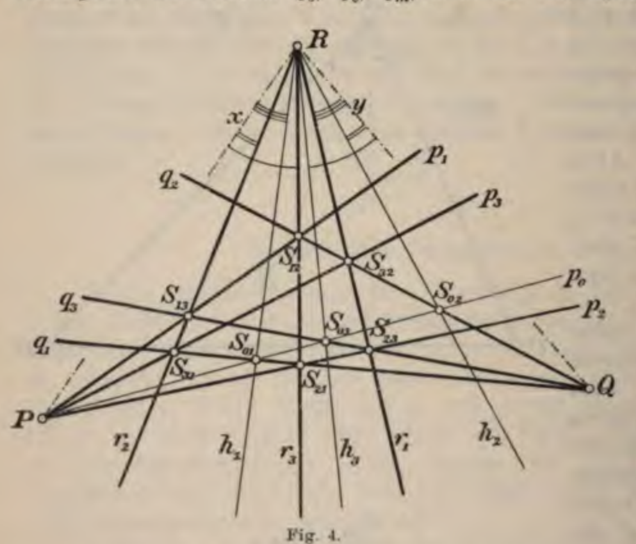


Fig. 4.

6. Den *Pascalschen Satz* beweisen wir unter folgender Form:

II) *Laufen die Seiten eines einfachen Sechsecks abwechselnd durch zwei feste Punkte P, Q, so laufen die drei Hauptdiagonalen durch einen dritten Punkt R.*

Unter den zahlreichen Formulierungen des Satzes entspricht diese dem

Brianchonschen Satz für den in zwei Strahlbüschel degenerierten Kegelschnitt. Die Seiten des Sechsecks, die durch P laufen, nennen wir p_1, p_2, p_3, ihre Gegenseiten q_1, q_2, q_3. Sie laufen nach Voraussetzung durch Q. S_{ik} sei der Schnittpunkt von p_i mit q_k; S_{ki} ist also die Gegenecke von S_{ik}; verbinden wir beide durch eine Gerade r_l (i, k, l eine Permutation von 1, 2, 3), so sind r_1, r_2, r_3 die Hauptdiagonalen. Es ist zu beweisen, daß r_3 durch den Schnittpunkt R von r_1, r_2 läuft.

Zum Beweise ziehe man $RS_{12} = r_3'$ und hierzu in bezug auf $RP = x$, $RQ = y$ die Gegengerade h_3. Sie treffe q_3 in S_{03}. Man ziehe $PS_{03} = p_0$ und nenne die Schnittpunkte von q_1, q_2 mit p_0 S_{01} und S_{02}. Von diesen ziehen wir nach R die Geraden h_1 und h_2.

Nunmehr betrachten wir die drei Vierseite $p_0p_1q_2q_3$, $p_0p_3q_1q_2$ und $p_0p_2q_3q_1$. Das Gegeneckenpaar PQ ist allen dreien gemeinsam. Das erste hat ferner die Paare

(A) S_{03}, S_{12}; S_{02}, S_{13}

(B) das zweite: S_{02}, S_{31}; S_{01}, S_{32}

(C) das dritte: S_{01}, S_{23}; S_{03}, S_{21}.

Bezeichnen wir noch RS_{21} mit r_3'', so sind die Strahlenpaare von R nach diesen Ecken: h_3, r_3'; h_2, r_2; h_1, r_1; h_3, r_3''.

Da das erste Paar ein Gegengeradenpaar zu xy ist, gilt das gleiche vom zweiten (nach A), demnach vom dritten (nach B) und endlich vom vierten (nach C). Danach sind r_3' und r_3'' beide Gegengerade zu h_3 in bezug auf xy, also miteinander und mit r_3 identisch, w. z. b. w.

7. Anm. 1. Die Resultate von 1 bis 5 sind allgemein bekannt; auch die Beweismethode durch Spiegelung ist nicht etwa angeführt, weil ich sie für neu hielte, sondern nur, damit man sich von dem Nichtgebrauch des Parallelensatzes überzeugen möge. Ob der Beweis von II sich in der Literatur findet, ist mir nicht bekannt. Es wäre dann immer noch die Frage, ob seine Unabhängigkeit vom Parallelensatz und deren Tragweite bereits beachtet worden sind.

Anm. 2. Sind Y, Z die Schnittpunkte von PP_b, PP_c mit b und c, so ist $YZ \perp AQ$; denn nach einem in der Sphärik vielfach angewandten, also bekanntermaßen vom Parallelenaxiom unabhängigen Satze steht die Verbindung zweier Seitenmitten eines Dreiecks (hier PP_bP_c) senkrecht zum Mittellot der dritten Seite. (Unter Verwendung des Parallenaxioms pflegt man aus den rechten Winkeln bei Y und Z nach dem Satz vom Sehnenviereck auf die Gleichheit der Winkel PAY und PZY zu schließen. Des letzteren Schenkel sind dann auf denen von ZAQ vertikal, wonach wieder aus dem Parallelensatz die Gleichheit von PAY und ZAQ folgt.)

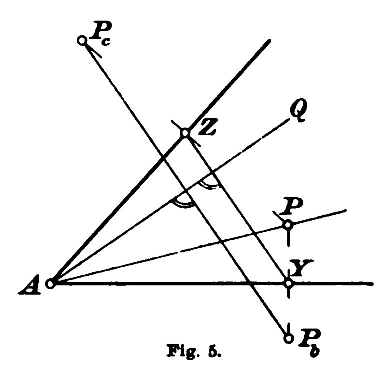


Fig. 5.

Anm. 3. Der Hilfssatz I ist ein spezieller Fall des Satzes, daß die Strahlen von irgend einem Punkt nach den Ecken eines Vierseits involu-

torisch liegen. Zugleich steckt darin der Satz, daß die Punktreihen, in denen eine Tangente eines Kegelschnitts zwei feste Tangenten schneidet, von einem Brennpunkt durch kongruente Büschel projiziert werden (a, b, c, m sind Tangenten eines Kegelschnitts mit den Brennpunkten P, Q. PQ_a und QP_a schneiden sich auf a im Berührungspunkt T_a und es ist $PT_a + T_aQ = PQ_a = QP_a =$ constans). Man sieht, daß eine Reihe von Fokaleigenschaften unabhängig vom Parallelensatz gelten, und daß der hier eingeschlagene Weg in die projektive Geometrie im wesentlichen mit dem altbekannten über die Fokaleigenschaften der Kegelschnitte übereinstimmt.

II.

Die Fundamentalformeln der Sphärik.

8. Es sei auf Grund des Pascalschen Satzes der projektive Fundamentalsatz und das Rechnen mit Würfen entwickelt. Die Addition und Multiplikation von Würfen befolgen die bekannten assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze und lassen sich in folgenden Satz zuzusammenfassen:

III. *Zwischen den Würfen* $(ABCX)$ *und* $(UVWX)$ *besteht eine bilineare Gleichung, deren Koeffizienten durch* A, B, C, U, V, W *bestimmt sind und aus den speziellen Annahmen* $X = U$, $X = V$, $X = W$ *gefunden werden können.*

Da in jedem Wurf die gleichzeitige Vertauschung in zwei voneinander verschiedenen Elementenpaaren zulässig ist, findet man aus III. z. B.

$$(ABCD) = (ABED) : (ABEC),$$
$$(ABCD) + (ACBD) = 1,$$

wobei $(ABCA)$, $(ABCB)$, $(ABCC)$ mit ∞, 0, 1 zu bezeichnen sind.[1]) Sind AB und CD harmonische Paare, so ist $(ABCD) = -1$ (d. h. $(ABCD) + 1 = 0$).

9. Ich übergehe ferner die Herleitung der bekannten Sätze über Pol und Polare auf der Kugel sowie den Beweis des Satzes, daß kongruente Würfe projektivisch sind. Da wir hier von der Abbildung der Würfe und der Strecken auf die Zahlenreihe absehen, haben die Zeichen 1, ∞, -1 nur Bedeutung als Würfe, $\frac{1}{2}\pi$, π, 2π nur als Strecken. Dagegen bezeichnet 0 sowohl eine Strecke wie einen Wurf. Wir werden sogleich beide einander zuordnen.

10. Es seien nun U, N, E (Unendlichkeits-, Null- und Einheitspunkt) drei Punkte auf irgend einer Geraden, deren Abstände dem Sinn und der Größe nach vorgeschrieben seien. Jeder vierte Punkt A bestimmt eindeutig einen Wurf $(UNEA)$ und drei Strecken UA, NA, EA, von denen wir die mittlere, NA, dem Wurf $(UNEA)$ zuordnen, so daß der Strecke 0 der Wurf 0 entspricht. Da ein Punkt mit seinem Gegenpunkt projektivisch äquivalent ist, bestimmen Strecken, die sich um Vielfache von π unter-

1) Diese Bezeichnung ist die gebräuchliche. Staudt nennt diese Würfe 0, 1, ∞, wodurch natürlich die Form der beiden speziellen Gleichungen eine andere wird.

scheiden, denselben Wurf, und jeder Wurf bestimmt die zugehörige Strecke bis auf Vielfache von π eindeutig. Voraussetzung hierbei ist, daß jeder Strecke ein Sinn beigelegt ist, der sie als positiv oder negativ kennzeichnet.

11. Unter sogleich anzugebenden speziellen Annahmen über die Strecken NE, NU bezeichnen wir den der Strecke NA zugeordneten Wurf $UNEA$ mit dem Zeichen

$$\operatorname{tg}(NA)$$

und wissen zunächst jedenfalls, daß $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}(a + \pi) = \operatorname{tg} a$ ist. Zugleich ergibt das Multiplikationsgesetz die Beziehung

$$(UNAB) = \operatorname{tg}(NB) : \operatorname{tg}(NA).$$

12. Die Würfe $\operatorname{tg} a$ und $\operatorname{tg}(-a)$ hängen durch eine bilineare Gleichung[1]) zusammen, die im Falle $NU = \frac{1}{2}\pi$, d. h.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi = \infty$$

besonders einfach wird. Ist nämlich NA' entgegengesetzt gleich NA, so ist für $UN = \frac{1}{2}\pi$ der Wurf $(UNAA') = \operatorname{tg}(-a) : \operatorname{tg} a$ harmonisch, also

$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a.$$

13. Um noch für E eine einfache Festsetzung zu treffen, betrachten wir $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\pi - a) = \operatorname{cotg} a$. Sei $NB = \frac{1}{2}\pi - NA = AU$, $NF = EU$, so sind die Würfe $(NUFB)$ und $(UNEA)$ kongruent; es ist aber

$$(UNEB) \cdot (NUFB) = (UNEB) \cdot (UNBF) = (UNEF).^{2})$$

Die linke Seite ist $\operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tg} a$, die rechte ein von 0 und ∞ verschiedener Wurf, der am einfachsten als 1 angenommen wird. Daraus folgt $E = F$, also $NE = EU = \frac{1}{4}\pi$, d. h.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}\pi = 1, \quad \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cotg} a = 1.$$

14. Man mache $U'U = N'N = E'E = b$, so ist $N'U' = \frac{1}{2}\pi$, $N'E' = \frac{1}{4}\pi$, $N'A = N'N + NA = b + a$, also $(U'N'E'A) = \operatorname{tg}(b + a)$. Nach Satz III ist also $\operatorname{tg}(a + b) = (\varkappa + \lambda \operatorname{tg} a) : (\mu + \nu \operatorname{tg} a)$. Für die Koeffizienten $\varkappa$, λ, μ, ν erhält man aus $a = -b$, $a = c$, $a = \frac{1}{2}\pi$ die bekannten Werte und damit das Additionstheorem der Tangente.

15. Seien $B^*AC^* = \alpha$ ein beliebiger Winkel, $AB^* = AC^* = \frac{1}{2}\pi$, B, B' beliebige Punkte auf AB, BC und $B'C'$ die Lote auf AC^*. Da sie sich auf B^*C^* (im Pole P von AC^*) schneiden, folgt

$(B^*ABB') = (C^*ACC')$, daraus nach 11:

$$\operatorname{tg} AB : \operatorname{tg} AC = \operatorname{tg} AB' : \operatorname{tg} AC'.$$

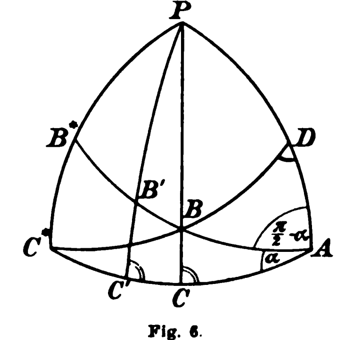
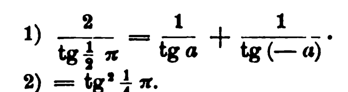


Fig. 6.



1) $\dfrac{2}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\pi} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} a} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}(-a)}$.

2) $= \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4}\pi$.

Diesen, somit von α allein abhängigen Wurf nennen wir $\cos\alpha$ und setzen $\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

16. Sei speziell $AC = \frac{1}{4}\pi$, so ist $\cos\alpha = 1 : \operatorname{tg} AB$.

Errichten wir in A das Lot auf AC und schneiden es mit C^*B in D, so ist $\sin\alpha = \operatorname{tg} AD : \operatorname{tg} AB$, also $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg} AD$. Es ist aber $AD = \sphericalangle\, AC^*D = \sphericalangle\, AC^*B = \sphericalangle\, C^*AB = \alpha$, also

$$\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha.$$

Aus 15. und 16. folgt nun mit der bekannten, rein geometrisch beweisbaren zyklischen Vertauschbarkeit der fünf Stücke des rechtwinkligen Dreiecks das ganze Formelsystem desselben.

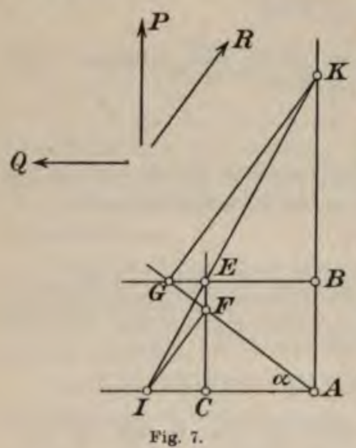


Fig. 7.

17. Zum Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ errichte man wie in 16. auf AC^* in A das Lot AB, das sich mit dem Lot in $Q = A^*$ im Pol P von AQ schneidet. Es sei $AC = AB = \frac{1}{4}\pi$. Treffen die Lote QB und PC den zweiten Schenkel von α in G und F, so ist $\cos\alpha = 1 : \operatorname{tg} AF$, $\sin\alpha = 1 : \operatorname{tg} AG$. Die Lote FR und GR auf AFG schneiden sich in R auf PQ und treffen AQ, AP in I und K; es wird $\cos\alpha = \operatorname{tg} AF : \operatorname{tg} AI$, also

$$\cos^2\alpha = \operatorname{cotg} AI = \operatorname{tg} QI,$$

ebenso

$$\sin^2\alpha = \operatorname{tg} PK.$$

Nunmehr erweist sich die Figur der acht Punkte $APQGFRIK$ als eine Pascalsche Konfiguration, es geht daher IK mit PC und QB durch denselben neunten Punkt E, woraus wir die Gleichheit der Würfe $(AQCI)$ und $(ABPK)$ ablesen. Aus $(ABPK) + (APBK) = 1$ (siehe § 8) ergibt sich hiernach $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

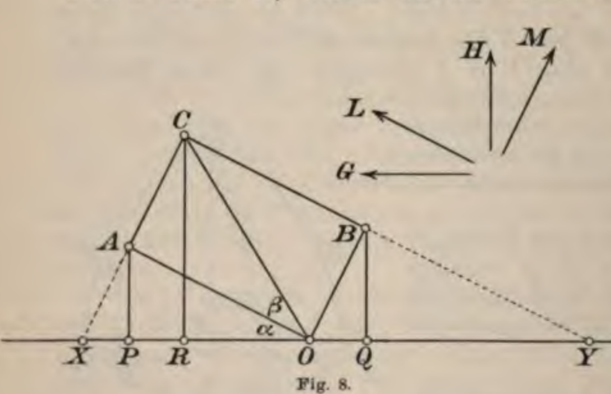


Fig. 8.

18. Aus 17. und 14. folgt jetzt das Additionstheorem des Cosinus, das aber noch direkt hergeleitet werden soll.

Zu den Schenkeln OG und OL des Winkels α bestimmen wir die Pole H und M, tragen an OL den Winkel $COL = \beta$ an und wählen $CO < \frac{1}{2}\pi$. Fällen wir von C auf OL, OM, OG die Lote CA, CB, CR und von A, B auf OG die Lote AP, BQ, so ist analog der euklidischen Geometrie:

$$\operatorname{tg} OP = \operatorname{tg} OC \cos\alpha \cos\beta, \quad \operatorname{tg} OQ = -\operatorname{tg} OC \sin\alpha \sin\beta,$$
$$\operatorname{tg} OR = \operatorname{tg} OC \cos(\alpha + \beta),$$

und es ist also noch zu zeigen, daß $\operatorname{tg} OP + \operatorname{tg} OQ = \operatorname{tg} OR$.

Da sich AP, BQ und CR in H, AC und OB in M, BC und OA in L treffen, entstehen die vollständigen Vierecke $CHAL$ und $CHBM$. L, M, H liegen auf der Polare von O, die OG im Abstand $OG = \frac{1}{2}\pi$ von O trifft. X, Y seien die Schnittpunkte von CA und CB mit OG. Dann folgen aus den Vierecken die Involutionen:

$$(G,\ X;\ O,\ R;\ P,\ Y) \quad \text{und} \quad (G,\ Y;\ O,\ R;\ Q,\ X),$$

daraus die Wurfgleichungen

$$(GORP) = (XROY) \quad \text{und} \quad (GORQ) = (YROX).$$

Die rechten Seiten geben addiert 1, die linken Seiten haben die Werte $\operatorname{tg} OP : \operatorname{tg} OR$ und $\operatorname{tg} OQ : \operatorname{tg} OR$, womit das gesuchte Resultat gefunden ist.

Hiermit sind alle Hilfsmittel zur rechnerischen Behandlung der Sphärik entwickelt.

Schlußwort.

Der Staudtsche Versuch, die projektiven Betrachtungen an die Spitze der Geometrie zu stellen, hat wenig Freunde gefunden; in der euklidischen Geometrie ist die Streckenrechnung ein spezieller Fall des Rechnens mit Würfen und ihm an Übersichtlichkeit durchaus überlegen. In der nichteuklidischen Geometrie dagegen fällt mit der Proportionenlehre die *Multiplikation* der Strecken fort und die Strecken*abtragung* ist keine Addition von Würfen. Zugleich entsteht die Notwendigkeit, nach neuen Definitionen der trigonometrischen Funktionen zu suchen. Während nun in der hyperbolischen Geometrie dem Aufbau der projektiven Geometrie die Einführung idealer Elemente vorangehen muß, sind in der elliptischen sofort alle Bedingungen ihrer Durchführung gegeben, *so daß hier das eigentliche, natürliche Betätigungsfeld für den Staudtschen Gedankengang liegt,* — gleichgültig ob man den Fundamentalsatz mit Raum und Stetigkeit ohne Kongruenz oder umgekehrt beweist.

Grunewald, Mai 1905.

Mitglieder-Verzeichnis.

Ackermann-Teubner, A , Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adler, Prof. Dr. A., Prag-Karolinenthal.
Ammerlahn, Oberlehrer G., Steglitz, Filandastr. 10.
Aron, GRR. Prof. Dr. H., Berlin, Kaiserallee 219/220.
Börsch, Prof. Dr. A., Potsdam, Saarmunderstr. 15.
Budde, Prof. Dr. E., Charlottenburg, Berlinerstr. 54.
Burg, Oberlehrer Dr. R., Friedenau, Friedrich Wilhelmplatz 13.
Caratheodory, Dr. C., Göttingen, Schildweg 36.
Cranz, Prof. Dr. C., Charlottenburg, Bismarckstr. 12.
Cwojdziński, cand. K., Berlin C., Gipsstr. 6.
Denizot, Dr. A., Charlottenburg, Schlüterstr. 7.
Dumas, G., Zürich, Asylstr. 81.
Dziobek, Prof. Dr. O., Charlottenburg, Schillerstr. 19.
Eichberg, Dr. Ing. F., Berlin NW., Stromstr. 10 A.
Emde, Ingenieur F., Berlin NW., Zinzendorfstr. 3.
Färber, Oberlehrer Dr. C., Berlin S., Fichtestr. 2.
Fleck, prakt. Arzt Dr. A., Berlin N., Ackerstr. 117.
Freese, Oberlehrer O., Pankow, Brehmestr. 56.
Fuchs, Oberlehrer Dr. R., Berlin W., Uhlandstr. 145.
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Poppelsdorf-Bonn, Marienstr. 15.
Galle, Prof. Dr. A., Potsdam, Behlertstr. 36.
Güntsche, Oberlehrer Dr. R., Berlin W., Hohenstaufenstr. 7.
Guradze, Dr. H., Berlin W., Augsburgerstr. 48.
Gutsche, Oberlehrer Dr. O., Breslau, Trebnitzer Platz 6.
Haenlein, Oberlehrer J., Berlin NW., Spenerstr. 34.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin W., Gleditschstr. 43.
Hagmann, Oberlehrer A., Charlottenburg, Friedbergstr. 10.
Hahn, Oberlehrer H., Grunewald, Bismarckallee 24.
Hamburger, Schulamtskandidat A., Berlin NW., Karlstr. 15.
Hauck, Oberlehrer A., Steglitz.
Hensel, Prof. Dr. K., Marburg (Hessen), Universitätsstr. 54.
Hermes, Prof. Dr. O., Steglitz, Lindenstr. 35.
Hertzer, GRR. Prof. Dr. H., Berlin W., Frobenstr. 14.
Hessenberg, Prof. Dr. G., Grunewald, Trabenerstr. 21.
Heun, Prof. Dr. K., Karlsruhe, Klauprechtstr. 33.
Holtze, Dipl. Ing. H., Berlin SW., Anhaltstr. 10.
Hupe, Prof. A., Charlottenburg, Kantstr. 76.
Jahnke, Prof. Dr. E., Berlin W., Ludwigskirchstr. 6.
Jolles, Prof. Dr. St. Halensee, Kurfürstendamm 130.

Kiehl, Realgymn.-Direktor Dr. H., Berlin SW., Kochstr. 66.
Kneser, Prof. Dr. A., Breslau, Tiergartenstr. 106.
Knoblauch, Prof. Dr. J., Berlin W., Karlsbad 12.
Koebe, Dr. P., Luckenwalde.
Koebke, Dr. E., Friedenau, Cranachstr. 5.
Koppe, Prof. M., Berlin O., Königsbergerstr. 16.
Kötter, Prof. Dr. F., Berlin S., Annenstr. 1.
Krüger, Prof. Dr. L., Potsdam, Geodät. Institut.
Kullrich, Oberlehrer Dr. E., Berlin NW., Turmstr. 4.
Lampe, GRR. Prof. Dr. E., Berlin W., Fasanenstr. 64.
Landau, Privatdozent Dr. E., Charlottenburg, Hardenbergstr. 13.
Lemke, Oberlehrer Dr. H., Wilmersdorf, Preußischestr. 8.
Lewent, Oberlehrer L., Berlin W., Motzstr. 87.
Linsenbarth, Oberlehrer Dr. H., Berlin N., Lothringerstr. 76.
Linsenmann, Assistent H., München, Artilleriestr. 3.
Lorenz, Ingenieur Max, Kiel, Beseler Allee 32.
Marggraff, Professor Dr. B., Pankow, Amalienpark 2.
Meder, Dozent A., Riga, Dorpaterstr. 23.
Meyer, Oberlehrer Dr. E., Charlottenburg, Carmerstr. 17.
Meyer, Prof. Dr. F., Königsberg (Ostpr.), Mitteltragheim 51.
Michaelis, Prof. Dr. C., Potsdam, Schützenplatz 1b.
Michaelis, Stadt-Schulrat Dr. K., Berlin W., Kurfürstenstr. 149.
Müller, Prof. Dr. F., Friedenau, Rönnebergstr. 16.
Müller, Prof. H., Charlottenburg, Grolmanstr. 15.
Müller, Prof. Dr. R., Berlin S., Schleiermacherstr. 11.
Nahrwold, Oberrealschuldirektor Dr. R., Berlin C., Niederwallstr. 12.
Opitz, Oberlehrer Dr. H., Johannisthal, Parkstr. 6.
Pahl, Oberlehrer F., Charlottenburg, Kantstr. 118/119.
Peters, Oberlehrer J., Osnabrück Vitihof 16, Kaiserwallecke.
Pund, Oberlehrer Dr. O., Charlottenburg, Schloßstr. 61.
Quelle, R., Prokurist der Firma B. G. Teubner, Leipzig, Poststr. 3.
Reissner, Dr. Ing. H., Berlin W., Rankestr. 22.
Rothe, Privatdozent Dr. R., Charlottenburg, Schlüterstr. 78.
Rotth, Oberingenieur A., Berlin W., Magdeburgerstr. 22.
Salkowski, Schulamtskandidat Dr. E., Berlin C., Alte Leipzigerstr. 13.
Samter, Oberlehrer Dr. H., Charlottenburg, Herderstr. 14.
Sándor, Ingenieur E., Charlottenburg, Goethestr. 17.
Sarli, Ingenieur, Berlin N., Gr. Brunnenstr. 25.
Schafheitlin, Oberlehrer Dr. P., Berlin W., Schaperstr. 17.
Schirdewahn, Prof. Dr. G., Gr. Lichterfelde, Augustastr. 20b.
Schlesinger, Oberlehrer Dr., Charlottenburg, Galvanistr. 17.
Schmidt, Oberlehrer Dr. A., Friedenau, Niedstr. 36.
Schneider, Prof. A., Berlin W., Großgörschenstr. 31.
Schur, Privatdozent Dr. J., Berlin W., Genthinerstr. 21.
Seiffert, Oberlehrer A., Charlottenburg, Spreestr. 9.
Seliwanow, Prof. Dr. D., St. Petersburg, Fontanka, 116, log. 16.
Singer, Dr. O., Berlin, Helgoländer Ufer 5.
Skutsch, Prof. R., Braunschweig, Wolfenbüttelerstr. 58.
Steinitz, Prof. Dr. E., Berlin W., Nachodstr. 24.

Thiel, Schulamtskand. G., Berlin, Barnimstr. 25.
Tropfke, Oberlehrer Dr. J., Berlin, Marienstr. 14.
Valentin, Oberbibliothekar Dr. G., Berlin W., Burggrafenstr. 6.
Vogler, GRR. Prof. Dr. Ch. A., Berlin W., Kaiserin Augustastr. 80.
Wallenberg, Oberlehrer Dr. G., Charlottenburg, Grolmanstr. 21.
Weingarten, GRR. Prof. Dr. J., Freiburg i. Breisgau, Dreikönigstr. 38.
Weiß, Oberlehrer Dr. F., Gr.-Lichterfelde Ost, Parallelstr. 10.
Weltzien, Prof. Dr. C., Zehlendorf, Prinz-Handjerystr. 3.
Zacharias, Oberlehrer Dr. M., Berlin NW., Alt Moabit 115.
Zühlke, Oberlehrer Dr. P., Westend, Spandauerberg 4.

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

E. Budde, E. Cesàro, E. Eckhardt, P. Epstein, A. Gleichen, W. Godt, H. Graf, G. Holzmüller, K. Hunrath, J. Horn, Ed. Janisch, E. P. Jourdain, C. Isenkrahe, A. Kiefer, C. Kober, F. Koch, P. Koholt, M. Krause, E. Landau, M. Lerch, W. Ludwig, E. Malo, O. Meissner, E. Meyer, W. F. Meyer, J. Neuberg, E. Pelz, E. Pulfer, J. Rahn, A. Rosenthal, E. Rogel, L. Saalschütz, T. Sawayama, Cl. Schaefer, P. Schafheitlin, E. Schultz, R. Schüssler, C. Segre, O. Spieß, H. Stahl, R. Sturm, G. Teixeira, A. Visaya, A. Wendler, K. Zorawski.




510.5
A673
v.9
STORAGE AREA

